

質點運動力學系統CAI 之電腦模擬繪圖

高勝進 李輝濱

嘉義市私立輔仁高級中學

一、前 言

美國 IBM 公司與 Annerberg 共同策劃開發的地球行星影集，已由教育部委託科教中心統一製作成七部十五集之錄影卡帶全集，完整送交省市各公私立高中學校，作為推動地球科學教學的輔助視聽教材。其內容生動優美，解說深入淺出，製作之精良，甚獲好評。尤其每一部影集中之電腦處理立體動態繪圖，剖析觀念，現象演示，更是翔實精細，令人嘆為觀止。於是我們想到利用設計電腦繪圖，針對高中物理教材內若干質點系統運動之章節，進行模擬繪製動態圖解。有鑑於多年來的物理教學經驗中，學生對質點運動現象的認識，似曾欠缺那一股生動的體驗，遂計劃利用現今之 PC 電腦繪圖來強化學生對質點運動的理解力。

質點系統動力學是物理學中的最基本架構。就初學者言，能學會對質點運動狀態的分析，無疑是促使其進入基礎物理學精緻堂奧的不二法門。然而對多數的中學生言，在物理課程中，對質點之運動現象亦僅止於想像中的模糊情況，而難得一見其運動之真實動態情境。在理想情況下，即不受各種阻力作用時，許多學生不懂（更確切地說是看不到）為何斜向拋射運動中，質點的水平運動狀態為等速度運動現象？而簡諧運動的解析，確可用等速率圓周運動的物體在其直徑上的投影來對應推導。雙星系統如何運動？克卜勒行星運動三大定律之現象如何顯現？等面積定律如何能在畫面上出現並求證？

作者希望藉着電腦繪圖之模擬，來消除學生們對上述問題之疑惑，並由實際操作繪圖，更而加深觀念之正確性，以模擬真實現象使學生思考更加深入問題核心，從而獲得更多的智慧與創造力。

二、本 文

以下正文中的研究過程，我們以 BASIC 基本程式配合彗星一號，ETBASIC，及適當的數學處理，自行綜合應用分析，設計研究出下列之新建電腦模擬繪圖程式檔案，計有：

- (一) 斜向拋射運動
- (二) 水平拋射運動與自由落體之比較
- (三) 簡諧運動與圓周運動之比較
- (四) 雙星運動
- (五) 自由落體運動
- (六) 等加（減）速度運動
- (七) 克卜勒行星第三運動定律
- (八) 克卜勒行星第一、二運動定律

我們將上述之八項功能合併入一命名為 PHIGRA·BAS 的檔案中，並將各質點運動之模擬繪圖建成一功能表，使用者只要按照畫面顯示之指示步驟操作，即可一覽本程式之各項功能。

現在我們將詳細地介紹本程式的各項操作方法。

A. 開機程序：（為求廣泛起見，本程式的設計是以 PC XT 之機種而寫的，若使用者擁有的是 PC AT 機種，僅需修改速度即可）。

自備軟體磁片：倚天中文飛碟二號

MS-DOS（2.0 以上版本）

ETBASIC（載有 PHIGRA·BAS 檔）

(1) 先以 DOS 開機，在出現 A> 之後將 DOS 取出。

(2) 將倚天中文系統磁片置入 A 磁碟機，倚天中文 16 × 16 字型片置入 B 磁碟機，在 A> 下鍵入 AUTOEXEC（自動執行檔），約 30 秒後，螢幕上會顯示“倚天中文鍵盤轉換程式”之畫面。經由此螢幕，選擇您所熟悉的注音排列方程，待選定後螢幕將產生如下的訊息：“===== 鍵盤注音符號排列方式轉換成功 =====”。

(3) 取出 A 磁碟機中之系統磁片，置入 ETBASIC 磁片，在 A> 下鍵入本檔案名稱 PHIGRA，即可進入本檔電腦模擬繪圖操作系統。

B. 功能選擇

當開機成功後，螢幕出現本系統的第一個畫面“功能選擇表”，如下圖(一)

功 能 選 擇 表

1. 斜向拋射運動
2. 水平拋射運動與自由落體之比較
3. 簡諧運動與圓週運動之比較
4. 雙星運動
5. 自由落體運動
6. 等加(減)速運動
7. 克卜勒第三定律
8. 克卜勒第一、二定律
9. 結束

請輸入選擇項目:

表下一列要求您輸入一選擇項目，請由數目鍵鍵入 1，選取斜向拋射運動。若輸入錯誤（即 1 至 9 的九個數目字之外），螢幕會出現如右的訊息：“請按任一鍵回至主功能表”。

(一) 斜向拋射運動：

當輸入 1 後，畫面上即出現“斜向拋射運動原理說明”，此段說明之後即開始進入繪圖階段。按任一鍵後，螢幕左上角即顯示出您所要繪圖的拋射初速，輸入一個數值後，接着顯示出拋射角度，您可輸入幾個角度，最後再輸入 -1。終止輸入。此刻螢幕再顯示“是否有印表機？”如下圖

```

斜向拋射初速(m/sec):40
斜向拋射角度(度):15
斜向拋射角度(度):30
斜向拋射角度(度):45
斜向拋射角度(度):60
斜向拋射角度(度):75
斜向拋射角度(度):-1
是否有印表機 (Y/N)? N
  
```

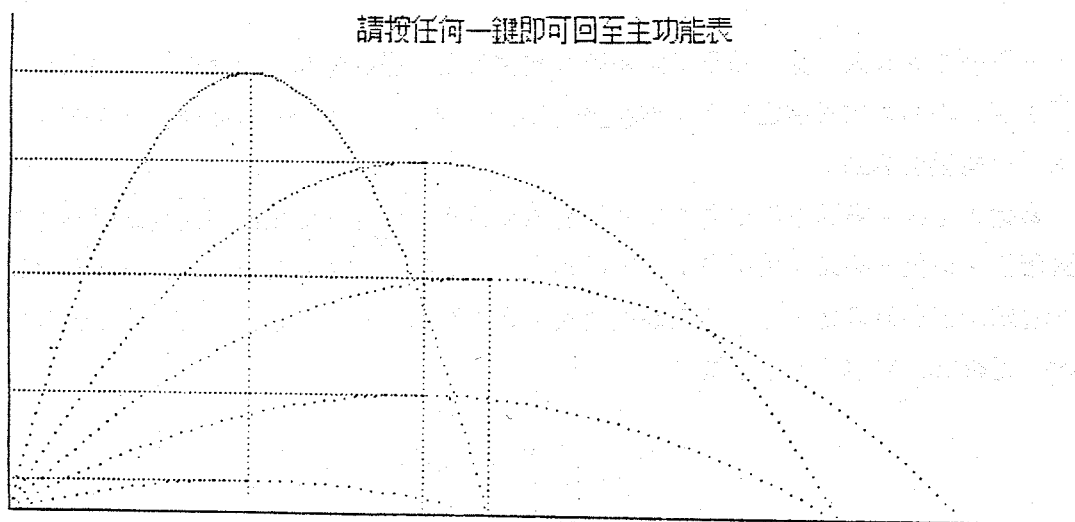
若選 N，則出現如下之畫面。若選 Y，則下列之畫面由列表機印出

斜向拋射初速: 40 公尺/秒

角 度(度)	飛行時間(秒)	最高高度(公尺)	水平最大距離(公尺)
15	2.11281	5.46835	81.63266
30	4.08163	20.40817	141.39190
45	5.77230	40.81633	163.26530
60	7.06960	61.22451	141.39190
75	7.88511	76.16431	81.63264

請按任何一鍵即進入繪圖模式!!

按任一鍵，畫面開始作圖，此繪圖是動態的按序繪製，最後靜止的畫面如下圖：



詳細看完圖後，再按任一鍵回至主功能表。

(二) 水平拋射運動與自由落體之比較：

當功能表上選擇 2 時，畫面上出現“水平拋射運動原理之說明”，閱完說明後，即進入繪圖階段。

輸入 (1)水平拋射高度 (最大值為 140)

(2)水平拋射初速

鍵入幾個初速數值後，再輸入 - 1，即開始執行繪圖程式。首先出現之畫面如下圖：

高度(公尺):100
 水平拋射初速(m/sec):10
 水平拋射初速(m/sec):20
 水平拋射初速(m/sec):30
 水平拋射初速(m/sec):40
 水平拋射初速(m/sec):-1
 是否有印表機 (Y/N) ? N

若選 N，則出現下圖畫面。若選 Y，則下列畫面由列表機印出。

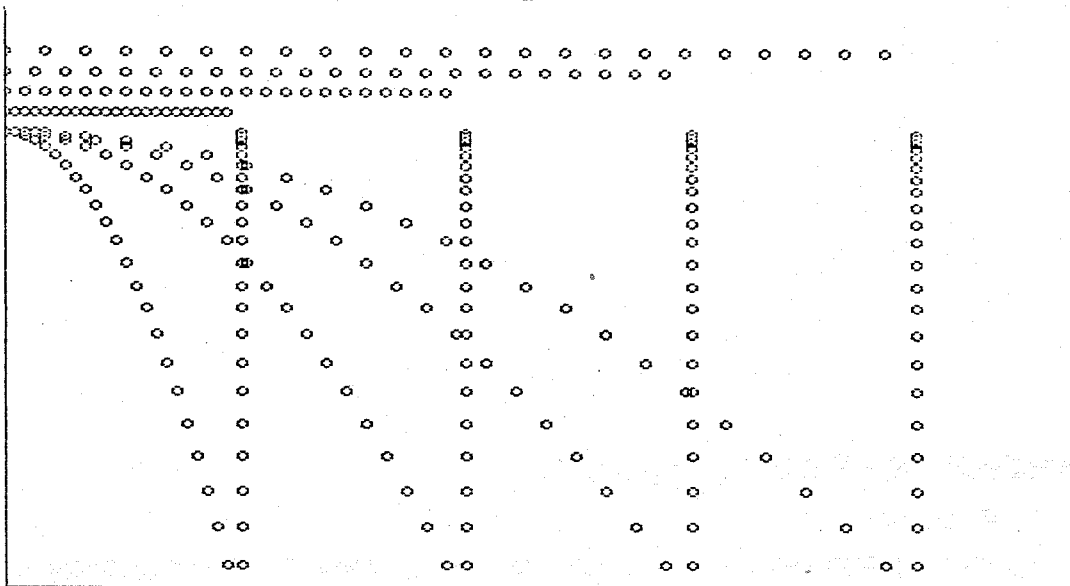
高度 100 公尺

初速(公尺/秒) 飛行時間(秒) 水平最大距離(公尺) 落地瞬間之角度

10	4.51754	45.17540	77.272
20	4.51754	90.35079	65.689
30	4.51754	135.52620	55.877
40	4.51754	180.70160	47.902

再按任一鍵即看出動態的繪圖畫面，最後靜止如下圖：

請按任何一鍵即可回至主功能表



詳細看完圖後，再按任一鍵回至主功能表。

(三) 簡諧運動與圓周運動之比較：

當功能表上選擇 3 時，畫面上出現“簡諧運動與圓周運動之比較說明”，之後進入繪圖階段。輸入

(1) 打點時間間隔（即螢幕上亮點出現之時距，如 0.01）。

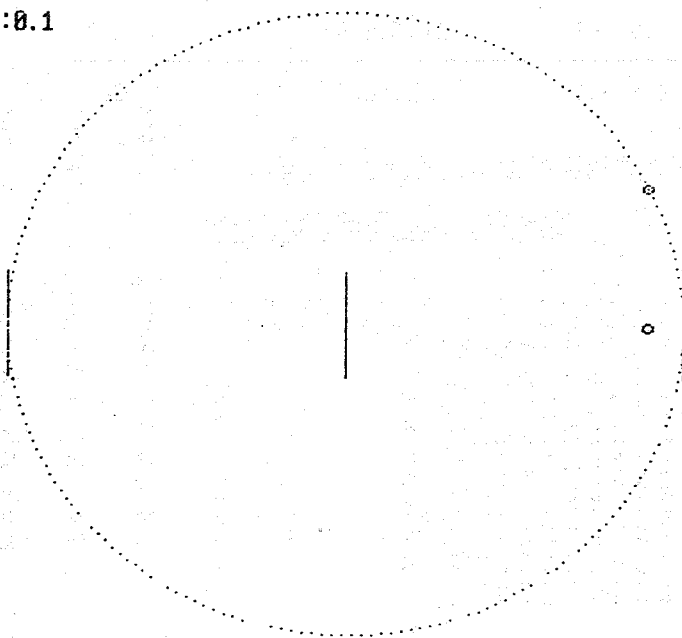
(2) 振幅（即圓周運動之半徑，範圍在 200 以內）

鍵入後，即看到畫面上出現動態之兩運動軌跡，若按 S 鍵即可靜止畫面，再按一次 S 鍵又恢復動態畫面，如此可連續執行靜止、動態畫面交互顯現的程序，隨時比較兩運動水平軌跡的同步現象。下圖即為某一瞬間之畫面：（圖中可看出 S.H.M. 的運動軌跡是設定在圓周運動的水平直徑上）

請按任何一鍵繼續動態畫面

按 S：畫面靜止
按 R：回主功能表

打點時間間隔：0.1
振幅：200



詳細看完圖示後，按 R 鍵即又回到主功能表。

(四) 雙星運動：

主功能表上選擇 4 時，畫面上即出現“雙星運動原理說明”，閱完說明後即進入繪圖階段。

輸入

(1) 雙星質量 M_1 , M_2 (質量比不超過 100) 。

(2) 雙星距離 R 。

畫面上隨即出現雙星運動之動態軌跡圖，有大小雙星之位置，質心位置以 + 顯示。並於左下角顯示出 M_1 , M_2 , R 和質心距 A 星距離 R_1 , 雙星繞轉周期等文字數字字幕，以下為一瞬間圖示：（本圖為地球與月球互為雙星繞轉的一實例模擬，由此圖可看出質心在地球內部）

星球 A 質量 (Kg)

5.98E+24

星球 B 質量 (Kg)

7.43E+22

雙星距離 (m)

3.85E+08

質心與 A 星之距離 (m)

4724824

週 期 (天)

27.33773

按 R : 回主功能表

星球 A 質量 (Kg)

5.98E+24

星球 B 質量 (Kg)

7.43E+22

雙星距離 (m)

3.85E+08

質心與 A 星之距離 (m)

4724824

週 期 (天)

27.33773

詳細看完圖示後，按 R 鍵回至主功能表。

(五) 自由落體運動：

主功能表上選擇 5 時，畫面上出現“自由落體運動原理說明”，後即進入本程式繪圖階段。

輸入——落體之初始高度 H (高度最大限制為 85) 執行繪圖程式時，畫面即顯示出自由落體運動之動態及各項數據資料圖，如下所示：（本圖左列表為自由落體經過的時距，下落之位移，每一時刻之瞬間落體速率）。

高度(公尺):85

時間(秒) 下落距離(公尺) 瞬時速率(公尺/秒)

0.0000	0.0000	0.0000
0.4000	0.7840	3.9200
0.8000	3.1360	7.8400
1.2000	7.0560	11.7600
1.6000	12.5440	15.6800
2.0000	19.6000	19.6000
2.4000	28.2240	23.5200
2.8000	38.4160	27.4400
3.2000	50.1760	31.3600
3.6000	63.5040	35.2800
4.0000	78.4000	39.2000
4.1650	85.0000	40.8167

按任何一鍵即回至主功能表

(六) 等加(減)速度運動:

主功能表上選擇 6 時, 畫面上出現原理說明後, 即進入繪圖階段。

初速(公尺/秒):10

加速度(公尺/秒平方):2

時間(秒) 位移(公尺) 瞬時速度(公尺/秒)

0	0.0000	10.0000
1	11.0000	12.0000
2	24.0000	14.0000
3	39.0000	16.0000
4	56.0000	18.0000
5	75.0000	20.0000
6	96.0000	22.0000
7	119.0000	24.0000
8	144.0000	26.0000
9	171.0000	28.0000

輸入 (1) 初速度正值 V_0 。

(2) 加速度值 a (正、負值皆可)。

當輸入的加速度值為負時，畫面上顯示出的等減速度軌跡動態圖的效果更佳。最後靜止畫面如上圖。圖示看完後，按任何鍵即回到主功能表。

(七) 克卜勒行星運動第三定律：

主功能表上選擇 7 時，畫面上出現“克卜勒第三定律說明”全文，閱讀完後即進入繪圖程式階段。

輸入：行星軌道半徑 R ($4.0E+10 < R < 8.0E+11$ ，如地球者為 $1.49E+11$ 而木星者為 $7.78E+11$)

因本畫面係將 R 值設定為以 $4.0E+10$ m 長作為一單位長度，始能符合太陽系之行星軌道相對位置，故輸入時應以公認值直接輸入，以模擬真實軌道定律之現象。最後須再鍵入 -1 值，始能進入繪圖程式。

畫面動態軌跡圖中，在下角顯示各行星在公轉太陽運行時，每一瞬間之圈數。可相互比較各行星週期之長短，及各相對位置。下圖是某瞬間之螢幕畫面：

半徑 $1.49E+11$ m
半徑 $7.78E+11$ m

週期 $3.14E+07$ sec
週期 $3.75E+08$ sec

公轉圈數
0.57
0.05

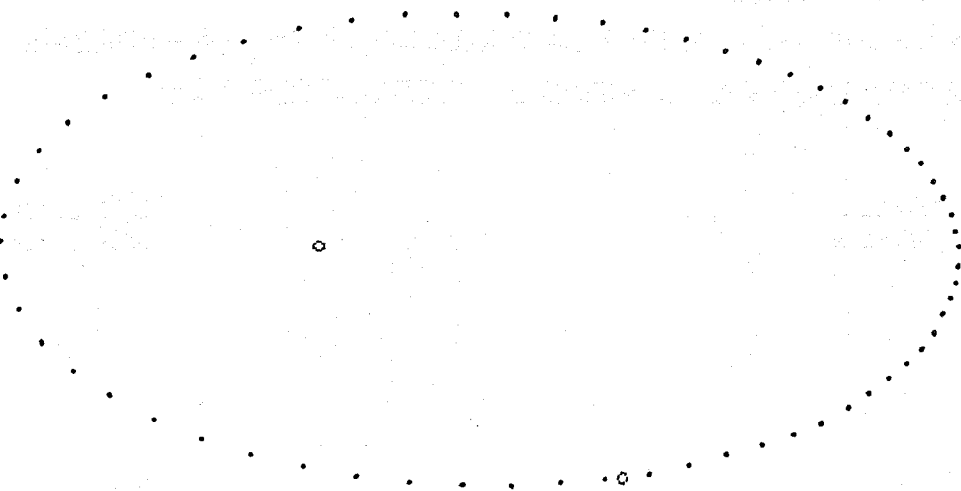
按 S : 畫面靜止
按 R : 回主功能表

在此畫面中是以木星與地球的公轉軌道為例。由此畫面顯示的兩行星在軌道上各瞬間位置關係，配合教師的現場解說，可使學生瞭解 Roemer 是如何利用木星的衛星來測量出光的速度值。亦可了解軌道週期定律所顯示的天文現象。看完圖示後，按 R 鍵回到主功能表。

(八) 克卜勒行星運動第一、二定律：

主功能表上選擇 8 時，畫面上出現“克卜勒行星運動第一、二定律說明”之原理全文，詳細閱讀完本說明後，即進入本程式繪圖階段。

首先，畫面上出現一作橢圓軌跡運動之動態圈圈，之後緊接着再顯示一作同樣軌跡運動之動態質點，然後此質點之軌跡即靜止在畫面上，而以一假想行星順着這軌跡作變速率之橢圓軌道繞行運動，本畫面上很清晰地顯示出此變速率之橢圓運動，讀者可多欣賞一下運動現象。下列為某瞬間之螢幕畫面：（中央偏左者為太陽，右下者為行星）



按 S 鍵即可終止上述之動態畫面，而進入等面積定律之繪圖階段。

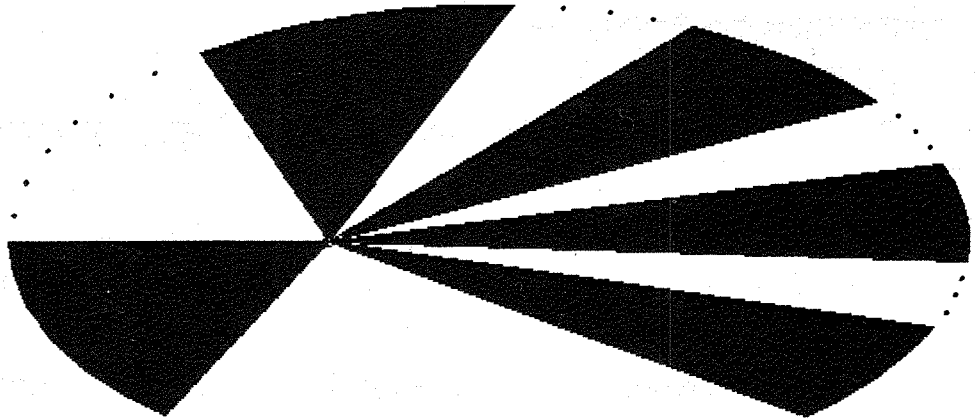
輸入：公轉軌道上之任兩時刻（輸入時刻值限定在 0 至 62 間之整數）

您可依畫面之要求輸入幾對時刻之數值，最後務必再鍵入一對 -1 值，始可執行繪圖工作。以下有兩種輸入方式，來進行實驗等面積定律之演示：

(1) 輸入兩時刻間之時距相等時，得到如下的畫面：只要測量出著色區內之面積，即可證明面積為定值。（下頁上圖）

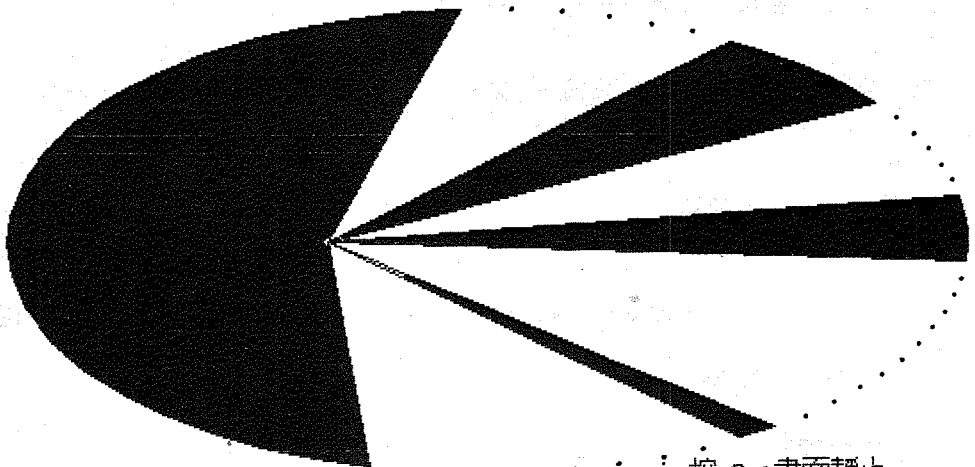
(2) 若輸入兩時刻間之時距不等，則需把測量出的著色面積與對應輸入時距的比值拿來對照，證明此比值為定值。以下為不等時距之面積着色圖。（下頁下圖）

請輸入公轉軌道	0	至	6	兩時刻
請輸入公轉軌道	20	至	26	兩時刻
請輸入公轉軌道	30	至	36	兩時刻
請輸入公轉軌道	40	至	46	兩時刻
請輸入公轉軌道	50	至	56	兩時刻
請輸入公轉軌道	-1	至	-1	兩時刻



按 S : 畫面靜止
按 R : 回主功能表
按 C : 再來一次

請輸入公轉軌道	51	至	10	兩時刻
請輸入公轉軌道	18	至	19	兩時刻
請輸入公轉軌道	30	至	34	兩時刻
請輸入公轉軌道	40	至	45	兩時刻
請輸入公轉軌道	-1	至	-1	兩時刻



按 S : 畫面靜止
按 R : 回主功能表
按 C : 再來一次

按 C 鍵時，本程式即重新執行一次，讀者可多測試幾次，使更了解等面積定律的現象。
按 R 鍵回到主功能表。

(九) 主功能表上選擇 9 時，即結束本程式全部操作系統。本系統 PHIGRA.BAS 的完整程式列於本文後面的附錄部份。

C. 原理說明：

本系統 PHIGRA.BAS 的完整程式均以下列各項原理為基礎，配合 ETBASIC 設計編製而成。

1. 斜向拋射運動原理說明

令斜向拋體初速 V_0 ，仰角 θ ， g 為地表重力加速度，其值為 9.8m/sec^2 。在拋射過程中：

(一) 水平方向，物體作等速度運動，水平速度為 $V_0 \cdot \cos \theta$ ，經 t 時距的水平位移為 $X = V_0 \cdot \cos \theta \cdot t$ 。

(二) 鉛直方向，物體作等加速度運動，其初速為 $V_0 \cdot \sin \theta$ 經 t 時距，鉛直位移為 $Y = V_0 \cdot \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

(三) 全程飛行時距 T 為： $T = \frac{2V_0 \cdot \sin \theta}{g}$

水平射程為 S ： $S = (V_0 \cos \theta) \cdot T = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$

最大高度 H ： $H = \frac{(V_0 \sin \theta)^2}{2g}$

(四) 物體作拋體運動之軌跡為 $N(X, Y) = N(V_0 t \cdot \cos \theta, V_0 t \cdot \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2)$

2. 水平拋射運動原理說明

令水平拋射運動初速 V_0 ，高度 H ，則拋體運動過程中

(一) 水平方向作等速度運動，水平初速 V_0 ，經 t 時距之水平位移為 $X = V_0 t$

(二) 鉛直方向作等加速運動，其初速為 0 的自由落體運動，經 t 時距之鉛直位置為

$$Y = H - \frac{1}{2}gt^2$$

(三) 飛行時間： $T = \sqrt{2H/g}$

水平射程： $X = V_0 \sqrt{2H/g}$

著地瞬間速度： $\vec{V} = V_0 \vec{i} - gT \vec{j} = V_0 \vec{i} - \sqrt{2gH} \vec{j}$

著地瞬間角度爲： $\text{TAN}^{-1}(\sqrt{2gH}/V_0) = \text{TAN}^{-1}(gT/V_0)$

(四) 物體作水平拋射之軌跡爲： $N(X, Y) = N(V_0 t, H - \frac{1}{2}gt^2)$

3. 簡諧運動與圓周運動比較說明

(一) 圓周運動：

半徑 r 之圓方程式爲： $X^2 + Y^2 = r^2$

其極座標方程式爲：
$$\begin{cases} X = r \cos \theta = r \cos \omega t \\ Y = r \sin \theta = r \sin \omega t \end{cases}$$

物體作圓周運動之軌跡爲： $N(X, Y) = N(r \cos \theta, r \sin \theta)$
 $= N(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$

(二) 簡諧運動 (S.H.M.)：(一度空間)

$X = r \cos \omega t = r \cos \theta$ $Y = Y_0$ (設爲定值)

物體作 S.H.M. 之軌跡爲： $N(X, Y) = N(r \cos \theta, Y_0)$
 $= N(r \cos \omega t, Y_0)$

4. 雙星運動原理說明

令雙星質量 M_1, M_2 ，距離 R ，則

(一) 雙星 M_1, M_2 在互相繞轉瞬間都與質心成三者共線。

(二) 質心與 M_1 之距離爲 $R_1 = M_2 R / (M_1 + M_2)$

(三) 雙星繞質心運轉之週期爲 T

由 引力 = 向心力 的觀念

$$G \frac{M_1 M_2}{R^2} = M_1 \frac{4\pi^2 R_1}{T^2} = M_1 \frac{4\pi^2 R M_2 / (M_1 + M_2)}{T^2}$$

$$\rightarrow T = \sqrt{4\pi^2 R^3 / [G \cdot (M_1 + M_2)]} \text{ (SEC)}$$

(四) 雙星之運動軌跡爲： $M_1(X, Y) = (R_1 \cos \theta, R_1 \sin \theta)$

$$M_2(X, Y) = (R_2 \cos \theta, R_2 \sin \theta)$$

即以質心爲圓心之圓周運動

5. 自由落體運動

令物體之初始高度爲 H

(一) 則自由下落 t 時距之瞬間位置爲： $Y = H - \frac{1}{2}gt^2$

瞬間速度爲： $V = gt$

$$\text{下落距離爲 } S = \frac{1}{2}gt^2$$

$$(二) \text{ 自由落體之軌跡爲: } N(X, Y) = N(X_0, H - \frac{1}{2}gt^2)$$

6. 水平等加速度運動

令物體初速 V_0 ，加速度 a ，則

$$(一) \text{ 經 } T \text{ 時距之瞬間速度爲: } V = V_0 + aT$$

$$\text{總位移爲: } X = V_0T + \frac{1}{2}aT^2$$

$$(二) \text{ 軌跡爲: } N(X, Y) = N(V_0T + \frac{1}{2}aT^2, Y_0)$$

7. 克卜勒第三定律說明

(一) 克卜勒第三定律：行星運行軌道平均半徑 R 之三次方與運行週期 T 之平方成正比
由 引力 = 向心力

$$\rightarrow G \frac{M_m}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = K$$

G ：爲萬有引力常數 M ：爲太陽質量

$$(二) \text{ 行星公轉週期: } T = \sqrt{4\pi^2 R^3 / (GM)}$$

(三) 行星公轉軌跡（視爲圓周運動）

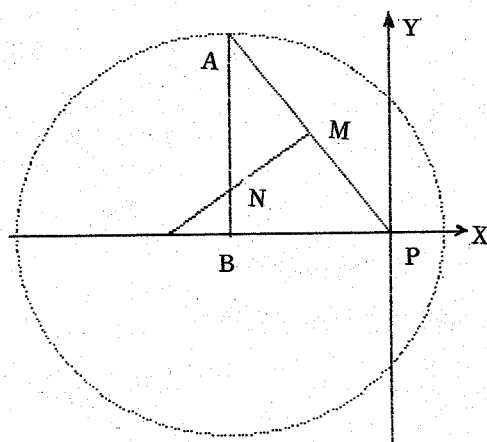
$$N(X, Y) = N(R \cos \theta, R \sin \theta)$$

8. 克卜勒行星運動第一、二定律說明

(一) 第一定律：行星公轉軌道是以太陽爲焦點之一的橢圓軌道。

(二) 第二定律：行星在軌道上公轉時，行星與太陽的連線在相同時間內掃出相等的面積。

由以上的兩個定律指出，行星繞轉的軌道係一作變速率運行的橢圓軌道。爲了在畫面上模擬出一個變速率的橢圓軌道，我們作了以下的數學分析：



在直角坐標系上取半徑 r ，圓心爲 $B(-a, 0)$ 的一定圓， $a > 0$ ，如上圖，在此定圓周上任取一點 $A(\alpha, \beta)$ ，則圓方程式爲

$$(\alpha + a)^2 + \beta^2 = r^2$$

連接點 $A(\alpha, \beta)$ 及 $P(0, 0)$ ，並作 $\overline{AP}$ 線段的垂直平分線 L 。再連接點 A 與 $B(-a, 0)$ 成 $\overline{AB}$ 線段，此時 L 與 $\overline{AB}$ 相交於點 $N(X, Y)$ ，此點 $N(X, Y)$ 將隨圓周上的點 $A(\alpha, \beta)$ 之變動而變動。此動點 $N(X, Y)$ 的軌跡爲一橢圓，以下證明之。

因點 $N(X, Y)$ 在 $\overline{AP}$ 的垂直平分線上，故 $\overline{NP} = \overline{NA}$ 而 $r = \overline{AB} = \overline{NA} + \overline{NB} = \overline{NP} + \overline{NB}$ ，即 $r = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$ 移項，平方，展開等式，消去共同項，得 $-2r\sqrt{x^2 + y^2} = -r^2 + a^2 + 2xa$

$$\rightarrow 4r^2x^2 - 4a^2x^2 + 4ax(r^2 - a^2) + 4r^2y^2 = (r^2 - a^2)^2$$

$$\rightarrow 4(r^2 - a^2)(x^2 + ax) + 4r^2y^2 = (r^2 - a^2)^2$$

$$\rightarrow 4(r^2 - a^2)\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + 4r^2y^2 = (r^2 - a^2)^2$$

$$\rightarrow 4(r^2 - a^2)\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - (r^2 - a^2)a^2 + 4r^2y^2 = (r^2 - a^2)^2$$

$$\rightarrow 4(r^2 - a^2)\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 4r^2y^2 = r^2(r^2 - a^2)$$

$$\rightarrow \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{(r^2 - a^2)}{4}} = 1$$

上式乃動點 $N(X, Y)$ 之軌跡，其爲以 $P(0, 0)$ ， $B(-a, 0)$ 爲兩焦點的一個橢圓方程式，此橢圓的中心點爲 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ 坐標。

接著，欲使行星在此橢圓上作變速率運動，我們必須以定圓上作等速率圓周運動之動點 $A(\alpha, \beta)$ 來控制此橢圓上的動點 $N(X, Y)$ 運動。因此須要再尋出點 $N(X, Y)$ 與點 $A(\alpha, \beta)$ 兩坐標值之間的關係：

$$\text{由圖上知，}\overline{NM}\text{之直線式：} Y = -\frac{\alpha\left(X - \frac{\alpha}{2}\right)}{\beta} + \frac{\beta}{2}$$

$$\overline{AB}\text{之直線式：} Y = \frac{\beta(X + a)}{\alpha + a}$$

聯立解出兩方程式的 X, Y 值, 得 $X = \frac{(\alpha + a)(\alpha^2 + \beta^2) - 2a\beta^2}{2(\alpha^2 + a\alpha + \beta^2)}$

由圓方程式 $(\alpha + a)^2 + \beta^2 = r^2 \Rightarrow \alpha^2 + 2a\alpha + a^2 + \beta^2 = r^2$

$\Rightarrow \alpha^2 + a\alpha + \beta^2 = r^2 - a\alpha - a^2$ 代入 x 之值, 得

$$X = -\frac{a}{2} + \frac{\alpha r^2}{2(r^2 - a\alpha - a^2)} \dots\dots\dots(1)$$

同理, 求得 Y 值為

$$Y = \frac{(r^2 - a^2) \sqrt{r^2 - (\alpha + a)^2}}{2(r^2 - a\alpha - a^2)} \dots\dots\dots(2)$$

此處 $(-a - r) \leq \alpha \leq (-a + r) \dots\dots\dots \alpha$ 的範圍

上兩式(1)、(2)表示的即為橢圓軌跡的參數方程式, 而其參數為 α 。因為 α 值係在 $(-a - r)$ 與 $(-a + r)$ 之間變動, 其軌跡上各點之速率皆不一樣。而由作圖可看出在 B 點左方附近之橢圓運動軌跡, 其路徑須由動點 A (α, β) 運行左半圓圈, 故其軌道速率甚慢。而 B 點右方之更長橢圓軌跡, 其路徑亦須由動點 A (α, β) 在圓周上運行右半圓圈而得, 其在橢圓軌道上的速率則相對地變得更大, 如此經由此理論設計即可得出一個變速率之橢圓軌道。

最後, 將此 X, Y 之參數方程式(1)、(2)及參數動點之軌跡方程式 $\alpha = -a + r \cos \theta$, 一起輸入 ETBASIC 內自行設計的程式中, 並令 θ 之值由 6.28 至 0, 每 0.05 遞減一次。則在螢幕畫面上即顯現出動態的橢圓軌跡。由於螢幕上每相鄰兩亮點的時距是相等的 (每次 0.05), 為一個定值。而此刻橢圓軌道上的相鄰兩亮點間卻顯出不等的距離, 即表示此軌道為一變速率者。經由畫面作圖, 本程式可顯示出很漂亮的等面積定律之效果。

三、結 論

製作電腦繪圖之設計過程, 確實是既有趣, 又迷人。本篇研究的內涵, 在要求結構完整, 操作簡單及功能優越之原則下, 設計程式之過程頗為繁複, 若非有恒心毅力, 恐早已放棄, 誠所謂一分耕耘, 一分收穫。在一再重新設計、修改、測試之繁瑣過程中, 作者深深體會出從“作中學”的實際臨場經驗。又由本篇第八段克卜勒第一、二定律之設計製作, 更加體會出, 有志同事一起參與研究計劃, 分工合作, 相輔相成, 俾能使研究結果更完備, 更迅速。

本篇中第八段程式：克卜勒行星運動第一、二定律，自原理至最後之程式設計，費時最鉅，至為繁複。尤其是塗色階段之程式，從想定構思，經一再的設計、修定、測試，終至完成，作者更是窮盡心思，竭盡所能，充分與 PC 融為一體，得窺其內稟的優越性能，才能親自體認 PC 電腦 BASIC 繪圖功能，及配合適當的數學分析，始能使電腦盡其才而得其精華，不僅使作者感受到挑戰性的設計考驗，亦使我們獲致至為寶貴之設計經驗，真是種瓜得瓜，種豆得豆，無比亢奮！

本文僅是一項嘗試，希望藉此繪圖功能之顯示，來指引學生對質點系統運動現象之一些真實（模擬）狀態的體認，因而提高其物理學習的興趣與成就。並希望我們能在物理學內容中再製作出更高難度的繪圖程式，以充實物理教育之實質課程。

四、參考資料

1. 新教材高中物理，師大科教中心編著（76年版）。
2. BASIC 繪圖程式設計，全華科技圖書公司。
3. 新教材高中數學第四冊（解析幾何部份），師大科教中心編著。
4. 地球行星影集，IBM公司著作。
5. 倚天中文系統，松崗電腦圖書公司。
6. 電腦繪圖學，薛文證，松崗電腦圖書公司。