

小題大作—— 談一則最短路徑問題

鄭再添

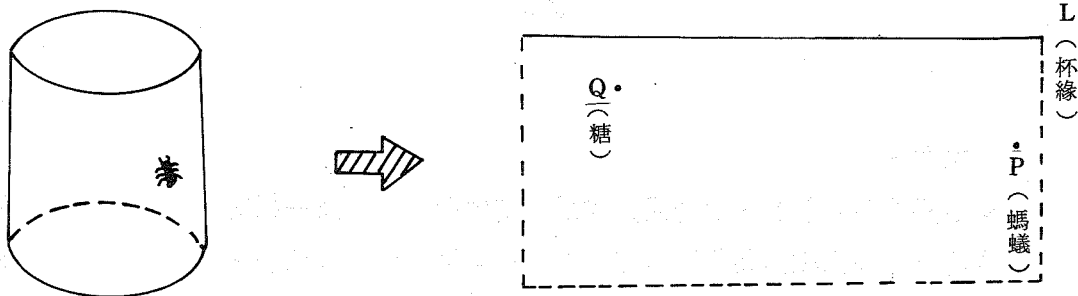
臺北縣立永和國中

一、前言：

在坊間有關趣味數學的書裡，常可以看到類似於這樣的問題——

在一個圓筒型的杯子內壁有一粒糖，杯外壁上的一隻螞蟥嗅到了糖味，急欲前往大飽口福一番；請您幫個小忙，替它找出最短路徑，期能早早達成願望。

將問題數學化後，顯然同義於：找已知直線 L 上一點 S ，使得 S 與線外兩點 P 、 Q 的距離和 $\overline{PS} + \overline{QS}$ 為最小（參見圖一）。



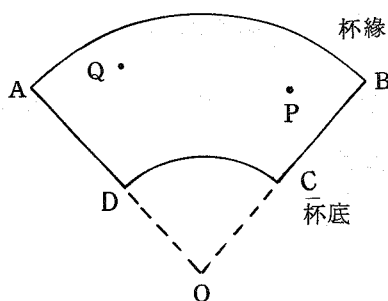
圖一

對國中生來說，這是一則極佳的“應用問題”，可以從中領略一些使用數學解題的意義及趣味，筆者不揣淺陋，曾在“科學研習”月刊第二十五卷第五期以“替螞蟻帶路”為題引介給學生。但如果將問題略作改變：若杯子不是圓筒型的，而是杯口比杯底大些的一般玻璃杯樣式；則問題的難度倏然增強許多，本文嚐試就此提出一點見解，尚祈方家不吝斧正。

二、本文：

(一) 問題數學化——

若考慮將杯子的側面在桌面滾一圈，則可得如（圖二）所示的展面，問題即演變成：如何在 $\widehat{AB}$ 上找一點R，使得 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 的值為最小？直線換成圓弧，使問題躍進另一個奇妙的幾個領域裡：



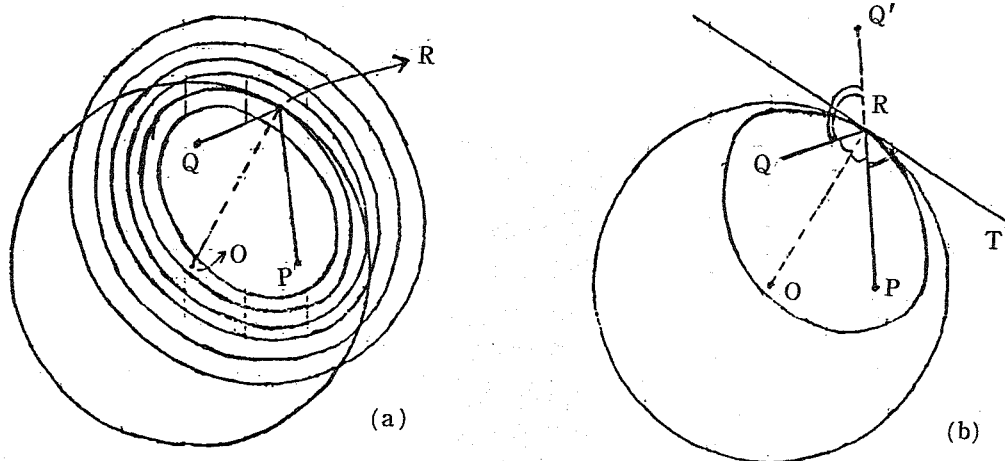
圖二

(二) 以橢圓處理——

與兩定點（焦點）P、Q的距離和為定值的所有點構成一橢圓。這是大家所熟知的。若考慮對P、Q兩點作共焦點的橢圓系，則可將整個平面佈滿，且其中任兩橢圓皆不相交，而必可找到一個橢圓恰與 $\widehat{AB}$ 相切！參見（圖三）說明：

事實上，這個切點R正是問題的解答。設 $\overline{PR} + \overline{QR} = K$ ，對 $K_1 < K$ 所決定的橢圓而言，都未與圓弧 $\widehat{AB}$ 相交，和本旨無關，不予考慮；對 $K_2 > K$ 所決定的橢圓來說，和 $\widehat{AB}$ 的交點 R_1 、 R_2 都有 $\overline{PR}_1 + \overline{QR}_1 = \overline{PR}_2 + \overline{QR}_2 = K_2 > K$ ，自然不是答案。

換句話說， $\widehat{AB}$ 上R以外的點R'，都應是對應於某一 K' 值所決定的橢圓與 $\widehat{AB}$ 的交點，而 $\overline{PR'} + \overline{QR'} = K' > K$ ，因此可知：R點即為所求。



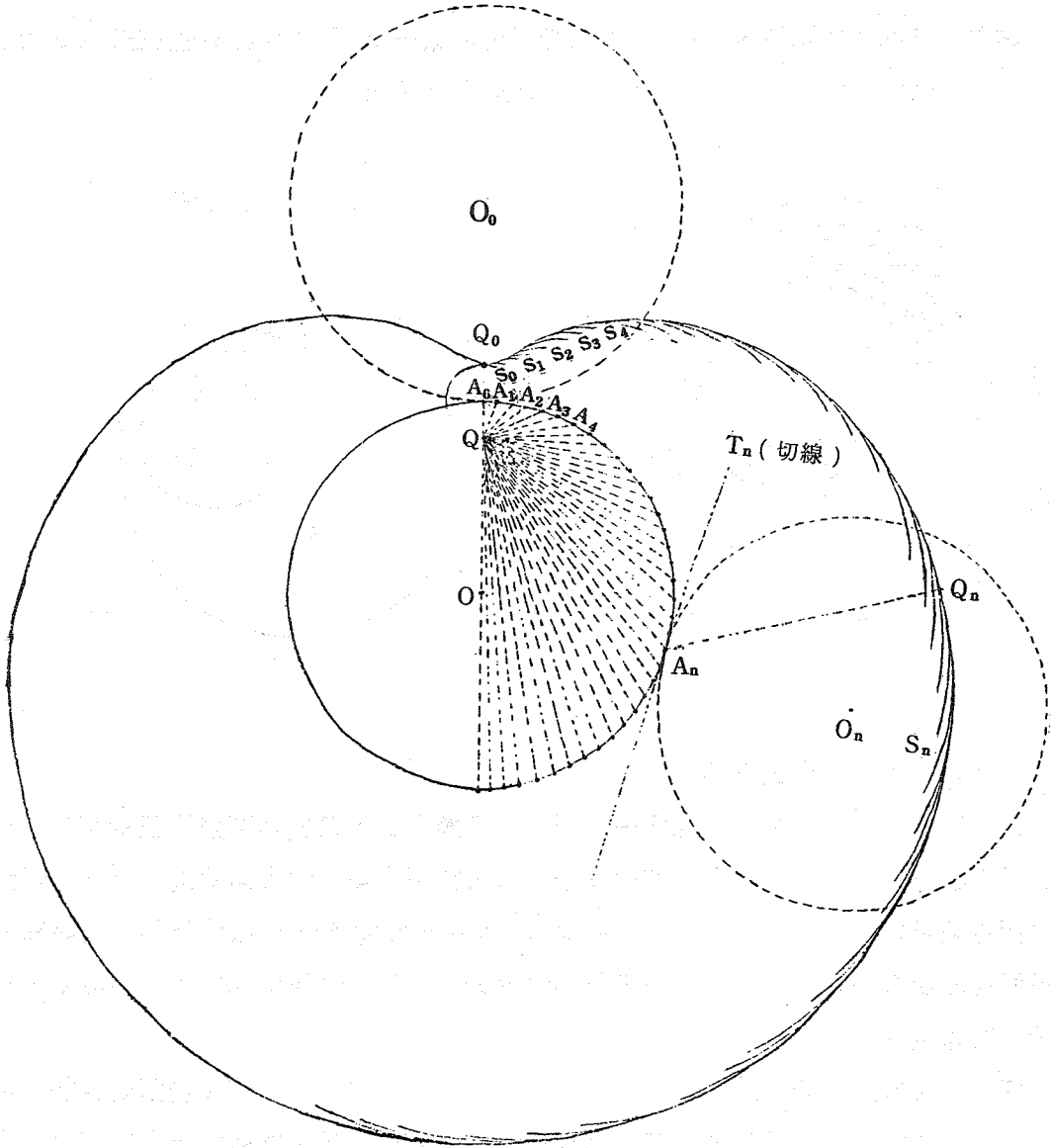
圖三

(三) 以鏡面反射的觀點看問題——

在直線的情形中，若將L視為一鏡面，則螞蟻（P）只要透過鏡子正對著糖（Q）的影子（Q'）走去，等到了L（杯緣）上，再直往糖（Q）的方向前進，即是最短路徑。這個道理可以推廣到圓弧的情形。如果 $\widehat{AB}$ 也是一面鏡子——我們不妨將它視為無數個平面鏡的組合——經由圓弧上一點所作的反射作用，即形同對此點上的切線（——平面鏡）所產生者！

經由上述體認，問題的答案可以“直觀”方式描述如下：將杯子側面展開後，視杯緣為一道圓面鏡，則螞蟻只要在鏡子裡找糖的一次鏡射影像，直向這個目標前進，至碰到鏡面（即抵達杯緣）後，轉向（即翻過杯緣）糖的真實位置前進，所走的路徑應為最短。

圓內一點對圓面鏡所產生的一次鏡射影像呈如何情境呢？若取圓周上的細分點 A_0 、 A_1 、 A_2 …… A_n ……，分別以 A_1 為圓心， $\overline{A_1Q}$ 為半徑畫圓，可得一圓系，參見（圖四）所示。其中 S_1 為以 A_1 為圓心， $\overline{A_1Q}$ 為半徑所作的圓弧；圓 O_n 則為圓O對應於 A_n 點所產生的影像（切線 T_n 為其鏡面）。由於圖形左右相對稱，故只畫出半面：

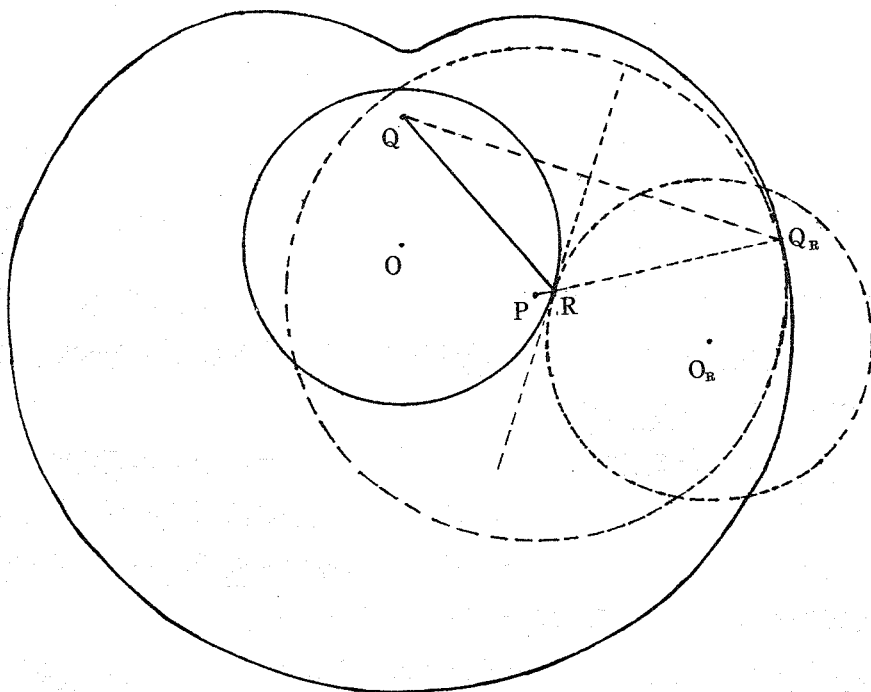


圖四

這個圓系的包絡線是屬何種曲線？就外形來看，似爲一“心臟線”。事實上，對於圓 O 內一點 Q ，可在圓 O 的影像圓 O_1 中找到它的對應點 Q_1 ，當圓 O_0 沿著圓 O 的圓周外緣轉一圈時，圓 O 內的 Q 的對應點 Q_0 即沿著包絡線的軌跡移動一週，這個運動的軌跡正是所謂的“外擺線”，可見上述的猜測當屬合理。在此若以解析方式處理，恐須透過微分方程的計算求取圓系的包絡線，離原意旨太遠，故不贅言。

經上述作圖結果顯示，原問題即在尋求：以 P 爲圓心，作圖圓心臟線相切所須的半

徑 $\overline{PQ_R}$ (Q_R 表 Q 點對應於圓 O_R 的影像)，參見 (圖五) 說明。有趣的是，在 Q 點對圓面鏡自轉一圈時，所看的一次鏡射的影像圍成一個心臟線 (鏡子可能重覆映射，故強調“一次鏡射”)。而就 P 點的位置對 $\widehat{AB}$ 內找 Q 的影像時，應只有 Q_R 是可以看到的！



圖五

三、結語：

本文純就數學趣味性借題發揮，對於圓面鏡的反射作用無從證實，甚至對重覆映射的可能結果略而不談，尚請讀者諸公海涵。

就幾何作圖觀點來看，藉橢圓或心臟線來求取答案，都是不切實際的結論。因此，本文雖可確定以鏡面反射理解問題答案的方式可行，却以無能提出尺規作圖法求解為憾！筆者謹就此請益學界先進，盼望大家多多指教。

四、參考書籍

1. 數學是什麼 (吳英格等譯，徐氏基金會出版)
2. 數學趣談 (九章數學叢書)