“夾心四邊形”探討

鄭再添

臺北縣立永和國中

一、前　　言

任意三角形都有一內切圓，也同時有一外接圓；若反過來就圓的觀點看三角形，則成：二內離的圓恰將此三角形“夾住”！我們不妨稱之爲兩圓的“夾心三角形”。

顯然，並非任意兩內離的圓都可以擁有夾心三角形。則到底什麼樣的條件可以提供兩內離圓恰將三角形夾住的正確位置？尤拉（Leonhavd Euler，1707～1783）早已爲此問題尋得圓滿解答——當兩圓的位置關係滿足關係式 $d^2=R^2-2rR$ 時恰可夾住三角形（參見〔1〕第31頁）；其中 d 表連心線長，R 及 r 則分別爲兩圓半徑。有興趣的讀者可進一步參考〔3〕，該文中已作詳細討論。

若對四邊形作同樣的考慮：兩內離的圓如何可以擁有“夾心四邊形”呢？問題將更具內涵與趣味！基本上，四邊形已不再是隨意地可以具有內切圓或外接圓；要能同時擁有內切圓及外接圓，則除了正方形顯然得以具備外，其他四邊形恐須花下一番功夫尋覓了！筆者曾於民國七十二年以“幾何夾心餅”（參見〔2〕，P.160～168）爲題指導學生參加科展，內容即在探討四邊形與圓的內切、外接關係。該作品雖獲致一些結論，也因此僥倖得獎，但有些推演過程，限於學生程度及筆者才識，未能清楚交代，一直引以爲憾！幾年來曾就問題的癥結所在多方請益，終於在去夏對“夾心四邊形”有個較完整的認識。筆者不揣淺陋，在此謹將幾何夾心餅的內容及隨後的探究心得綜合整理，提供給教師同仁們參考，並就教於學界賢達，懇請不吝斧正。

二、本　　文

從國中幾何課程中，學生已可體認三則事實——

1. 內角不是直角的菱形，有一內切圓，但沒有外接圓；
2. 長與寬不相等的矩形，有一外接圓，但沒有內切圓；
3. 正方形有一外接圓，也有一內切圓。

由此我們引發出整個問題的原始動機：

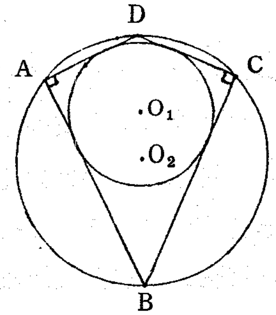
『是否唯有正方形才同時擁有內切圓及外接圓？』

這裡也打算由它出發，探尋些許幾何世界裡的奧秘。以下由（甲）至（庚）分為七個段落進行探討：

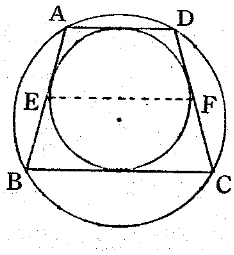
(甲) 由國中教材中可歸納出兩個基本定理——

1. 四邊形有一外接圓 $\Leftrightarrow$ 兩組對角和相等；
2. 四邊形有一內切圓 $\Leftrightarrow$ 兩組對邊和相等。

根據這兩項基本定理，我們考慮將菱形"一般化"：任意箏形即有內切圓；再作適當的"特殊化"，兩"肩角"為直角的箏形將同時擁有內切圓及外接圓（參見圖一）！同樣地，若對矩形作類似處理，亦可得：中線長與腰長相等的等腰梯形同時具有內切圓及外接圓。



(a) $\angle A = \angle C = 90°$

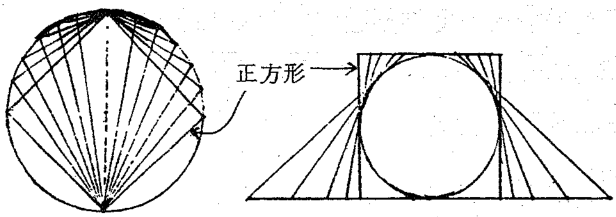


(b) $\overline{EF} = \overline{AB} = \overline{CD}$

圖一

到此為止，原始動機的問題已然獲解：『同時具有內切圓及外接圓絕非正方形的專利！』而上述的兩類箏形與等腰梯形，我們可以有無限多個，參見圖二可知，正方形分別是兩者的特殊情形。

(乙) 是否尚有其他類型的四邊形可同時具有內切圓及外接圓？這是進一步要加以探索的

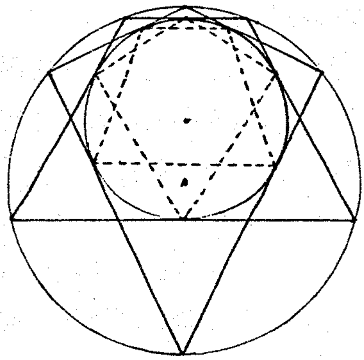


(a) (b)

圖二

問題。檢視上述兩類夾心四邊形的共同特性，可以發現：

1. 順次連接等腰梯形與圓的切點，可得一箏形；相對的，順次連接箏形與圓的切點，則成一等腰梯形。而且，等腰梯形與箏形可同時存在於兩圓之間！（參見圖三）換句話說，兩圓間的夾心四邊形不止一個！
2. 連接等腰梯形與箏形的對邊切點，則得上述的圓內接四邊形的對角線，似呈互相垂直的現象（參考圖五(a)，(b)）。



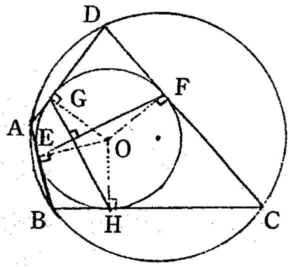
圖三

經過一番“大膽假設”及“小心求證”的歷程，獲得了一個重要的定理：（參見圖四）

〔定理〕

四邊形有一內切圓，則此四邊形同時具有外接圓（若且唯若）⟺四邊形與內切圓的對邊切點連線互相垂直。

定理的獲得使整個探討工作邁入一個新的里程，可惜並非新的“創見”。承中央研究院數學研究所呂素齡小姐相告，在趙繚先生所編的“數學辭典”（民國42年12月出版）第498頁中已見收錄。後來在九章出版社所編之“解題思路—如何作證明題”內第138頁亦見類似的練習。它的證



圖四

明不難，以下簡述緣由（更詳細過程可參見〔2〕）：

1. $\because \overline{OE} \perp \overline{AB}$，$\overline{OH} \perp \overline{BC}$，$\overline{OF} \perp \overline{CD}$，$\overline{OG} \perp \overline{AD}$

   $\therefore \quad \angle C + \angle HOF = 180° = \angle C + \angle A$

   $\Rightarrow \quad \angle HOF = \angle A$

2. 同理， $\angle EOG = \angle C$

   $\therefore \quad \angle HOF + \angle EOG = \angle A + \angle C = 180°$

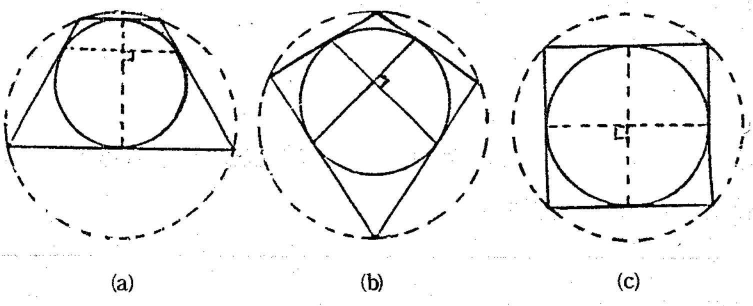
3. $\widehat{EG} + \widehat{HF} = 180° \quad \Rightarrow \quad \overline{EF} \perp \overline{HG}$

根據這個定理，我們找到一個“製造”夾心四邊形的作法：（參考圖四）

〔作法一〕
1. 對一圓任意作垂直相交的兩弦，
2. 過兩弦的端點分別對圓作切線，

則四切線所圍成的四邊形即爲所求。

經由上述作法的引領，我們對圓的夾心四邊形廣泛地作圖觀察。因此得知：同時擁有內切圓及外接圓的四邊形有無限多，形狀亦非特定；上述的箏形、等腰梯形及正方形是當中的特殊情形。（作法中之兩垂直弦等長時得一箏形；有一弦爲直徑時得一等腰梯形；兩弦皆爲直徑時，則得一正方形。參見圖五所示。）



圖五

至此可知，夾心四邊形有無限多種。但對於“兩圓間”的夾心四邊形是否也是無限多？仍然無法答覆，我們留待後面再深入探索。以下繼續就作法上略加討論：

(丙) 上述的作法由內圓出發，依據定理決定夾心四邊形，外接圓自然可以跟著被畫出來，是否也有由外而內的作圖法呢？這是我們第三階段的探討主題。

(1) 由㈤中的基本定理可知，只要能作出“對邊和相等”的圓內接四邊形來，我們的目的就達到了！針對這種想法，我們運用雙曲線的性質——與兩焦點的距離差爲定值，來處理問題：（參見圖六）

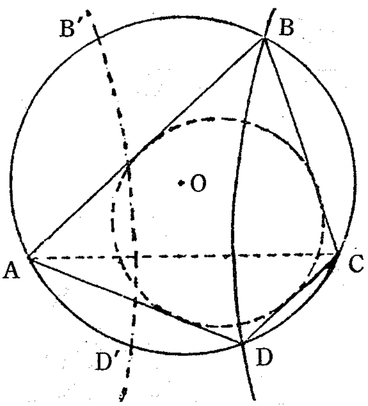
〔作法二〕

1. 在圓O上任取兩點A、C；
2. 以A、C爲焦點作任意雙曲線，設其一支與圓相交於B、D兩點；
3. 連接A、B、C、D，所成的四邊形即爲所求。

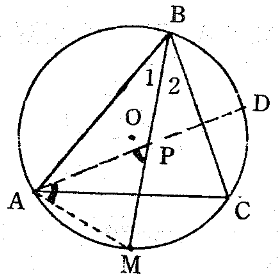
在上述作法中，因B、D同在以A、C爲焦點的雙曲線上，故有$\overline{AB}-\overline{CB}=\overline{AD}-\overline{CD}=$定值，即$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{CB}$，是以ABCD必爲一夾心四邊形。

這個作法比〔作法一〕來得方便，可惜不屬尺規作圖，下文將再作改善，其中對A、C爲兩焦點作雙曲線時，可作出無限多“共焦點雙曲線系”的雙曲線來；而每一雙曲線都可決定出一個夾心四邊形（同一雙曲線的左右兩支所決定的夾心四邊形爲全等形），因此這個作法也可以畫出無限多個夾心四邊形！

(2) 如何使用尺規作圖可以避開上述作雙曲線的困境呢？筆者找到一種利用三角形內心的方式處理，過程尚不致複雜，但爲了推理方便，先列出作法所依據的兩則“引理”：



圖六



圖七

<引理一> 如圖七所示，圓O為△ABC的外接圓，M為$\overset{\frown}{AC}$中點；若在$\overline{BM}$上取一點P，使得$\overline{MP}=\overline{MA}$，則P為△ABC的內心。

證明：1. ∵ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{CM}$，∴ $\angle 1=\angle 2$，

即 $\overline{BM}$平分$\angle ABC$；

2. ∵ $\overline{MP}=\overline{MA}$，∴ $\angle MAP=\angle MPA$，

則 $\overset{\frown}{MD}=\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{BD}$

3. 由上知 $\overset{\frown}{MC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{BD}$

4. ∵ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MC}$，∴ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$，

即 $\overline{AD}$平分$\angle BAC$；

5. 由(1)，(4)知：P為△ABC的內心。

<引理二> 如圖八所示，圓O_1，O_2分別為△ABD、△CBD的內切圓；若$\overline{O_1O_2}\perp\overline{BD}$，則四邊形ABCD有一內切圓。

證明：1. ∵$\overline{BD}$為圓O_1及圓O_2之公切線，且$\overline{O_1O_2}\perp\overline{BD}$，∴兩圓外切於T；

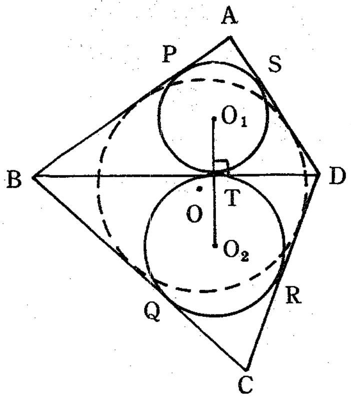
2. 由圓外一點對圓的切線長相等知：

$\overline{AP}=\overline{AS}$，$\overline{BP}=\overline{BT}=\overline{BQ}$，$\overline{CQ}=\overline{CR}$，$\overline{DR}=\overline{DT}=\overline{DS}$；

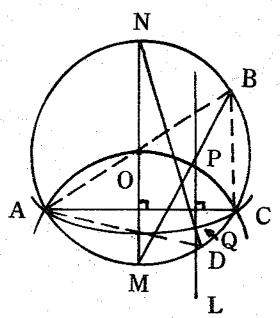
3. ∴ $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}$

$=\overline{AS}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}=\overline{BC}+\overline{AD}$

故知：ABCD有內切圓。



圖八



圖九

〔作法三〕
1. $\overline{AC}$爲圓O上任意弦，作直徑$\overline{MN}$垂直於$\overline{AC}$；
2. 分別以M、N爲圓心，$\overline{AM}$、$\overline{AN}$爲半徑畫弧；
3. 對$\overline{AC}$弦任作一垂線L，設L與上述兩弧分別交於圓O內P、Q兩點；
4. 作$\overrightarrow{MP}$、$\overrightarrow{NQ}$，設與圓O分別交於B、D，

則四邊形ABCD即爲所求。（參見圖九）

說明：1. ∵M爲$\overset{\frown}{AC}$中點，$\overline{AM}=\overline{MP}$，由<引理一>知：P爲△ABC內心；
2. 同理，Q爲△ADC之內心。
3. ∵$\overline{PQ}\perp\overline{AC}$，P、Q分別爲△ABC、△ADC之內心，

由<引理二>知：ABCD有一內切圓。

上述作法中，當$\overline{AC}$弦爲直徑時，ABCD即成一箏形；若L亦同時爲直徑，則ABCD即成正方形。事實上，〔作法三〕* 和〔作法二〕類似：直徑$\overline{MN}$爲一對稱軸，L直線可以在$\overline{MN}$的左或右側；和$\overline{MN}$距離相同時，所決定的夾心四邊形是全等形。而隨著L位置的不同，即獲得不同的夾心四邊形。因此，同樣可以作出無限多夾心四邊形來。

值得再提的是：兩個引理中所述的條件其實都是充分且必要的！因爲與引出作法的本意無關，逆敘述及其證明不擬在此贅述。

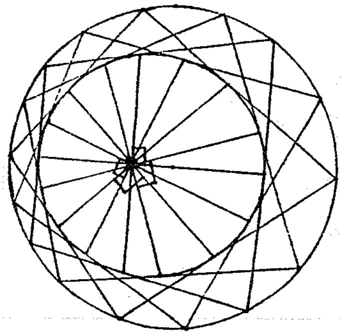
(丁) 讓我們再回到圓的觀點上來：兩內離圓間是否有無限多夾心四邊形？這可以從(乙)部分的〔作法一〕繼續着手探索。如圖十所示，若對圓內一定點任作幾組垂直相交的弦，則它們經由〔作法一〕所決定出的四邊形將共有一個外接圓！

當年在“幾何夾心餅”作品裡，即是在此留下一個“漏洞”未能交代清楚。上述現象果若獲得實證，則上述問題即迎刄而解：兩圓間的夾心四邊形將有無限多個，它們填滿兩圓間整個區域，一如夾心三角形之情形。（參見〔3〕內容）

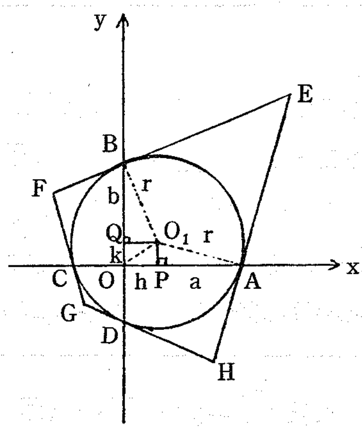
經過數度的嘗試與努力，筆者將問題坐標化，透過冗長的計算，終於以解析方式提出一個肯定的證據：

(*)補註：此作法在處理類似下述命題時特具功效：

“已知A、B、C三點，求作第四點D，使得四邊形ABCD爲一夾心四邊形”。



圖十



圖十一

(1) 參見圖十一所示,將原點定在上述的定點上,以四邊形與內圓的對邊切點的連線爲兩軸,並將內圓圓心置於第一象限。令圓心 O_1 坐標爲 (h,k),半徑爲 r;且 $d=\overline{OO_1}$,$a=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{AP}$,$b=\frac{1}{2}\overline{BD}=\overline{BQ}$,則有 $h^2+k^2=d^2$,$a^2+k^2=b^2+h^2=r^2$。而圓方程式爲 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$,A、B、C、D各點坐標爲 $A(h+a,O)$,$B(O,k+b)$,$C(h-a,O)$,$D(O,k-b)$。由圓上一點求切線方程式的解法可得過A的切線 $\overleftrightarrow{HE}$:

$$(h+a-h)(x-h)+(O-k)(y-k)=r^2$$

經化簡整理即成

$$ax-ky=a^2+ah \cdots\cdots\cdots \overleftrightarrow{HE}$$

同法可求 $\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{FG}$、$\overleftrightarrow{GH}$ 的方程式分別爲:

$$hx-by=-(b^2+bk) \cdots\cdots\cdots \overleftrightarrow{EF}$$

$$ax+ky=-(a^2-ah) \cdots\cdots\cdots \overleftrightarrow{FG}$$

$$hx+by=-(b^2-bk) \cdots\cdots\cdots \overleftrightarrow{GH}$$

再由 $\overleftrightarrow{HE}$ 及 $\overleftrightarrow{EF}$ 聯立求解即得E的坐標爲

$$E\left(\frac{b(r^2+ah+bk)}{ab-hk},\ \frac{a(r^2+ah+bk)}{ab-hk}\right)$$

同法再求F、G、H的坐標分別爲:

$$F\left(\frac{-b(r^2-ah+bk)}{ab+hk},\ \frac{a(r^2-ah+bk)}{ab+hk}\right),$$

$$G\left(\frac{-b(r^2-ah-bk)}{ab-hk},\ \frac{-a(r^2-ah-bk)}{ab-hk}\right),$$

$$H\left(\frac{b(r^2+ah-bk)}{ab+hk},\ \frac{-a(r^2+ah-bk)}{ab+hk}\right)$$

(2) 根據(乙)部分之定理可知，四邊形EFGH同時具有一外接圓，故可由四點圓的條件求取外接圓方程式：

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_F^2+y_F^2 & x_F & y_F & 1 \\ x_G^2+y_G^2 & x_G & y_G & 1 \\ x_H^2+y_H^2 & x_H & y_H & 1 \end{vmatrix}=0$$ （其中 x_F 表F點的 x 坐標，餘類推。）

將F、G、H各點坐標一一代入，再作行列式展開化簡處理*，最後可得圓方程式爲：

$$\left[x-\frac{hr^2(a^2+b^2)}{a^2b^2-h^2k^2}\right]^2+\left[y-\frac{kr^2(a^2+b^2)}{a^2b^2-h^2k^2}\right]^2$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(b^2-k^2)(a^2-h^2)r^4+d^2r^4(a^2+b^2)^2}{(a^2b^2-h^2k^2)^2}$$

又由圓內冪性質知（參見圖十二）

$$(a+h)(a-h)=(b+k)(b-k)=(r+d)(r-d),$$

即 $$a^2-h^2=b^2-k^2=r^2-d^2$$

配合 $a^2+k^2=b^2+h^2=r^2$，可得

$$a^2b^2=r^2-(h^2+k^2)r^2+h^2k^2=r^4-d^2r^2+h^2k^2,$$

$$a^2+b^2=2r^2-h^2-k^2=2r^2-d^2$$

因此可將圓方程式中之a、b、h、k皆代換成r及d得：

$$\left[x-\frac{(2r^2-d^2)h}{r^2-d^2}\right]^2+\left[y-\frac{(2r^2-d^2)k}{r^2-d^2}\right]^2=\frac{(2r^2-d^2)r^4}{(r^2-d^2)^2}$$

換句話說，外接圓的圓心 O_2 坐標爲

$$\left(h+\frac{r^2h}{r^2-d^2},\ k+\frac{r^2k}{r^2-d^2}\right),$$

註：由於行列式的化簡過程較嫌冗長而費時，因而在此略過，有興趣的讀者不妨自行爲之。

而半徑 $R=\dfrac{r^2}{r^2-d^2}\sqrt{2r^2-d^2}$ ……………………①

(3) 由O、O_1 及 O_2 三點的坐標可以發現，兩圓心與對邊切點連線的交點呈三點共線，這極易由共線的條件

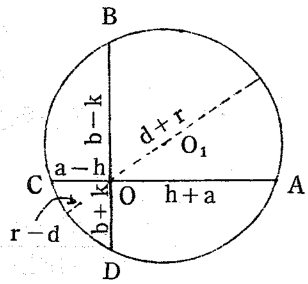
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_{01} & y_{01} & 1 \\ x_{02} & y_{02} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & O & 1 \\ h & k & 1 \\ h+\dfrac{r^2h}{r^2-d^2} & k+\dfrac{r^2k}{r^2-d^2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 可以得知

而且 $\overline{OO_1}:\overline{O_1O_2}=d:\dfrac{r^2d}{r^2-d^2}=1:\dfrac{r^2}{r^2-d^2}$，

因此可知：O_2 的位置及半徑R的大小皆與h、k值無關，只由r、d的值來決定！這告訴我們，若r、d固定，而將h、k的值任意改變，則所得的R值及 O_2 坐標仍然不變。即：

『固定兩弦的交點（垂足）位置，隨意旋轉這兩弦，則任何一組弦所決定的四邊形都共接於同一外圓上。』

情況正如圖十所示，這個階段的目標終於達成！



圖十二

(戌) 兩內離圓在何種條件下方有夾心四邊形存在呢？這是我們在“前言”裡就已提及的，現在總算可以面對了！下面以連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 來界定兩圓的位置，從①式再出發：

令 $k=\overline{O_1O_2}=\dfrac{r^2d}{r^2-d^2}$，則 $\dfrac{k}{d}=\dfrac{r^2}{r^2-d^2}$；

$$\therefore\quad R^2=\frac{(2r^2-d^2)r^4}{(r^2-d^2)^2}=[\,r^2+(r^2-d^2)\,]\left(\frac{r^2}{r^2-d^2}\right)^2$$

$$=\left(r^2+\frac{r^2d}{k}\right)\left(\frac{k}{d}\right)^2$$

$$=r^2\left[\left(\frac{k}{d}\right)^2+\frac{k}{d}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

又因 $kd^2+r^2d-kr^2=0$，且 $d\geq 0$

故知 $$d=\frac{-r^2+r\sqrt{r^2+4k^2}}{2k},$$

而得 $\dfrac{k}{d}=\dfrac{2k^2}{-r^2+r\sqrt{r^2+4k^2}}=\dfrac{r+\sqrt{r^2+4k^2}}{2r}$

將$\dfrac{k}{d}$代入②式經化簡可得：

$$R^2=r^2+k^2+r\sqrt{r^2+4k^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

上式提供了R、r、k三者間的關係，可由r及k的值很容易地推算R值。但我們面臨的是：已知R及r的值，設法推算正確的k值（決定兩圓的相關位置）。因此再作換算而得：

$$k^2=R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

事實上，在“幾何夾心餅”作品中，我們早已藉由箏形作為一般夾心四邊形的代表加以推算獲得了④式。因此，我們和它算是“老朋友”了！而在形式上，它與夾心三角形的關係式也頗類似。

需要補充的是，④式中的R及r應有適當的範圍限制：

∵ $k^2=R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}\geqslant 0$

∴ $R^2+r^2\geqslant r\sqrt{4R^2+r^2}$

兩邊平方後得 $R^4+2R^2r^2+r^4\geqslant r^2(4R^2+r^2)$

則 $R^4-2R^2r^2\geqslant 0$

∴ $R^2-2r^2\geqslant 0$， 即 $R^2\geqslant 2r^2$（或$R\geqslant\sqrt{2}\,r$）

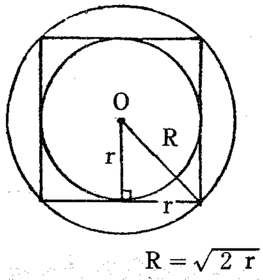
這個結果告訴我們，兩圓的半徑差須足夠大，才能夾得下四邊形，而正方形的情形恰是它們的極值（$R=\sqrt{2}\,r$），此時$k=0$，兩圓為同心圓（參見圖十三）。至於極小的情形，只要$r>0$即可，並無特殊限制。

(己) 關於夾心四邊形本身，還有兩點值得在此報告的，即：

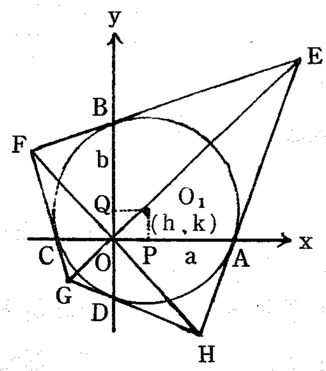
(1) 夾心四邊形的對角線與對邊切點連線皆共交於一點（參見圖十四所示，EFGH的對角線$\overline{EG}$，$\overline{FH}$亦交於O點）。

說明：利用(丁)部分中之E、F、G、H各點坐標可以推得

$$\begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_G & y_G & 1 \\ x_O & y_O & 1 \end{vmatrix}=0,\ 且\ \begin{vmatrix} x_F & y_F & 1 \\ x_H & y_H & 1 \\ x_O & y_O & 1 \end{vmatrix}=0$$



圖十三



圖十四

也就是說，E、G、O三點共線，且F、H、O亦共線。因此可知：$\overline{EG}$及$\overline{FH}$相交於O點 —— 對邊切點連線的交點！

(2) 夾心四邊形的兩對角線對稱於兩對邊切點連線(參見圖十四，$\overleftrightarrow{EG}$及$\overleftrightarrow{FH}$ 對稱於兩坐標軸)。

說明：由E、G的坐標利用兩點式推求$\overleftrightarrow{EG}$方程式得

$$\frac{y+\dfrac{a(r^2-ah-bk)}{ab-hk}}{x+\dfrac{b(r^2-ah-bk)}{ab-hk}}=\frac{\dfrac{a(2r^2)}{ab-hk}}{\dfrac{b(2r^2)}{ab-hk}}=\frac{a}{b},$$

經化簡後成 $ax=by$

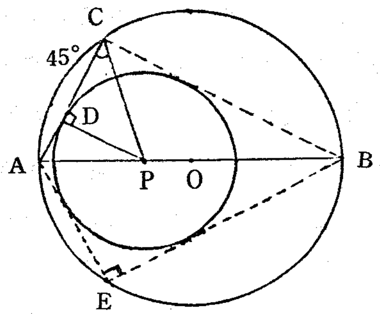
同理可求得$\overleftrightarrow{FH}$的方程式為 $ax=-by$

因此可知：$\overleftrightarrow{EG}$及$\overleftrightarrow{FH}$對稱於兩坐標軸。

(庚) 最後一個階段再回到作圖的討論上。在(戊)中由計算而得的關係式固然可以精確地推求各値，但需要作圖時，可能就顯得不太實際了！舉例來說：當$R=5$，$r=3$時，由④式可算出$k=\sqrt{34-3\sqrt{109}}$，但若要根據它的值來決定連心線長，在作圖上即顯然不切實際！這時如果運用箏形在衆多夾心四邊形中的“代表地位”，配合著三角板的使用，將可以很快地畫出恰可擁有夾心四邊形的兩內離圓來！(參見圖十五)

〔作法四〕
1. 以$\overline{AB}$爲直徑作圓O；
2. 以等腰直角的三角板斜邊過A點，調整三角板使一銳角頂點與圓弧相接於C，沿角的兩邊作$\overline{AC}$、$\overline{CP}$（P在$\overline{AB}$上）；
3. 自P作$\overline{AC}$的垂線$\overline{PD}$；
4. 以P爲圓心，$\overline{PD}$爲半徑畫圓。

則圓O及圓P即爲所求。



圖十五

說明：因$\overline{AP}$平分∠CAE，且$\overline{CP}$平分∠ACB，
故P爲內切圓圓心。
而$\overline{PD}\perp\overline{AC}$，$\overline{AC}$爲切線。
故PD爲內切圓半徑。

上述作法雖然不屬尺規作圖，但它可以無須畫出夾心四邊形即直接決定兩個關係位置“正確”（符合④式）的內離圓，是它的獨特之處，也補足了關係式在實用性上的缺陷！因此，它雖無類似前三種作法在理論推導上的地位，却有不可輕忽的存在意義。

三、結　　論

歷經漫長的探討過程之後，思緒顯得有些雜亂，因此再將本文中的主要結論淸理出來贅述如下——

1. 四邊形爲一夾心四邊形若且唯若此四邊形與內切圓的對邊切點連線互相垂直，據此可以獲致“由內而外”作夾心四邊形的方法。（即〔作法一〕）

2. 以圓上任意兩點爲焦點，任意作一雙曲線；其一支交於圓的兩點與原來的兩焦點決定一個夾心四邊形。（即〔作法二〕）

3. 四邊形有一內切圓若且唯若其對角線所分割成的兩三角形的內心連線與此對角線互相垂直。據此可以獲致“由外而內”作夾心四邊形的尺規作法。（即〔作法三〕）

4. 夾心四邊形的個數有無限多，形狀也非特定的；它的特殊情形有：等腰梯形、箏形及正方形。

5. 兩內離圓的半徑爲R及r，若$0 < r \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$，則在連心距k，$k^2 = R^2 + r^2$

$-r\sqrt{4R^2+r^2}$，的位置時有無限多四邊形夾在其中，恰將兩圓間整個區域塡滿；否則，即無夾心四邊形存在！

6. 兩內離圓間所有夾心四邊形的對角線及對邊切點連線皆共交於一點；此點且與兩圓圓心呈三點共線！

7. 夾心四邊形的對邊切點連線平分兩對角線的交角（換句話說，兩對角線對稱於兩對邊切點連線）。

四、回顧與展望

從“幾何夾心餅”階段使用直觀而傳統的推理幾何，到以解析幾何方式處理問題完成本文，時間橫跨幾個年頭，是一段漫長的“成長”歷程，筆者的心得是：坐標化的過程直接影響整個解析工作的成敗，唯有適切的坐標化技巧，及適時的運用可代換的關係式（如本文中的 $a^2+k^2=b^2+h^2=r^2$，$a^2-h^2=b^2-k^2=r^2-d^2$），是避免陷入龐大而繁瑣的計算歧途的關鍵。也許，對於本文所探討的問題，可以有更犀利的解決工具，或更簡便的處理方式，則希望有識之士能不吝賜教，這也正是筆者在此提出報告的主要目的之一。

從夾心三角形到夾心四邊形的探討，筆者才識淺薄，花了幾年光陰才跨出一步，對於一般 n 邊形來說，是否只要兩內離圓的連心距爲兩圓半徑的某特定函數值時，即恰可夾住 n 邊形？果然，此時也應有無限多 n 邊形夾在其中，恰將兩圓間整個區域塡滿！我們由正 n 邊形被兩同心圓夾住的情形來看，上述的臆測結果是相當樂觀的。然而，在推廣過程首先須面對的，可能是：在何種條件下可以使 n 邊形擁有內切圓（或外接圓）？眼前的路，仍然漫長，歡迎“有志之士”能共同來研討，更期待先進學者的熱心指導！

五、參考資料

1. 幾何研究（科學圖書大庫，徐氏基金會出版，68年3月再版本，王昌銳譯）
2. 第廿三屆中小學科學展覽優勝作品專輯（國中組）（國立臺灣科學教育館72年6月出版）
3. 兩內離圓夾住三角形的條件（數學傳播季刊第45期P.46～47，徵答問題11401詳解，鄭再添提供。）
4. 國中數學選修教材上册（國立編譯館75年出版）
5. 簡明數學百科全書（九章出版社74年元月五版）

後記：在此謹向曾就本問題給予筆者指導與協助的諸位先生、女士致謝！