電腦與代數

J. F. Ogilvie 著
中央研究院
許乃紅 譯
國立臺灣師範大學數學系

大多數使用電腦的人都知道電腦能快速的處理算術。這是一個正確的概念，電子數位電腦基本上只是一架加法機器，但是能使電腦具有如此大的效用，除了它能快速的計算外，主要是我們所設計的程式均能轉換成一些基本的操作，由中央處理機來處理簡單的加法和數值傳送。例如我們玩的電動玩具，這些程式能導致螢幕顯示畫面，音樂或聲音效果，以及在遊戲中如何使太空梭移動或控制一個現代鍊製石油的過程。實際上，上面所提的程式主要依靠數值的計算，也就是說，以太空梭爲例，這些儀器提供大氣中風速的資料或地球吸力等等，可由電腦中計算出所需的燃料，提供給每個引擎，用以發射太空梭到特定的軌道上。這些程式可能是用 BASIC 或FORTRAN 或其他高階語言寫的，這些均能轉換成機器語言而使中央處理器能正確的執行。雖然這些程式可能會出現一些符號，例如，變數 x ，y ， z 可能會出現在程式中，但是在執行程式時，電腦自然會找出每個變數所代表的數值，否則其值爲 0 。

另外還有一種比較不爲人知的電腦計算型態，它比運用 BASIC 或其他語言更有效且容易運用於交談式中，這就是符號計算，也就是電腦代數，在這種情況下，一個變數能代表它自己的數值，例如，我們有一方程式：

$$y=(2+x)^3$$

在BASIC 程式中，如果沒有指定 x 的數值，則 x 值被認定爲 0 ，因此這方程式的結果 y 成爲 8 。但在符號計算下， y 值爲

$$y=x^3+6x^2+12x+8$$

上式成立不論 x 爲任何值。因此，在這種計算方式下，電腦不僅可做代數也可以做三角函數、微積分、群論和現代數學的各領域的運算。

電腦代數的第一個“ 處理器 ”（語言或軟體），需要巨大的程式和大型電腦來操作

，但是現在的微電腦“ＰＣ”型電腦，事實上具有的電腦記憶和快速計算能力與十年前的大型電腦相同。而且，這種計算能力已廣泛被應用。例如，現在臺灣各中學已應用。因此，目前可利用ＰＣ電腦及電腦代數軟體來延展計算的範圍，使得計算能更容易且更快；這些計算如果利用手算可能需花很多時間，且容易導致錯誤。但是我們必須記住這些電腦代數處理器只能做那些我們能利用公式手算的計算。在本文中，首先介紹可用的處理器的一些一般功能的綱要及兩個能在ＰＣ電腦上使用的處理器，然後再作結論。

整數或實數算術的有效精確度

電腦代數處理器的設計特別是為了確定的數值或代數的結果，我們能比較電算器和電腦代數處理器算的整數階層，例如50！在電算器上，這答案為 $3.04140932 \times 10^{64}$，但在特定的電腦代數處理器上，這答案為一個65位數的整數，後者的答案是正確的，但是前者只有前面8或9位數是精確有效的。同理，如果計算 $4/6$，在電算器上可能會顯示 0.666666667，但在電腦代數處理器上得到正確的 $2/3$ 的簡單形式答案。當然，這些例子一點也不是代數，但他們能指出這些處理器的設計取向，但是如果一個人堅持得到一個近似值，則處理器也能提供一般的十進位近似值，但需由使用者決定位數，在這種狀況下，例如我們可以算 π 至小數點100位數的值。

多項式和有理函數的展開式及次序

我們在上面已看過的例子 $(2+x)^3$ 的展開式，很容易轉換成 $8+12x+6x^2+x^3$，但反過來看，就需要因式分解的能力，就不是很容易處理的。

因式分解

有些處理器的因式分解能力，不僅將 x^2-y^2 化為 $(x+y)(x-y)$ 而且能將整數分解成質因數。

替代和模式配合

有下列二多項式

$$y=(2+x)^3$$
$$z=1/2\,y^2$$

則產生的結果為 $z=x^6/2+6x^5+30x^4+80x^3+120x^2+96x+32$，一般標準

型的PC電腦大約需0.3秒得到答案，可能比大多數的數學系的學生還要快。由最後一個式子轉換可用 $2+x$ 來替代 y，可直接找 $2+x$ 的因式，也可用 $x=y^{1/3}-2$ 來達成。

解析的微分和積分

處理器可運用微積分的標準公式，特殊情形能找出特定表示式對於特定變數的某次偏微分，例如，由上面的例子中對 x 微分，則 dy/dx 的指令等於

$$3(2+x)^2 \quad 或 \quad 3x^2+12x+12$$

上項結果決定於我們採用的是簡式（compact）或展開式。同理 $\int y\,dx$ 的指令等於

$$1/4(2+x)^4$$

爲其不定積分（沒有積分常數），或定積分如果提供必須的上下限（有自然的也可以用符號代替數值）。

矩陣計算

如果矩陣的元素是數值或符號，此套裝軟體可以執行標準的矩陣運算，也就是矩陣的加法、減法、乘法、矩陣的轉換、行列式、和反矩陣運算，也可做以上各種適當的組合運算。

代數方程組和微分方程組的符號解

有些處理器能解方程組，例如，聯立線性方程式或解二次方程式 $y=ax^2+bx+c$，把它的兩根以 a,b,c 表示，或解微分方程例 $dy/dx=y-x$。

自動畫圖

有些處理器有自動畫圖的能力，例如，y 爲一個或多個 x 函數的圖形，此外也可畫“三維空間”和參數式的圖形。

上述所舉的功能只是要指出一般電腦代數處理器所提供的功能，任何一個特殊的處理器都有一組功能與其他處理器或多或少不同，它所設計的環境視機器而定。

雖然目前市場上有二種PC電腦套裝軟體，叫Mumath和Derive，但是他們並非一定優於其他處理器，Mumath十年前爲了8位元電腦，像蘋果Ⅱ號所設計的，但是可以成功的適應到PC微電腦上，它被用於美國各大學的微積分教學上，而且大約在1985年澳洲有一計畫用它於各初、高中的數學教學上，除了上述所提的功能外，它也有向量

功能，包括了向量微積分處理，極限和求和等例如：

$$\lim_{x \to 0} \sin(x)/x = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1/2\, n(n+1)$$

另一方面，Mumath的因式分解功能很有限，而且有些種類的不定積分無法解出，但是Mumath 在臺北的一些軟體商店可以買到，價格也不貴。

Derive 是最近專為PC型電腦發展出的處理器，它提供吸引人的色彩和圖形（必須有彩色螢幕），而且以選單方式運作和現在許多軟體一樣。它的積分和因式分解的能力特別強，而且畫圖能力也強，例如一個人先畫出一些曲線，然後把曲線與X軸交點的鄰近區域放大，後移動游標到曲線與X軸相交點的位置，可讀出游標所在點的座標，也就是原方程式的解，上述利用畫圖的方法以求出方程式的解。Derive 目前在臺灣尚未上市，但可以向美國或其他地方訂購，價格適當。

“第二波的改革是科學計算已來臨”這戲劇性的敍述是由一群在北美地區學習教育應用包含電腦代數或符號計算等人士所說的，根據他們的結論，大多數在中學或大學的數學課程將受到電腦代數深遠的影響。雖然就使用電腦代數的方法論而言尚未明確，但是很明顯的，除了提供例行性的符號方式訓練外，電腦代數能大大的加強且豐富數學的教學，可以下面例子說明：

- 當做一個數學的新發現的工具。
- 可擴展學習例子的範圍。
- 因為它自然的符號，其程式設計環境適合於數學。
- 強調不同數學表示法的內部相互關係。
- 幫助一個準備或檢查教學例子。
- 可提升系統化取向的概念上和演算法上發展。

我們很容易認知數學或物理上的代數式的意義，特別是在美麗的視覺影像圖形表示之下，能使得符號計算在物理和電機上變成一種強而有力的教學工具，我們如何利用這個工具來改進我們的數學教學呢？雖然這方法仍然在發展中，但是我們正在試驗由這些有力的處理器中所找出的最好方法。

當然，電腦代數的應用在物理學和電機學上是非常明顯的，一些處理器已經特別被物理學家所發展，用以解決特定形式的物理問題。例如，在一般相關性和天體的機器上，在後者的應用上，我們會提到一位法國應用數學家Delaunay，在1850～1870年間

專職從事於計算月亮在太陽、地球或其他星球的重力場內的運行，現在，同樣的計算包含了數千項，在微電腦上只需15分鐘，而且鮮少誤差，而且沒有Delaunay當時沒發現的小誤差。在工業上的例子，我們會考慮處理器（語言）叫做Altran在20年前由美國貝爾電話實驗室中發展出來的，特別用於解決電子機械上的問題。

總而言之，電腦代數的應用正廣泛的增加，因爲處理器已達可使用狀況而且電腦的使用也愈便宜，任何一個教育系統如果拒絕考慮這有力的計算方式的存在，就無法爲他們的學生的未來做準備。就像目前我們會很自然的以電算器來做計算，同理，我們將也會很自然的運用桌上型電腦來處理代數和其他數學。事實上，在美國一家公司已上市了一種電算器不僅包含了科學功能的數值，而且還有代數能力，甚至於比我們上面提及的那些處理器價格還要便宜，如果臺灣希望爲它的青年們準備從事於基本工業技術，這能增加這個國家未來的繁榮，則必需現在就考慮到在中等教育以上的電腦代數角色。電腦硬體、軟體的必需配備，目前已可以使用（雖然它們仍不斷的在改進中），接下來主要的工作是在學院或大學中訓練師資，如此才能使他們對電腦代數的知識和經驗傳授給他們的學生。在其他國家（如日本）教育當局非常注意在數學和科學上的教學符號計算的潛力價值。另外，我曾提到在澳洲的例子，也有部分的進展，在Linz大學任教的一位數學和電腦教授，他積極的發展電腦代數和演算法（不僅我感興趣上的應用），如果臺灣希望維持競爭力，那麼這個國家就必須跨出這一步，引進這個知識和代數計算的能力，它就像數值計算一般重要，它應推行到各學校裏及年青人的心中，他們會獲益更多。