爲什麼雙曲線會有漸近線

葉東進

國立科學園區實驗高中

平面上的二次錐線中，橢圓沒有漸近線是明顯的事實，拋物線沒有漸近線的理由也很簡單（註一），唯獨雙曲線有漸近線這件事，在教學上需要費些精神。

問題的深淺可以分爲兩個層面：

(1)如何找出雙曲線的漸近線？

(2)爲什麼雙曲線會有漸近線？

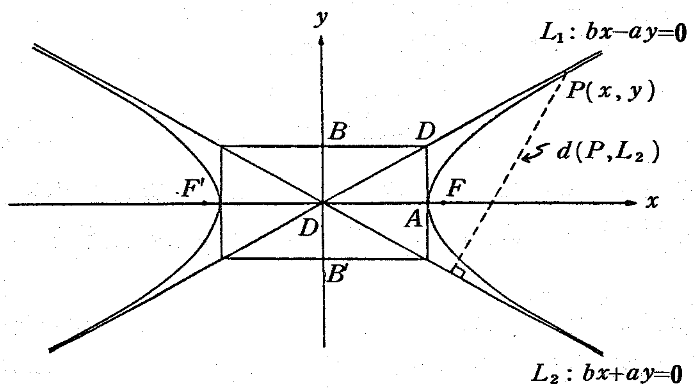
讓我們先看看一般的教材怎麼回應上面的問題。

(a)高中數學實驗教材第四冊（自然組）：

設雙曲線Γ已表爲$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（註二），與橢圓相仿，在$Y$軸上，取點$B(0,b)$及$B'(0,-b)$，稱線段$BB'$爲該雙曲線的共軛軸。

爲瞭解共軛軸的幾何特性，我們要說明它與雙曲線的所謂“漸近線”存在着一些關聯。

過A，B分別引一平行於Y軸，X軸的直線，設交於D，則D有坐標（a，b），連結$0D$得一直線（圖一）



（圖一）

$$L_1 : \frac{y}{x}=\frac{b}{a}$$

亦即 $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

另一方面我們得到

$$L_2 : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

設雙曲線 Γ 上的點 P 到 L_1 , L_2 的距離，分別表以 $d(P,L_1)$, $d(P,L_2)$

則 $$d(P,L_1)=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad d(P,L_2)=\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故 $$d(P,L_1)\cdot d(P,L_2)=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2b^2}{c^2} \quad [\text{因}P(x,y)\text{滿足}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1]$$

因爲 Γ 在每一象限向四方無限伸展，此時在第一、第三象限的部分上的點 P 使 $d(P,L_2)$ 趨於 ∞，故 $d(P,L_1)$ 趨於 0 。亦即在第一、第三象限 Γ 上的點向遠方無限伸展的同時，也無限接近 L_1。

同理，在第二、四象限中，Γ 上的點向遠方無限伸展的同時，也無限接近 L_2 ，因爲這樣，我們把 L_1 , L_2 稱作 Γ 的漸近線。

(b)高中基礎數學第三冊：

設 $P(x_0, y_0)$ 是雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的點，則得 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$。當 P 點沿着雙曲線向遠處移動時，我們考慮 P 點到某一直線之距離的變化情形，如果此距離愈來愈接近 0 ，我們就稱這條直線是雙曲線的漸近線。要了解那條直線具有這個性質，我們可以從 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$ 這個等式來觀察。因爲

$$b^2x_0^2-a^2y_0^2=|b^2x_0^2-a^2y_0^2|$$

$$=|bx_0-ay_0|\cdot|bx_0+ay_0|$$

由於我們需要考慮 P 點到某直線的距離，而上式右端的兩個絕對值出現在 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $bx-ay=0$ 與直線 $bx-ay=0$ 的距離之表示式中。根據這個發現，要討論雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線，應該考慮下面兩直線：

$$L_1 : bx-ay=0$$

$$L_2 : bx+ay=0$$

如果我們考慮 P 點到直線 L_1 與 L_2 的距離，就會發現這兩個距離之乘積是一個

常數，因爲

$$\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

這個結果能提供給我們什麼結論呢？

因爲雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的圖形在四個象限內都可以無限延伸，如果$P$點在此雙曲線的第一或第三象限部分向遠處移動時，$P$點到直線$L_2:bx+ay=0$的距離必定愈來愈大，在此情況下，$P$點到直線$L_1:bx-ay=0$的距離。

$$\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\text{常數}}{P\text{到直線}L_2\text{的距離}}$$

必定愈來愈接近0，因此，我們發現，直線$L_1:bx-ay=0$是雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一條漸近線。

同理，如果P點在此雙曲線的第二或第四象限部分向遠處移動時，P點到直線$L_2:bx+ay=0$的距離就愈來愈接近0，因此，直線$L_2:bx+ay=0$也是雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一條漸近線。

(c)高中理科教學上册教學指引：

假設Γ爲一曲線，而L爲一直線，着動點P沿着曲線Γ的任一方向趨向無窮遠處時，P點到直線L的距離跟着趨近0，則稱直線L是曲線Γ的一條漸近線。

例如，若$P(x, y)$是雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的動點；設$x>0$，$y>0$（註三），則$P(x, y)$到直線$bx-ay=0$的距離爲

$$\begin{aligned}\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}&=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{bx+ay}\\&=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{bx+b\sqrt{x^2-a^2}}\\&=\frac{a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\end{aligned}$$

由於「P點趨向無窮遠處」時，可得「x趨向正無限大」，根據前面的等式，可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

所以 $bx-ay=0$ 是雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一條漸近線。

(d)高中理科數學上册教學指引：

定理：設 $f(x)$ 爲一函數，則直線 $y=ax+b$ 是曲線 $y=f(x)$ 的（斜）漸近線的充要條件是

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$$

或是

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$$

因爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 是下列兩個函數的圖形所組成的：

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad |x|\geqslant a$$

$$g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad |x|\geqslant a$$

根據上面的定理，分別求曲線 $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 的漸近線，所得的漸近線就是雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的全部（斜）漸近線。

因爲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{b}{a}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{b}\cdot\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

所以 $y=\frac{b}{a}x$ 是曲線 $y=f(x)$ 的一條漸近線。

因爲

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)=-\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{b}{a}x\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(f(-x)-\frac{b}{a}x\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\\&=0\end{aligned}$$

所以　　$y=-\frac{b}{a}x$ 是曲線　$y=f(x)$ 的一條漸近線。

同法，可求得　$y=\frac{b}{a}x$ 及 $y=-\frac{b}{a}x$ 也是 $y=g(x)$ 的漸近線。

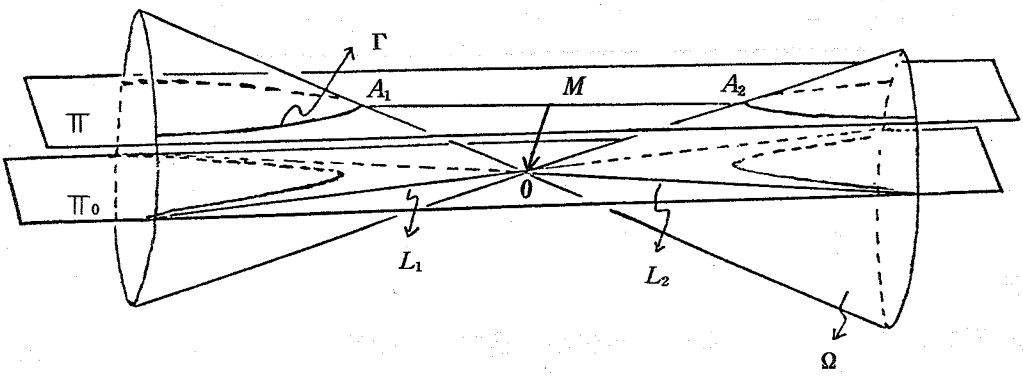
現在讓我們來檢視以上的各種說法。

首先可以清楚地看出(a)、(b)及(c)等三種敍說本質上其實並沒有什麼不同，都是在先已假定了「直線 $bx-ay=0$ 及 $bx+ay=0$ 是雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線」這個心理背景下去找出它的邏輯的必然性；不論是爲虛無的共軛軸（註四）找一些具體的關聯，或是從 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$ 一式的觀察聯想中探索，這樣的回答都僅是止於問題的第(1)個層面。

至於敍說(d)，從作爲曲線 $y=f(x)$ 的漸近線的充要條件這個基礎出發去找出漸近線，就比較沒有那股「勉強」的味道，祇要對函數的極限有些粗淺的概念就不難接受，可以說這樣子的回答不僅達到了第(1)個層面，也多少觸及了第(2)個層面。不過，對於高二生來說，在學習二次錐線之前，一般並沒有學過函數的極限。因此，敍說(d)也就未能在高二班的教室中普遍被採用。

仔細想來，提到雙曲線總是順便要說到它有漸近線，固然可以凸顯出它與拋物線的區別，但是主要的仍是着眼在作圖上所帶來的方便。

話說回來，是否有那種不必涉及函數的極限而又能夠使學生明白「爲什麼雙曲線有漸近線」的方法呢？下面試着提出一個：

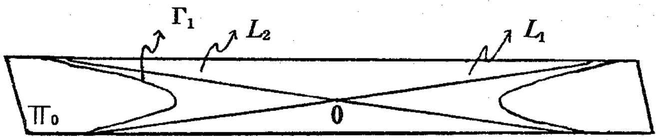


（圖二）

考慮圓錐面Ω及平面Π，且假定Π截Ω所得的曲線是雙曲線Γ（圖二）。現在讓Π沿着方向$\overrightarrow{MO}$（M是線段A_1A_2的中點）作平行移動直到Π通過圓錐的頂點0，此時Π落於平面Π_0的位置，並截Ω於兩條母線L_1及L_2。

如果我們依$\overrightarrow{MO}$方向作平行投影，則Π上的曲線Γ投射在Π_0上的映像Γ'，其位置就有如圖三所示的情況。要是我們及時注意到Ω實際上是一個兩端無限延伸的錐面的話，那麼母線L_1（及L_2）不會與Γ'相交，並且它們之間的距離會隨着L_1（及L_2）的延伸愈遠而愈趨接近便是極爲明顯的事實了，這就清楚地表明了雙曲線會有兩條漸近線。

（圖三）

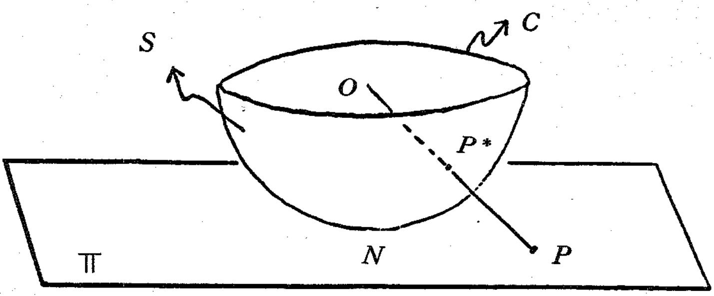


最後，底下我也想試着從射影幾何的觀點來指出「雙曲線會有兩條漸近線」。

射影平面就是歐氏平面再配置無窮遠線。

上面這樣一個稍嫌抽象的觀念，我們用一個比較具體的模式來加以說明：

考慮一個包含赤道的半球面S，O是球心，C是它的赤道，N是球頂，而Π是切S於點N的平面（圖四）。



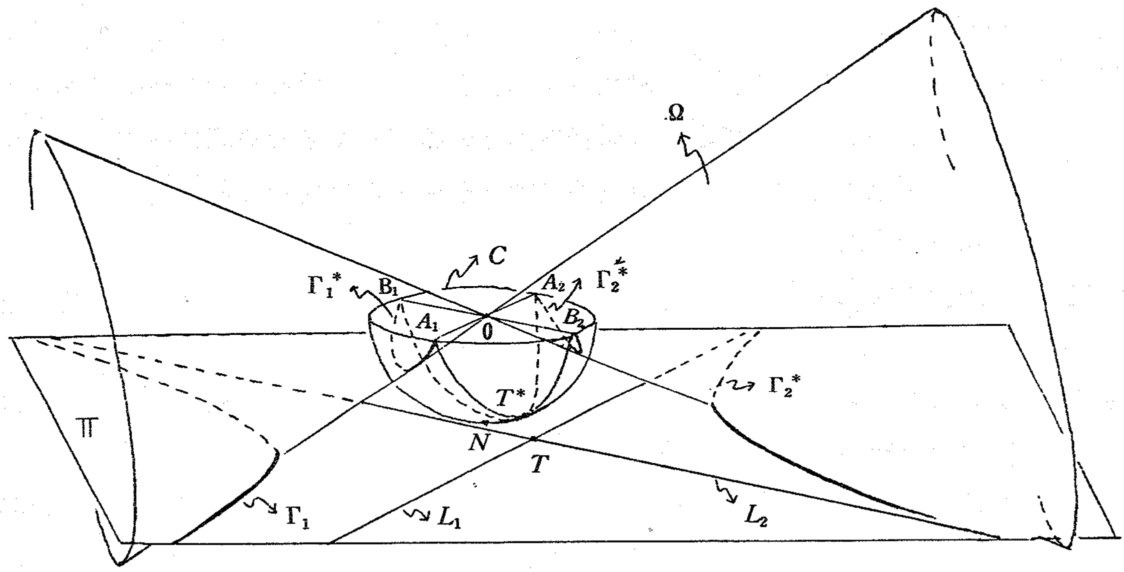
（圖四）

對於Π上的點P，直線OP與S有唯一的交點P^*；反之，若$P^*\in S-C$，則直線OP^*與Π有唯一的交點P，因此P與P^*之間的關係決定了Π與$S-C$之間的一個一對一的對應。

當$P^*\in C$時，直線OP^*與Π並無交點，爲使上述對應能延展至整個S，我們在Π上配置無窮遠線以使與C相對應；換句話說，C上的點對應到Π上的無窮遠點。上述的對應我們稱爲S與Π之間的一個射影變換（註五）。

其次，我們考慮頂點為O（注意，O也是S的球心）的圓錐面Ω與S相交的情形（圖五）。

當Ω截S所得的曲線是 $\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$（此時，$\Gamma_1^*$ ＝圓弧$\widehat{A_1B_1}$；Γ_2^*＝圓弧$\widehat{A_2B_2}$，且$\widehat{A_1B_1} \cup \widehat{A_2B_2}$是一個圓）的同時，$\Omega$截平面$\pi$所得的曲線是一雙曲線$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$。請注意，$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$也是$S$上的曲線$\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$經上述射影變換在平面$\pi$上的映像。



（圖五）

從$\widehat{A_1B_1} \cup \widehat{A_2B_2}$是一個圓這件事實，知道存在兩個半大圓$A_1T^*A_2$及$B_1T^*B_2$使得半大圓$A_1T^*A_2$分別切圓弧$\widehat{A_1B_1}$、圓弧$\widehat{A_2B_2}$於點$A_1$、$A_2$；而半大圓$B_1T^*B_2$則分別切圓弧$\widehat{A_1B_1}$、圓弧$\widehat{A_2B_2}$於點$B_1$、$B_2$。

我們也注意到，S上的半大圓$A_1T^*A_2$與半大圓$B_1T^*B_2$經射影變換分別投射到平面π上的直線L_1與L_2（$L_1 \cap L_2 = T$，T是T^*在射影變換下在π上的映像）。

因為半大圓$A_1T^*A_2$及半大圓$B_1T^*B_2$均與$\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$相交圓$C$上，通過射影變換我們知道它們在$\pi$上的映像$L_1$及$L_2$便均與雙曲線$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$相交於無窮遠點，即是說$L_1$與$L_2$是雙曲線$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$的兩條漸近線。

（註一）不失一般性，取拋物線為 $x^2 = ky,\ k>0$，並考慮任一直線 $L: ax+by+c=0$，$b \neq 0$（$b=0$ 時，L 垂直 X 軸，此時 L 顯然不是拋物線的漸近線），則拋物線上的點與 L 之間距為 $\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\left|ax+\frac{b}{k}x^2+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|bx^2+kax+kc|}{k\sqrt{a^2 b^2}}$，

因為不管 $b>0$ 或是 $b<0$，$|bx^2+kax+kc|$ 總是有極小值；換句話說，任一直線 L 與拋物線 $x^2=ky$ 之間都有最短距離，所以 L 不會是拋物線的漸近線。

（註二）當我們想用解析方法探討一般雙曲線的性質時，必定會涉及到曲線的方程式，通過座標系統的適當選取，可以使雙曲線的方程式呈現最簡潔的型式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。採用此種模式探討性質時並不失掉一般性，這也就是教材中總要提到二次曲線標準式的一個道理。

（註三）由於雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 對稱於兩個坐標軸，因此討論 $x>0$，$y>0$ 的情形也就是夠了。

（註四）所謂虛無的共軛軸是相對於橢圓的短軸而言，因為橢圓的短軸是明明白白可以在圖形上找到，而雙曲線的共軛軸則不然。

（註五）當 $P^* \in C$ 時，直線 OP^* 與 C 還有另一個交點 Q^*，Q^* 其實就是 P^* 關於 O 點的對稱點。我們規定 P^* 與 Q^* 在射影變換下是對應到 π 上的同一個無窮遠點。

參考資料

1. 高中數學實驗教材第四冊（自然組）
2. 高中基礎數學第三冊
3. 高中理科數學上冊教學指引
4. 高中解析幾何後記，黃武雄，數學傳播五卷一期
5. 數學的內容、方法及意義，徐氏基金會
6. 數學是什麼？徐氏基金會
7. 數學思想的發展，九章