由學生做專題研究到剪貼和電腦教學

易道澄

國立高雄師範學院數學系

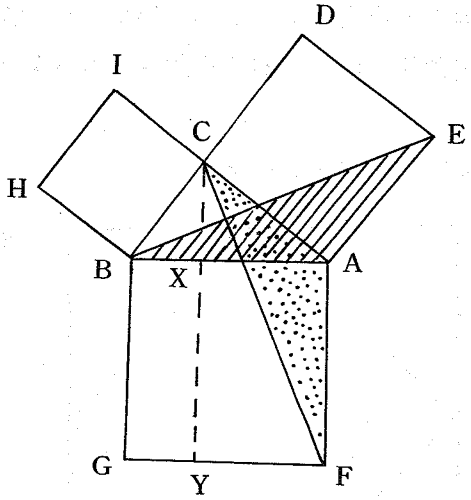
在教學原則上的信條是學生可以吸收10％由聽，20％由看，50％由讀，90％由做。這就是說，做老師的要多採用動的教學方式而取代靜的教學方式，不要一味只是用說教式自己從頭講到尾的教法，應該要叫學生多說、多想、多做，只有耳到是不夠的，我們要學生的口到、心到及手到。以學生爲中心，老師做指導角色（resource person）的教學才是健全與有效的。學生的課堂作業，黑板作業，專題研究（在國外，大家稱之爲“Project”）及討論式的講解，都是很好的方式。在美加的中學，甚至小學，學生都常有作Project的機會，一般是分組的Project，學生可以利用課內時間，由老師輔導，到圖書舘收集資料，再做分析、歸納與發揮的工作，而提出一個完整的專題研究報告（Project），一個Project要讓學生有充分的時間去完成，他們可以學到很多做學問必備的方法與態度，又可以使學生養成合作的精神，做到動腦動手的學習方法，可是在我們臺灣的學生，可能這種學習機會早已被升學主義剝削無餘，事實上，我們做老師的還是可以在這升學壓力下，要學生做一些小的Project。在數學科方面，Project的題目適合於中小學程度的當然不如其他學科方面那麼多，但是只要老師們多費一點功夫，就可以找到很好的題材，譬如，當我們教完一單元，可叫學生做“單元總括”的Project。在報告中，應該包括概念、例題、類題、問題分類、攻題要領以及其應用。現在讓我們來看看如何利用「畢氏定理」（Pythagoras Theorem）作爲學生做數學Project的題材。從而涉及剪貼與電腦教學。

1. 學生可以到圖書舘找到畢氏定理的歷史資料，其實中國早就有了這定理，叫勾股弦定理。

2. 學生可以涉獵各種畢氏定理的證法。

(a) 傳統的證法——學生可以提出相似形或面積的各種傳統證法。

(b) 修正面積證法——在美加的中學數學是引用 transformation 的平移或轉移（ isometry ）來證明全等形，不一定要使用SAS、SSS、或ASA。



圖一

例如：

如要證明△ABE ≅△AFC，可以剪一個△ABE在硬塑膠片上，固定A點，依順時針方向轉九十度，則　　B→F　，　E→C　，　A→A

如此硬片上的△ABE就蓋滿了△AFC

故有　　　　　△ABE ≅△AFC

（在 transformation geometry 中，只要說明如何轉動或移動而使兩形重合，即爲全等，剪塊片是在使學生動手來學習，也可增加學習的興趣）。

現有　　$\triangle ABE = \triangle ACE = \frac{1}{2}\square ACDE$

及　　$\triangle AFC = \triangle AFX = \frac{1}{2}\square AXYF$

故　　$\square ACDE = \square AXYF$

同理　　$\square BCIH = \square BXYG$

故　　$\square ACDE + \square BCIH = \square ABGF$

$\therefore \quad b^2 + a^2 = c^2$

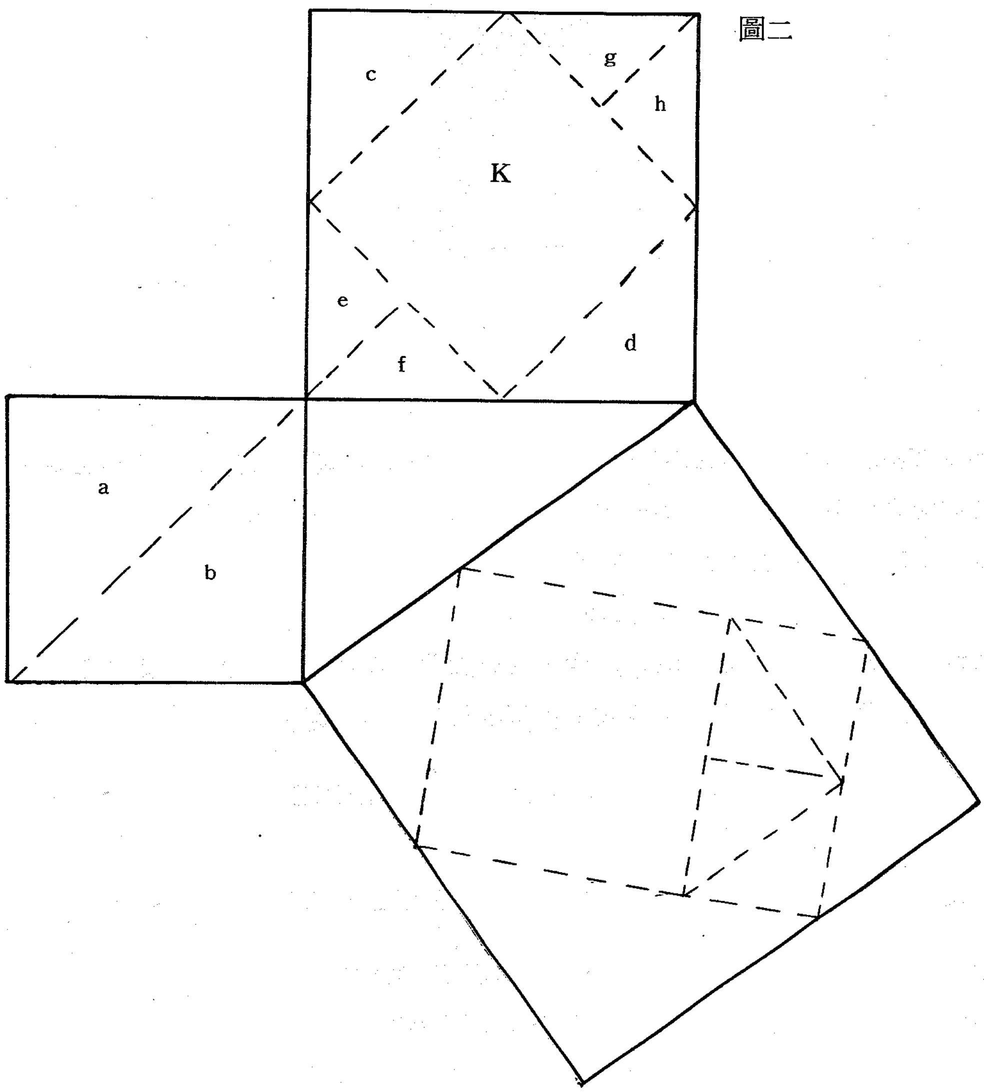
(c) 剪裁與拼塊的證法——這是一個學生自己動手證法，其步驟如下：

第一步：在一張大的白紙上，準確地作一個直角三角形其三邊成3：4：5的比，並於三邊上向外作三個正方形。

第二步：在二個小的正方形上依下圖所示，作虛線來分割這二個正方形。

第三步：用顏色紙或硬片，沿虛線剪下小片a、b、c、d、e、f、g、h及k。

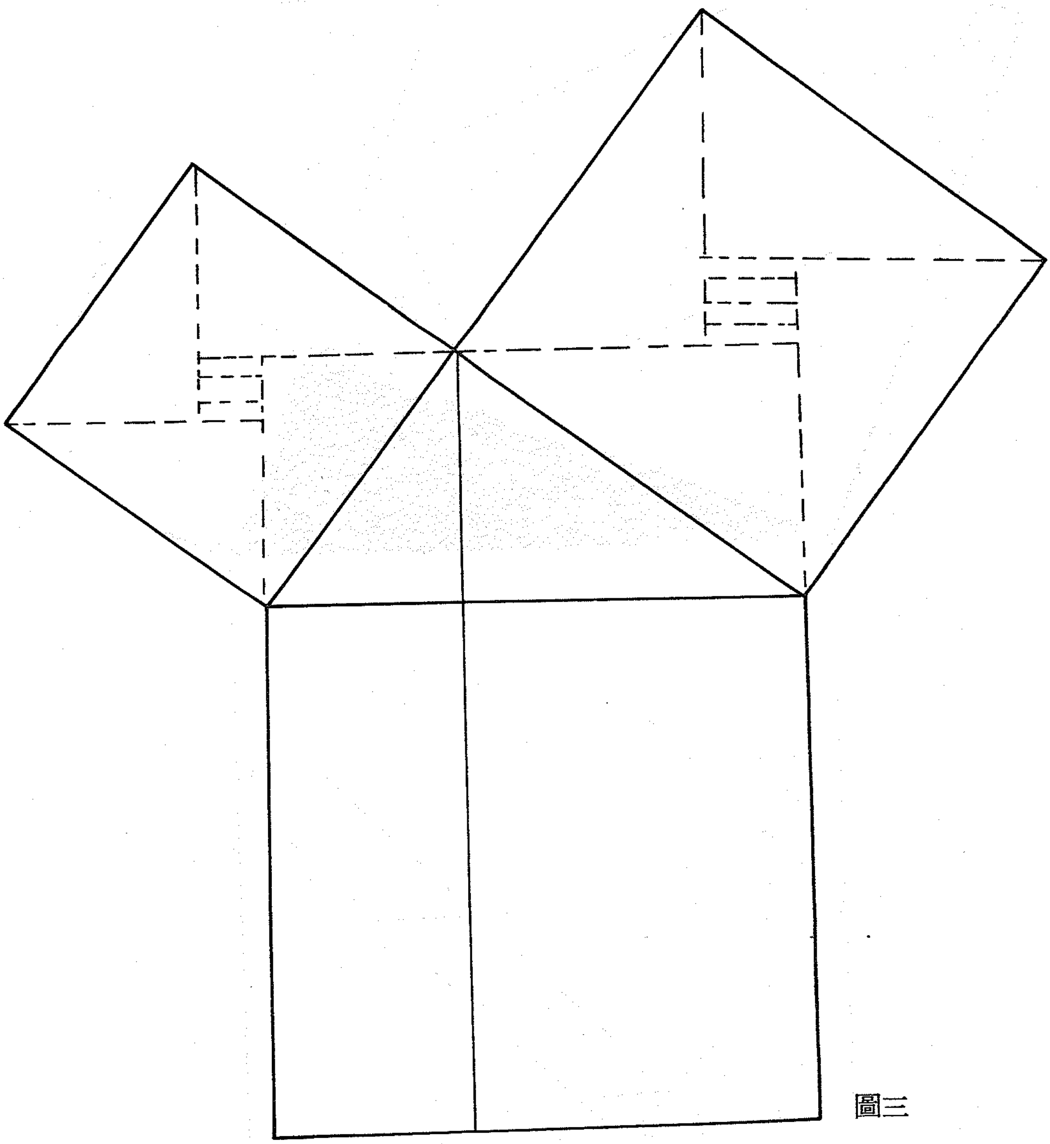
第四步：用這些小片正好蓋滿大的正方形。



圖二

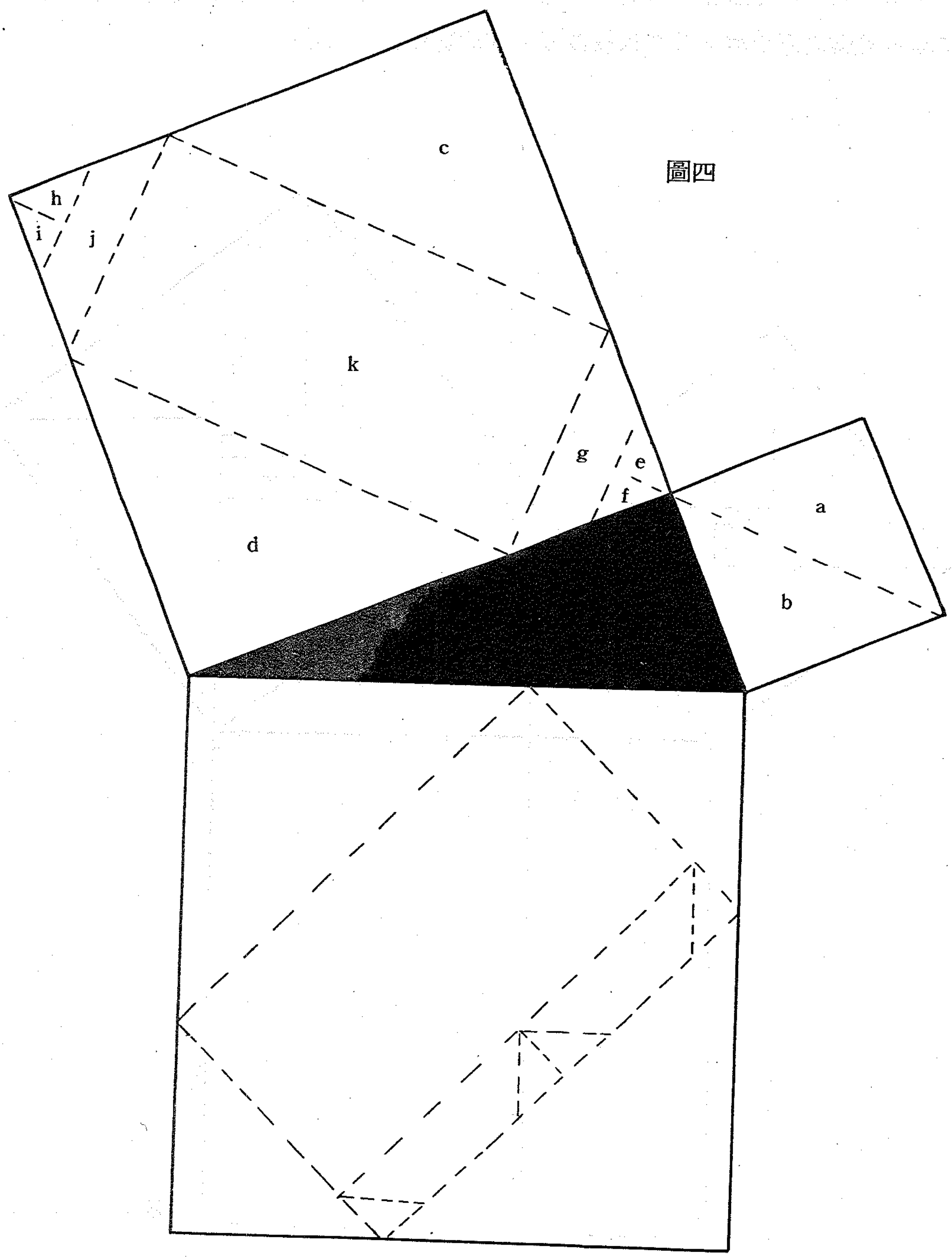
註：在大正方形上的虛線係供教師參考。

上面所示只是一種分割的方法，我們可以讓學生去發現其他的分割方法。例如，在圖三所示，我們用左邊正方形的小片剪下，却可蓋滿在大正方形上的左方矩形，而右邊小片却可蓋滿右方矩形。其實像做裁縫方式的剪法也可以接受。



圖三

如若作三邊比為5：12：13的三角形，其分割法見圖四。



圖四

註：大正方形上的虛線係供教師參考。

(d) 製作模型的證法

在加拿大安大略省的科學中心（Ontario Science Centre, Toronto, Canada）就有一個證明畢氏定理的模型，在一模型板上裝有三個纖維玻璃做成的正方形容器在一直角三角形三邊上，首先二個小正方形，裝滿了水，由於位置居上，水就慢慢地注入在斜邊上的大正方形容器內，恰好灌滿，然後模型板會自動倒放，水又由大正方形流返二小正方形內，如此反覆，證明了畢氏定理。我們也可以叫學生製造相似的模型，可以用鹽或砂來代替水。

(e) 用彩色塑膠板的證法

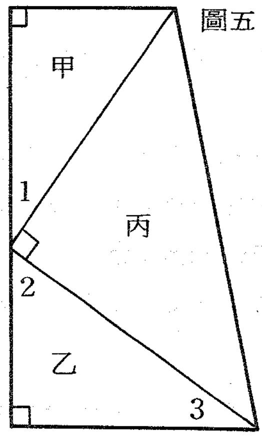
① 證法一

剪二個全等直角三角形甲與乙，令 a 、 b 為兩直角邊， c 為斜邊，再剪另一等腰直角三角形丙以 c 為兩直角邊。用這三小硬片拼成一個梯形（見圖五）。

故　　梯形面積＝△甲＋△乙＋△丙

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=2\left(\frac{1}{2}ab\right)+c^2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=c^2$$



圖五

註：嚴格說，我們要證拼塊成一梯形。證明如下：

$\because$ △甲≅△乙　$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$，但 $\angle 2+\angle 3=90^\circ$，$\angle 2+\angle 1=90^\circ$

$\therefore$ 那三塊拼成一梯形。

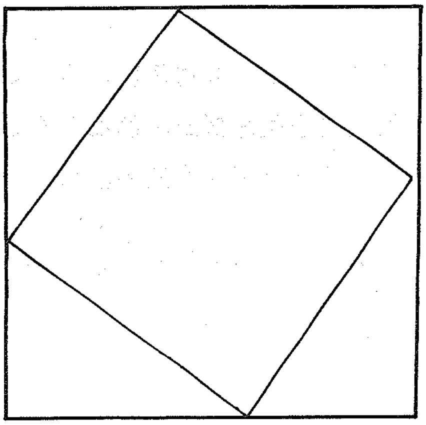
② 證法二

用 a，b 爲兩邊，c 爲斜邊，剪四個全等三角形，再用 c 爲邊剪一正方形，用這五小塊可以拼成一個大的正方形（其證法仿上）。如圖六所示，

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 = c^2$$

圖六



註：所有用剪貼方式的證法，都可製成掛圖，作爲佈置教室之用。

3. 學生可以使用電腦在畢氏定理相關問題上 —— 如何列舉畢氏三組數及互質畢氏三組數是非常古老與有趣的問題。如果三正整數 a、b、c 代表一個直角三角形的三邊，（a，b，c）則是畢氏三組數（Pythagoras Triples）。在其中，如果 a 爲奇數，b 爲偶數，而 a，b 互質，那麼（a，b，c）就叫做互質畢氏三組數（Primitive Pythagoras Triples）。

(a) 列舉所有畢氏三組數（a，b，c）其中斜邊 c 小於或等於一個定數 n（例如，$c \leq 30$）。

如果我們用手算，採取嘗試錯誤方式去做，那是很乏味和累人的，但是如果求助於電腦（甚至袖珍電算機 calculator 亦可），那就極爲方便和有效了。

現在讓我們來看電腦處理程序與概念：

輸入斜邊 c 的限制數 n。

電腦會試所有可能作爲斜邊 c 的數，從 5 試到 n，配合適當的 b 邊，從 1 試到 $c-1$。如果 $\sqrt{c^2-b^2}$ 是一正整數，電腦會取此數爲 a 而印出（a b c）。

現在讓我們來透視電腦的作業過程。

取 c	取 b	計算 $a=\sqrt{c^2-b^2}$	決定取捨	輸　　出
5	1	$\sqrt{24}$	捨	
5	2	$\sqrt{21}$	捨	
5	3	4	取	（4 3 5）
5	4	3	取	（3 4 5）
6	1	$\sqrt{35}$	捨	
…	…	…	…	
29	20	21	取	（21　20　29）
…	…	…	…	
30	29	$\sqrt{59}$	捨	

現在把這程序寫成電腦程式（用 IBM　PC或其他 Comparable　Computers）如下。

```
10 CLS
20 PRINT "        PYTHAGORAS TRIPLES        "
30 INPUT "  key in your largest hypotenuse n = ";N
40 F$= "######"
50 FOR C=2 TO N
60 FOR B=1 TO C-1
70 Y=SQR(C*C-B*B)
80 IF INT(Y)<>Y THEN 110 ELSE A=Y
90 IF A>B THEN 110
100 PRINT USING F$;A;B;C
110 NEXT B
120 NEXT C
130 END
```

經由 DOS 進入 BASICA，把上面程式鍵入機子上，然後 run，電腦就會執行如下：

Run

```
      PYTHAGORAS TRIPLES
key in your largest hypotenuse n = ? 30
    3       4      5
    6       8     10
    5      12     13
    9      12     15
    8      15     17
   12      16     20
   15      20     25
    7      24     25
   10      24     26
   20      21     29
   18      24     30
```

(b) 列舉互質畢氏三組數（a b c），最好使用現成公式 $a = m^2 - n^2$，$b = 2mn$，$c = m^2 + n^2$。此處m，n均爲正整數而且 $m > n$。用電腦把合於a，b互質的三組數列出，其概念與程序如下：

輸入m，n的限制數（例如 $m \leq 5$，$n \leq 4$）電腦會算出a，b，c同時捨掉a，b不互質的組，而印出其他合適的三組數。我們的人工機子（artificial machine）的透視如下。

取m	取n	算 $a = m^2 - n^2$	算 $b = 2mn$	算 $c = m^2 + n^2$	取捨	輸出
2	1	3	4	5	取	（3，4，5）
3	1	8	6	10	捨	
3	2	5	12	13	取	（5，12，13）
…	…	…	…	…	…	…

現在將此寫成程式如下，再run此Program，其結果如示。

```
10 CLS
20 PRINT "       Primitive  Pythagorus  Triples"
25 PRINT
30 PRINT "       a = m^2 - n^2   b=2mn      c=m^2 +n^2 "
35 PRINT
40 INPUT "Enter Your Largest m,n =";M,N
45 FOR X=1 TO 1000:NEXT X
47 CLS
48 PRINT "         m         n         a         b         c   "
50 FOR X=1 TO M:FOR Y=1 TO N
60 IF X<= Y THEN 110
70 A=X*X-Y*Y:B=2*X*Y:C=X*X+Y*Y
80 AA=A:BB=B:CC=C
90 GOSUB 500
97 F$="##########"
100 IF GCD = 1 THEN PRINT USING F$;X;Y;AA;BB;CC
110 NEXT Y:NEXT X
120 END
500 IF A>B THEN SWAP A,B
510 R=B MOD A
520 IF R<>0 THEN B=A:A=R:GOTO 510
530 GCD=A
540 RETURN
```

Run

```
        Primitive  Pythagorus  Triples

        a = m^2 - n^2   b=2mn      c=m^2 +n^2

Enter Your Largest m,n =? 5,5
         m         n         a         b         c
         2         1         3         4         5
         3         2         5        12        13
         4         1        15         8        17
         4         3         7        24        25
         5         2        21        20        29
         5         4         9        40        41
Ok
```

現在讓我們來利用那電腦所印出的三組數表，經觀察後，我們可以發現：

如　$b+c=5^2$　則有　$c-b=1^2$，$c-b=3^2$ 的三組數來配合。

如　$b+c=7^2$　則有　$c-b=1^2$，$c-b=3^2$ 及 $c-b=5^2$　來配合。

如此一來，我們可得到求互質三組數的另一種方法。

令　　$b+c=p^2$　　此 p 爲奇數

則　　$c-b=q^2$　　此 q 可爲任何小於 p 的奇數

故　$c=(p^2+q^2)/2$　，　$b=(p^2-q^2)/2$　，　$a=\sqrt{c^2-b^2}=pq$

如此（a，b，c）即爲互質三組數。

這樣我們可以在極短的時間內，用手算或 calculator 列出甚至數字極大的互質三組數。例如：

取 p^2 為和	配 q^2 為差	算 b , c	算 $a=\sqrt{c^2-b^2}$	輸 出
$b+c=35^2$	$c-b=1^2$	612,613	35	(35,612,613)
$b+c=123^2$	$c-b=3^2$	7560,7569	369	(369,7560,7569)

現在將此寫成程式，再 run，其結果如示。

```
10 CLS
20 PRINT "   Primitive Pythagoras Triples"
30 PRINT:PRINT
40 INPUT "   enter your largest odd number k = ";K
50 PRINT :PRINT USING "\        \";"      a";"      b";"      c"
60 FOR P=3 TO K STEP 2
70 FOR Q = 1 TO P-2 STEP 2
80 C=(P*P+Q*Q)/2:B=(P*P-Q*Q)/2:A=SQR(C*C-B*B)
90 PRINT USING "########";A;B;C
100 NEXT Q
110 NEXT P
120 END
```

Run

```
    Primitive Pythagoras Triples


    enter your largest odd number k = ? 11

       a        b        c
       3        4        5
       5       12       13
      15        8       17
       7       24       25
      21       20       29
      35       12       37
       9       40       41
      27       36       45
      45       28       53
      63       16       65
      11       60       61
      33       56       65
      55       48       73
      77       36       85
      99       20      101
Ok
```

觀察由電腦所列出的畢氏三組數表，我們發現在任一三組數中，其中必有一數為 5 的倍數。

現在我們可以利用前得的結果來證明。

$$b = (p - q)(p + q)/2$$

$$c = (p^2 + q^2)/2$$

$$a = pq \qquad \text{此處 } p\text{，}q \text{ 均爲奇數}$$

如 p 或 q 中，有一爲 5 的倍數，則 a 爲 5 的倍數。如此 p 及 q 各有下列的四種選擇：

	p	q
(A)	10K+1	10W+1
(B)	10K+3	10W+3
(C)	10K+7	10W+7
(D)	10K+9	10W+9

在此，(p , q) 的配合情形共 16 種。

① 如 (p , q) 選 (A , A) (B , B) (C , C) (D , D) 的情形，則

$$p - q = (10K + 1) - (10W + 1)$$

$$= 10(K - W) = 5\text{的倍數} \qquad \therefore\ b\text{爲}5\text{的倍數}$$

② 如 (p , q) 選 (A , D) (B , C) (C , B) (D , A) 的情形，則 $p + q$ 是 5 的倍數，故 b 爲 5 的倍數。

③ 如 (p , q) 選 (A , B) (A , C) (B , A) (B , D) (C , A) (C , D) (D , B) (D , C) 的情形，則 $p^2 + q^2$ 爲 5 的倍數，故 c 爲 5 的倍數。

現在可以讓學生自己發揮，試解下列問題：

Q 1　試證任一互質畢氏三組數中，必有一數爲 3 的倍數。

Q 2　寫出一電腦程式來列舉十組互質畢氏三組數，其中二數的差爲 1。

例如 (11 , 60 , 61)

4. 學生常有奇異的想法，是否有滿足 $x^3 + y^3 = z^3$ 的三組數存在？其答案是否定的，這就是那有名的 Fermat Impossibility Theorem，學生可以去參閱數學文獻，了解其歷史來源。

但是我們可以找到三組數 (x , y , z) 滿足 $x^2 - y^2 = z^3$，此處 x , y , z 爲正整數。

令 $z = a$ 爲任一已知正整數而 $a > 1$

$$(x - y)(x + y) = a^3$$

$$\therefore \begin{cases} x - y = a \\ x + y = a^2 \end{cases}$$

故

$$x = a(a+1)/2 = (\text{正整數})$$

$$y = a(a-1)/2 = (\text{正整數})$$

現在可以讓學生寫一程式，舉出所有三組數。

① (x, y, z)滿足$x^2 - y^2 = z^2$而$z \leq 30$，x，y及z均為正整數。

② (x, y, z)滿足$x^3 + y^4 = z^5$而$z \leq 100$，x，y及z均為正整數。

我們可以讓學生用電腦來展示古老的Fermat-Euler質數定理。任何$4n+1$形的質數均能用兩數平方和唯一地表出。

總之，畢氏定理是一個給學生做 project 的好題材。

參考書目

1. Mathematical Quickies——Charles Trigg，大學出版社。
2. 100 Great Problems of Elementary Mathematics——Heinrich Dörrie，凡異出版社。