

物理學的性質、簡史和哲學(下)

吳大猷
中央研究院

八、量子力學——「矩陣力學」

我們務必回述在薛略丁格一九二六年創展他的波動力學之前，在一九二五年夏，海森堡創始的「矩陣力學」。

海森堡 (W. Heisenberg, 1901-1976) 的出發點，是以為波爾的理論，雖在氫原子獲得「完全的成功」，但它的基本性質是雜湊了古典的力學和與它矛盾的新假設而成的；它用了「電子軌道半徑」，「電子轉動的頻率」等概念，都是不能觀察得到的，而這頻率又和光譜線的頻率沒有直接關係的；海森堡想建立一個「理論」，或「數學的結構」，其中祇引用可觀察得的資料（如光譜線的頻率；光譜線的強度；它們的偏極度等），避免用不能觀察得到的概念，如波爾理論中的電子軌道、速率等。海森堡的這個觀點，是來自愛因斯坦在狹義相對論中對「時」，「空」概念的要求的。

原子的光譜頻率，不是如古典理論的 ν ， 2ν ， 3ν ， $\dots n\nu \dots$ 等，而按光譜分析，是符合一個所謂 Ritz 氏「組合原理」，即每一光譜頻率，可與作兩個「項」數值之「差」，故有下關係：

$$\nu_{nm} = T_n - T_m, \quad \nu_{nm} = (T_n - T_k) + (T_k - T_m) = \nu_{nk} + \nu_{km} \quad (8-1)$$

由這個「二維性」的頻率表，海森堡試着建立一個數學結構，可表電子的座標 q ，動量 p 等時間函數，和這些函數的運算規則。他將論文發表前寄給 H. Born 氏，Born 指出海森堡的數學結構，實在是代數中已有而物理學家所不甚常見的矩陣代數。在兩個月中，他和海森堡（用通訊方式）和一位年輕數學物理學家 P. Jordan 即將海森堡的初意，發展成了完整的數學體系，（稱為「量子力學」亦另稱為矩陣力學）這是一九二五年秋的事。他們先用此新方法計算簡諧振子的能態，獲得下式

$$E = (n + \frac{1}{2})h\nu, \quad n = \text{整數} \quad (8-2)$$

此結果和蒲朗克的理論所得的 $E = nh\nu$ 式，有一極重要的差別，後來為光譜實驗所證實。

這個矩陣力學的計算，較（波動力學的微分方程式）為繁複。但 W. Pauli 氏旋即以此法計算氫原子的能態，其結果和波爾理論所得相同。從這個理論的出發點和它的數學結構的新奇性觀點言，這些結果成功是驚人的。但無容諱言的，

這個理論的意義，是殊不顯明的；最難懂的，是在這個理論中，所有的物理量如座標 q ，動量 p ，都是矩陣，而矩陣的乘法，是不遵守「交換規律」的，即一般的情形下， $pq - qp \neq 0$ 。故問題是：如 pq 與 qp 不相等，則 $pq - qp$ 應等於什麼？Born 由古典力學的「作用變數」 J （見第6-4式）的啟示，作了一個基本假設，謂 p, q 兩矩陣遵守下面的「交換規律」：

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} E \quad (8-3)$$

此式中之 E 為一「單位矩陣」，即在主對角線上之值為 1，其他處皆為零。我們初甚難想像在物理學中，兩物理量的乘積 pq ，和 qp 不相等，而遵守上式關係。但在一九二六年三月，薛略丁格在他展開他的波動力學期間中，發現他的方程式，可由古典力學的漢彌爾理—雅可比方程式，將其動量 p 代以一微分算符

$$p_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \quad , \text{ 餘類推} \quad (8-4)$$

而由此即得的算符方程式

$$p_x x - x p_x = \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{h}{2\pi i} \quad (8-5)$$

正與矩陣力學的基本假設 (8-3) 式相同！薛略丁格由是指出「波動力學」和「矩陣力學」兩個理論，出發點不同，基本假設的思索來源途徑不同，數學的形式不同，實在是數學上相同的兩個不同表示方式而已。經此發展後，一切問題的計算，皆以波動力學為之。

一九二五年夏，海森堡曾被邀至英國劍橋大學作演講，但未講及他將寫的矩陣力學的第一篇文章。稍後，波爾將海森堡的文稿校對版寄劍橋的 R.H.Fowler，後者以之給研究生 P.A.M. Dirac 讀，該文中尚未用「矩陣」之字，蓋「矩陣」仍有待 Born, Heisenberg, Jordan 的稍後共同作的文，始出現也。惟 Dirac 由海森堡文稿一啟示，想起古典力學中的 Poisson 括弧式，由此獨立的發展一個用「非交換性算符」的數學結構；他的理論，乃較矩陣力學及波動力學更為普

遍性的體系，可稱為「量子力學」；它包括了波動力學和矩陣力學為兩個特別的形式。

Dirac (1902-1984) 於一九二六—七年間，在量子力學基本理論上更有一重要的貢獻，即量子力學的「變換理論」是也。在此理論，P. Jordan 亦有獨立的貢獻。此變換理論，乃量子力學中一極基礎性的一部。

時至一九二七年秋（海森堡之測不準原理已出），量子力學的數學體系已大致完成，餘下的卻是它的物理的意義和它在物理學的哲學上所引致的問題。

九、量子力學的物理意義

我們先綜述由「量子」觀念所引致的困擾問題：

(一) 愛因斯坦和德布洛依的關係（見7-8，7-9式）

$$E \neq h\nu, \quad p \neq h/\lambda \quad (9-1)$$

(二) 由此關係，引致測不準原理（7-10）

$$\Delta x \Delta p_x > h \quad (9-2)$$

(三) 在矩陣力學中，物理量皆為矩陣，遵守「非交換乘法」規律

$$PQ - QP \neq 0 \quad (9-3)$$

(四) 在波動力學中，物理量皆為算符，例如：

$$x \text{ 為 } x, \quad \text{則 } p_x \text{ 為 } \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{見8-4}) \quad (9-4)$$

(五) 在「矩陣」及「波動」力學中，「座標 x 」與其「共軛動量 p_x 」遵守下基本假設（8-3）

$$P_x \cdot x - x \cdot P_x = \frac{h}{2\pi i} 1 \quad (9-5)$$

(六) 在「機率假設」(7-7)下，則由(9-5)關係，即得測不準原理(9-2)的較準確形式如下

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (9-6)$$

第(一)項，「電磁波有粒子性」，「和粒子有波性」的假設，按古典物理，它們在觀念上即是「不通」的。由它們而引致測不準原理，亦是在古典物理上所不可解的。波爾對這些困難，提出一個觀點：簡略的說，波爾認為愛因斯坦和德布洛依的「波」與「粒子」關係，是表示這兩個觀念，由於它們從巨觀經驗構成的，本身上即有了限制；這限制(或不適用)在原子領域中即出現，其出現之方式，即是 $E = h\nu$ ， $p = h/\lambda$ 兩個「不通」的關係。同理，古典力學中的座標 x 和共軛動量 P_x ，亦係從巨觀經驗構成的觀念；它們在原子(微觀)領域中即不適用，這不適用性，即以測不準關係表達出來。波爾的「互補原理」，是將「波」與「粒子」兩個觀念，視為「互相輔補」，而不是「彼此排斥」的。

一九二七年秋，在歐洲有兩次的物理學大師們的討論會，海森堡的測不準原理和波爾的互補原理，當然是討論目標。多數的物理學家似別無選擇的接受這些觀點，唯一的例外，是愛因斯坦；他不肯信測不準原理，亦不肯接受機率性的基本假設。關於愛因斯坦的觀點(或哲學)，將於下節中作較詳的研討。

量子力學的數學基礎，漸漸的由物理學家如 Dirac，Jordan 數學家如 Hilbert, von Neumann 等建立起來。到了一九二八年前後，「量子力學」已漸由初期的各別創立探索性的形式，可綜合成一個公設式的完整邏輯體系。茲將量子力學以淺易的形式表之如下，以便作較有條理的討論。

甲、互補原理性部分

公設一、一個物理系統的「態」，係以一無限維的線性空間之一向量表之

註一、如以 $|a\rangle$ (稱為 ket) 表一向量，乘此以任何常數 $\pm C$ ，皆代表同一「態」。 $|a\rangle$ 之改變，代表「態」之改變。

註二、此無限維空間，乃一抽象空間（稱為 Hilbert 空間。）

公設二、凡物理量，皆表以線性自伴算符。此算符作用於 $|a\rangle$ ，使 $|a\rangle$ 改變。

註一、使 Q 為自伴算符， q_k 為一數值， $|q_k\rangle$ 為一 ket。如

$$Q|q_k\rangle = q_k|q_k\rangle \quad (9-7)$$

換言之， Q 作用於 $|q_k\rangle$ ，不改變 $|q_k\rangle$ 之態，則此 q_k 調為 Q 之本徵值，此 $|q_k\rangle$ 為屬於 q_k 之本徵函數。

註二、「自伴」算符之本徵值為正實數。

註三、屬於 Q 的兩個不相等之本徵值 q_j, q_k 之本徵向量是直交的，即

$$\langle q_j | q_k \rangle = \delta_{jk} \quad (9-8)$$

註四、線性算符及線性空間，保障「態」之重疊原理。

註五、可選任何物理量 Q 之本徵 ket $|q_k\rangle$ 為空間之基本向量，這些本徵 $|q_k\rangle$ 構成一「完全集」，一任何向量 $|a\rangle$ 可按 $|q_k\rangle$ 展開

$$|a\rangle = \sum_k \int |q_k\rangle \langle q_k | a \rangle, \quad \langle a | = \sum_k \int \langle a | q_k \rangle \langle q_k | \quad (9-9)$$

$$\sum_k \int \langle a | q_k \rangle \langle q_k | a \rangle = \sum_k \int |\langle a | q_k \rangle|^2 = 1 \quad (9-10)$$

註六、選擇 Q 之本徵 ket $|q_k\rangle$ 為基本 ket，和變換至另一以 R 之本徵 ket $|r_i\rangle$ 為基本 ket 的關係，引入「表現的變換」的觀念。

註七、在上述變換中，保持算符之自伴性的條件，引入么正變換的觀念。

註八、變換理論加上（下文公設四）機率性公設，使量子力學成為一完整體系。

公設三、座標 q 及其共軛動量 p 及之自伴算符，遵守下交換關係

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} 1 \quad (9-11)$$

註一、此關係加上機率性公設(下文)，引致測不準關係。

註二、由上註觀點，此交換關係可視為愛因斯坦-德布洛依關係之數學式。

註三、交換關係乃互補原理的數學式。

註四、「交換關係」公設，實乃係量子力學的「基本原理」，第一、第二公設係「定義」性的，為建立一非古典性交換關係的準備步驟。

乙、機率性部分

公設四、如知物理系統之態為 $\text{ket } |a\rangle$ ，作物理量 Q 之度量，則期望值為

$$\langle a | Q | a \rangle \quad (9-12)$$

註一、此公設將前三個公設與物理度量聯起來；對實驗度量的結果作了一個理論的敘述，故此公設是為量子力學的主要物理內涵。

註二、設系統之態為 $|a\rangle$ 。茲量 Q 。按(9-12)，及(9-9)(9-10)各關係，即得度量 Q 之期望值

$$\langle Q \rangle = \langle a | Q | a \rangle = \int \sum_k |\langle a | q_k \rangle|^2 q_k \quad (9-13)$$

此式調量 Q 之結果，所有之本徵值 q_k ，均可各按其機率 $|\langle a | q_k \rangle|^2$ 出現；換言之，量子力學一般言之，不能預告度量的結果的確定值；祇能告訴我們各可能值 q_k 的出現機率。這是對一個「原子」而言，非由極大數目的「原子」而引入的機率觀念。這是和古典物理的基本不同處。

註三、按公設三(9-11)及公設四(9-12)，H. Weyl 導出

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}$$

故交換關係 (9-11)，亦猶愛因斯坦—德布洛依關係，和測不準原理，有不可分的關係。

註四、或問何以必須引入基本性的機率假設。我們不能作一個絕對性完全的答案，因為它是一個「公設」——是量子力學系統的基本出發點之一部分；但我們至少可以說：由「公設三」已知兩個共軛量（按古典物理的意義）是不可能同時有共同的本徵 ket，則由公設四所引致的測不準關係 (9-13)，最少是與「公設三」不相矛盾的。

公設五、物理系統的態的變遷，遵守下方程式：

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} |a, t\rangle = H |a, t\rangle \quad (9-14)$$

（或作下形式

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = H \Psi(q, t)$$

此乃薛略丁格方程式。

註一、此方程式乃量子力學的基本假設之一，不能由古典物理學導得的。

註二、此方程式乃物理系統的態的定律，其地位有如古典力學中的牛頓運動方程式。

註三、此方程式乃一微分方程式，故由 $\Psi(t)$ 的一個開始值 $\Psi(t_0)$ ，此式完全決定了未來時 Ψ 的值。惟 $|\Psi|^2$ 祇是機率，而不是實驗觀察的結果。故薛略丁格方程式，對「機率」而言是一個「決定性」的「因果關係」，但不是古典物理中的因果性。

註四、 H 函數中含位能 V 。古典力學及電動力學中所出現者非位能（或勢能）本身而係它們的導數， ∇V ， $\text{curl } A$ ， $\nabla \Phi$ 等。這是量子力學和古典物理的重大不同處。由此引致所謂 Bohm-Aharonov 效應。

上舉的五個公設，係一般性的。如物理系統中含有完全相同（不可辨別）的粒子，則關於態 ket（或 Ψ 函數）對兩粒子的對調之對稱性（如 $\Psi(1,2) = \Psi$

(2,1), $\Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$) 問題, 從經驗可得 Pauli 原理和它的推廣原理, 如下式:

公設六、對自旋(角動量)為半整數的粒子, 在兩粒子對調時, 態 ket (或 Ψ 函數) 有反對稱性; 對自旋為整數的粒子, 則為(正)對稱性。

註一、此「公設」實係經驗性質, 不能和其它的公設居同等地位的。

由上述各公設的「註」, 可以看見量子力學的「定義」, 「假設」, 和由它們引致的結論。量子力學表成這樣的形式, 是想將它建立成一個演繹性的體系: 由這公設系統, 導出結論, 和實驗結果比較驗證。這是科學探索前進的精神和方法。於一九二六年始的數年間, 量子力學迅速的成功的應用於原子, 分子物理的領域。雖謂創立量子力學者們的靈感或啟示, 多是源自原子現象, 故量子力學在原子物理上的大成功, 似或「不足為異」, 但六十年來, 量子力學於原子、分子、原子核, 基本粒子及固態物理各領域, 尚未發現有「失敗」的情形, 顯示其非侷限於原子物理的一個特殊理論。

十、量子力學的「哲學」問題

前數章已略述量子力學的起源, 發展過程, 創新觀點及觀念, 至完整的邏輯體系的建立; 我們亦曾略述各基本假設(公設)的性质和它們的物理意義; 亦曾述波爾的「互補原理」的哲學觀點。目前之量子力學, 它的內在邏輯完整性, 似是無人質疑的了; 但它的哲學觀點, 則尚未達到普遍的共同接受的情形。一個大多數大物理學家所採的, 是所謂哥本赫根派哲學, 這是以波爾、海森堡、庖立等為主要大師的; 由各不盡同的觀點不願接受哥本赫根派的觀點者, 有愛因斯坦、德布洛依、蒲朗克、薛略丁格等。在哲學觀點上的討論或爭議, 以愛因斯坦與波爾之討論最著稱。

關於量子力學的物理意義和哲學基礎的問題, 前數節中已有片段的敘述(見第六至第九節。)為便於明瞭量子力學目前體系建立的歷程計, 茲作一簡表如下:

(一) 至第十九世紀末年, (時雖有氣體傳導、電子、X 射線、放射性等新研究發現。)物理學家多信(古典)物理, 包括動力學、電磁學光學、熱力學統計力學, 已臻完整。該時研究問題之一, 乃黑體輻射光譜的分布定律。物理學家旋發現由古典熱力學統計力學所得的理論, 顯然與實驗結果不符。一九〇〇年蒲朗克

「不得已」的作了一個「極大膽」的（按古典物理，是荒謬的）量子假設，獲得完全符合實驗結果的定律。

此後此定律，可由數不同的觀點（如Bose的新統計法）獲得，但最重要的，是後來可以證明：量子 $h\nu$ 的假設，是得蒲朗克定律（公式）的充分和必要條件。至此，物理學不能不接受一個和古典物理基本連續性的觀念革革不入的新觀念。此後量子論迅速的進展，不予抱保守態度的物理學家以喘息的機會。

（二）一九〇五年，愛因斯坦創光子理論，謂電磁波有粒子特性，如下二關係：

$$E = h\nu, p = \frac{h}{\lambda}$$

此大膽的假設，旋得光電效應及Compton效應的支持。至此，物理學面臨有基本重要性的困擾：實驗的結果，竟顯示古典物理中互不相通的「波」和「粒子」的觀念，有混淆的情形。

（三）同年，愛因斯坦在相對論中；指出「絕對時」和「絕對同時性」的無意義，不僅震撼了物理學界，且引致哲學家們的異議。

（四）一九一三年，波爾的氫原子理論，明知違背古典電磁學定律，作了大膽的穩定態假設，完美的「解釋」了氫原子的整個光譜（線的頻率），又由此穩定態條件推廣所得的「空間方向的量子化」，亦為 Stern-Gerlach的實驗所證驗。此外 Sommerfeld氏對波爾理論的微細修正，亦為實驗所證實。

至此古典物理在原子現象上，已呈千瘡百孔的情形。為緩和量子論與古典物理間的衝突性，波爾（一九一六年）提出所謂「相應原理」，指出在「量子數」值極大（它的變遷甚小）的極限情形下，量子論將趨近古典物理的結果。此原理頗有意義，但並不基本性的解答困擾問題。

時至一九二〇年代，物理學家漸深信古典物理在原子領域的無效，及量子論經初期的大成功後，亦呈無力應付原子問題的情形。革命性的發展時機漸成熟。

（五）一九二三，四年德布洛依由相對論一些觀點，又創議一大膽假設—物質粒子有波的特性；他的關係式 $\nu = E/h$ ， $\lambda = h/p$ ，形式上雖與愛因斯坦的相同，但意義則根本上不同。此假設旋為電子繞射的實驗所證實。

（六）一九二六年初，在未明德布洛依的「波」究為什麼「波」之前，薛略丁格（由約九十年前，漢彌爾頓發現粒子力學運動軌道與光線軌道二者的方程式的相

似性的啟示)又作一大膽假設,創立「薛略丁格方程式」,使波爾的穩定態條件,今乃代以一求微分方程式的本徵值的純數學性問題,換言之,免去作違背古典物理的假設。數個月後,Born創機率性假設,使薛略丁格的數學結構,獲得物理的意義。此公設(見第九節公假四及註二)乃量子力學在基本上和古典物理大異處之一。

(七)稍前,一九二五年夏,海森堡由愛因斯坦對物理學中的概念須有其度量上的意義的要求,以之為出發點,創建矩陣力學,凡物理量皆表作矩陣,座標及其共軛動量假設遵守下式

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} E \quad (10-1)$$

此理論乃古典物理所「不可懂」的,但其在簡諧振子,氫原子,對稱轉動體等問題的成功,則不容忽置不理!

(八)一九二六年春,薛略丁格更指出他的「波動力學」與「矩陣力學」二者在數學上是相同的。這使兩個出發點,基本假設,數學工具皆不相同的理論,互得強力的支持!

較這兩個理論更為普遍性的(包涵不交換算符的)理論,同時的獨立的由Dirac建立起來,三者共稱為量子力學。

(九)一九二七年夏,海森堡由愛因斯坦-德布洛依關係,指出測不準原理,使隱藏於愛因斯坦-德布洛依的粒子-波關係的量子與古典物理衝突,很顯明的尖銳化。按這測不準原理,則古典力學的觀念,從根的推翻了:(一)根本的不可能同時的定一個粒子的位置 x 和動量 P_x , (二)故根本的不可能連續的描述一個粒子的運行軌道, (三)故牛頓的第二定律運動方程式,亦根本不可能成立。

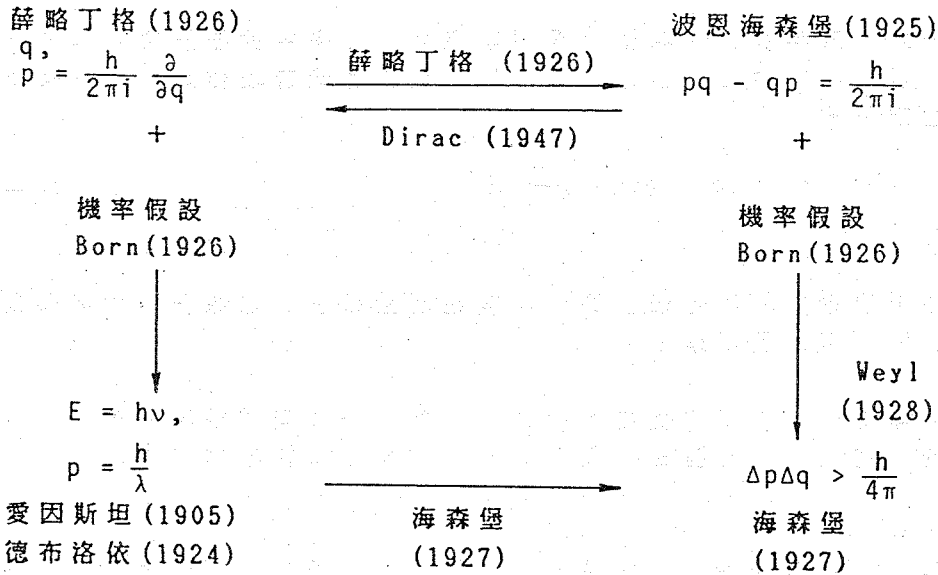
在量子力學中,一個粒子的「運動方程式」可由薛略丁格方程式及第(9-12)式得下方程式

$$\frac{d}{dt} \langle a | p | a \rangle = - \langle a | \nabla V | a \rangle$$

V 乃位能(注意此式與古典力學的運動方程式之相似處及基本不同處。)

翌年,H.Weyl 更指出由(10-1)關係及機率性公設(9-13)即亦可得測不準原理。

我們可將薛略丁格的 (8-4) x , $p_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ 關係, 薛略丁格指出的 (8-5) $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} 1$ 關係, 海森堡由 (7-8), (7-9) $E = h\nu$, $P = h/\lambda$ 關係得測不準原理 (7-10), 和 Weyl 由 (8-5) 關係得 (7-10) 等, 作成下圖



由上圖, 得見各個假設間的因果關係, 亦得見由第九節中公設三, 公設四, 可得測不準原理, 與由 (8-4) 及公設四之可得 $E = h\nu$, $P = h/\lambda$ 關係, 是平行的, 因由後者即可得測不準原理也。

如上述, 測不準原理使「粒子一波的困擾」尖銳化, 故求對此情形有一個「解釋」, 乃至為逼切。

(十) 一九二七年秋, 波爾創議一個觀點, 稱為「相輔原理」或「互補原理」。按此觀點, 一個通常顯然視為「粒子」的電子, 在某些觀察情下顯示波的性質; 有波性的電磁波, 在某些觀察情形下顯示出粒子的性質, 這顯是矛盾的情形的來源, 是「粒子」和「波」兩個觀念本身。這兩個觀念, 是來自我們對巨觀現象的觀察; 在微觀現象的領域, 這兩個觀念便不盡適當: 每一個觀念單獨的, 都不夠作完全的描述, 而須兼用二者。總言之, 「粒子」和「波」兩個觀念, 不應視為互相排拒矛盾的, 而應視為「互相補充」, 「互相輔補」的。按這個觀點, 我們不能說「電子有『粒子』和『波』的二象性」; 我們亦不應說「電子有『粒子』亦有『波』性」。我們因為用了這些並不恰當的觀念, 故有需要用二者來描述電子在不同觀察情形下的性質; 所有的「矛盾」都是由於「粒子」和「波」兩個觀

念本身的限制。

或問；我們能否不用這兩個觀念，而另創其它適當的觀念呢？波爾以為我們祇能用可以作彼此交談的共同工具的觀念（由我們從巨觀現象構成的觀念）；粒子和波，是我們能「了解」的觀念。如不用這樣的觀念，則我們不僅彼此間不能談討，即是一個人自己，亦無法作思索的。

「測不準原理」亦是此「互相輔補」原理的一個例子。測不準原理謂座標 x 與共軛動量 P_x 不能同時無限度的準確測定，這不是由於實驗上的準確性的限制（我們在這類基本性問題的探討，永遠是作理想的度量的假設的），而是 x 和 P_x 兩個觀念，不能同時的有古典力學所定義的意義；換言之，如有了古典定義的 x 觀念，則不可能同時有古典定義的 P_x 的觀念；兩個觀念，都是人們從巨觀經驗形成的，這樣有了它們基本性的「限制」（或「欠缺」），在微觀（原子）領域便不適用；這「限制」，或「不適用」性，便以測不準關係表現出來。

按這個互補原理的看法，我們便易於「了解」，或接受， $(10-1)$ 的交換關係了； x 和 P_x 如不能同時予以古典物理的意義，則它們不遵守 $pq - qp = 0$ 關係，亦無足怪了。

附註，我們想特別著重下一點。許多書常作類下的敘述：「由於度量儀器與被觀察物體間的「無可控制」的交互作用，故度量必產生一些差誤，這些不可免「不可控制的差誤」，乃引致測不準關係。」這是誤解量子力學的。量子力學並不限制量座標 x 的準確程度，亦不限制量 P_x 的準確程度，所限制的是同時量二者的準確程度。這個限制，並不是度量上的技巧問題，而是說，根本沒有給予二者同時以古典定義的可能。文獻中亦常見如下的敘述：按量子力學，在作座標 x 的度量時，對其共軛動量 P_x 產生一不可控制的影響，故 x ， P_x 二者不能同時完全準確量定。按海森堡以 γ 線顯微鏡量粒子的位置 x 的假想實驗，確使 P_x 有測不準的 ΔP_x 。惟筆者意以為不宜著重「不可控制的擾動」的觀念。

又許多書對「粒子與波」的問題，常有「粒子與波的二象性」，「電子非粒子亦非波」等語句。按哥本赫根派，我們應持的看法，應是：「粒子」和「波」，都是我們用來描述經驗的「不完整」的「語言」而已；說「粒子與波的二象性」時，應作這樣的了解。

（十一）量子力學的另一基本假設，是機率性（第九節，公設四）。這是又一個根本上和古典物理不同，而為愛因斯坦和其他一些物理學家所不能接受的觀點。

第九節第(9-13)式調按量子力學，如在一個原子(或其它單個系統)作一物理量 Q 的度量，在一般情形下，理論不能預告確定的結果，而祇能預告所有可能結果出現的機率。為強烈的表達這個情形，薛略丁格提出一個特例：

將一隻貓關閉於一密室中，室有一小孔，裝有光的偏極晶體(光的偏極面在晶體軸上可透過，與之垂直時則光被吸收不能透過)。茲由室外將一個光子由孔射入。按量子力學，光子有百分之五十機率可射入室中。在室內有一安置，使光子可引致一槍發射子彈直對該貓。如光子未射透晶體，則貓自然無恙。故問題是：量子力學所能告訴我們的，是貓有百分之五十的機率死去；在人們打開室門查看之前，不能知貓是死去或無恙。換言之，薛略丁格指出量子力學自身不能提供完全的知識；它需要一個觀察者，才獲得確定的知識。

薛略丁格的例子，確尖銳的顯示出量子力學的邏輯的結論之一，這個結論是無可爭的，故問題乃回到量子力學的本身。哥本赫根派以為我們祇有採取量子力學的看法和限制：以為我們無法對我們的知識，有超過這個限制的可能。到此，我們討論的，已不是量子力學的是否(在應用上)成功，而是量子力學本身的性質，和物理學家對量子力學(甚或對物理學)的理論的性質的「哲學」的問題。

(十二)對量子力學的「哲學」觀點，哥本赫根派(以海森堡，波爾等為主)是所謂「主流」。這派的觀點已見前文所述；他們堅持人們的「知識的性質」是有如互補原理的限制；量子力學是人們所能用以「描述」，「解釋」物理現象的限度；量子力學是一個完整的系統；它可以答所有「有意義」的問題(即在量子力學範圍內的問題)；人們沒有道理問一些「沒有意義」的問題(即超出量子力學容許的問題，如同時知 x 和 P_x 的值等。)在討論中，波爾一再的著重量子力學的完整性，能「自圓其說」性；在和愛因斯坦的討論中，他似未針對著愛因斯坦的基本觀點。

早在一九二七年秋，在歐洲舉行的物理學家討論會中，愛因斯坦不曾接受測不準原理，每日想出一個「構想的」實驗，來打破測不準關係(9-2)的限制，但翌日波爾都可以根據 $E = h\nu$ ， $P = h/\lambda$ 關係來化解了愛因斯坦的反證。愛因斯坦終於放棄提出「構想的」實驗反證測不準關係的企圖；他已接受了量子力學的內在完整性(無矛盾，無漏洞。)

這是初期的情形，但愛因斯坦始終不能接受量子力學的「哲學」。愛因斯坦對物理學理論的要求，和哥本赫根派的不同；他首先定義「物理的真實性」；凡可以度量的概念，如位置座標 x ，動量 P_x ，都是物理的真實性。他以為一個完整的物理學理論，應包涵所有的物理的真實性。量子力學祇容許 x 與 P_x 二者之一，不容許二者同時出現，故愛因斯坦認為量子力學不是一個完整的理論。

愛因斯坦對量子力學的觀點，於一九三五年作了完整的闡述（與 Podolsky, Rosen 合作的論文），在這篇文中舉出下述的問題：設有A、B兩質點，位置座標為 q_A, q_B ；動量為 p_A, p_B 因 $p_A + p_B, q_A - q_B$ 遵守 $(p_A + p_B)(q_A - q_B) - (q_A - q_B)(p_A + p_B) = 0$ 關係，故按量子力學， $p_A + p_B$ 和 $q_A - q_B$ 乃可以同時準確測定的量。又在無外力作用情形下， $p_A + p_B$ 是守恆的。茲使A、B分離至甚大的距離。並對A作 p_A 的量定。由上述的守恆關係即可知 p_B 之值。茲對B作 q_B 的量定。故同時可得 p_B 與 q_B 之值。如量子力學堅持測不準原理，則祇有假設雖A、B分隔至無限距離，對A作 p_A 之量定，仍可影響B的 q_B 值；而這假設是難接受的。故愛因斯坦以為 p_B, q_B （同理， p_A 與 q_A ）均係「物理的真實性」，均應為物理理論所包涵在內的。

波爾對這個問題的答覆，是很簡單的：由 p_A 的量定，固然可導出 p_B 之值，但這個 p_B 值並無助於B質點運動的預測，蓋當作 q_B 的度量時，按量子力學，立即影響了對 p_B 的知識。換言之，由量得的 q_B 和由愛因斯坦導出來的 p_B 值，並不構成可預告B的前途的古典性資據。總之，波爾是可以在量子力學自身的完整體系內，完滿的解答愛因斯坦的問題的。

但由愛因斯坦的討論，我們可對量子力學測不準原理作一較深的了解：我們可以如是看：我們可同時知道 p_B 和 q_B ，但這個知識和古典物理的不同；在量子力學中，這知識並不能使我們預告該物體的運動的將來！

在許多的文章中，波爾一再重複著重量子力學已涵蓋了所有人們可以問的問題，可以知道的知識，故量子力學已是一個完整的理論了。

由這個簡化的敘述，我們應看出愛因斯坦和波爾的爭論，是二人對物理理論的要求的「哲學」問題；二人的差異，是在對物理理論的性质上。這樣的差異，是二人的「哲學觀」的差異，不能以「正確」，「錯誤」可判別的。在許多的文章中，波爾（和其它的一些參與爭論的物理學家）都「自說自話」的根據量子力學本身的「自圓其說」作論據，很少悟到愛因斯坦已不再否認量子力學的無矛盾性了。這情形有點像站在歐克里幾何系統之內，一再申述歐氏幾何的完整性，以為這樣便可以說服他人不從事創非歐氏幾何者然。

愛因斯坦之外，物理學家以不同觀點對量子力學不盡滿意的，有德布洛依、薛略丁格、Bohm等人。德布洛依初期希望就量子力學的方程式獲得第二個解，後又希望引入非線性的方程式，有如愛因斯坦與Infeld理論中由「場」可自然的得運動軌道然。Bohm企圖予薛略丁格方程式以一古典性的意義。薛略丁格則不喜量子力學的「教條式」態度。此外更有些研究，以視量子力學是否有「隱藏的變數」（如古典物理中，「機率」之下，有分子的座標，動量為其基層的「變數」然

）。按數學家 von Neumann，目前的量子力學，不容有隱藏的變數的存在。故我們不能期望將量子力學的「內在的」，「根本的」機率性，可有如古典物理學中的機率性，建築在分子運動的決定性上然。

十一、場的觀念

(一) 牛頓的萬有引力假設，是謂兩物體間的相互作用是「直接」的；這個所謂「超距作用」的觀念，旋為「場」的觀念所取代。按場的觀念，一個物體，產生一個「引力場」於其四周空間的各處。例如一質量 M 之物體在座標原點，則在 r 點處，其引力場勢為

$$V(r) = -G \frac{M}{r}$$

一質量 M 的物體在 r 處所受之引力，乃由場所傳達，而非「超距作用」，

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2} (= -m \nabla V)$$

(二) 在古典力學中，除了避免了「超距」的不容易了解的觀念外，在數學形式上可寫成拉卜拉士方程式，泊桑方程式的優點。但在運動方程式上和實驗量定上，則出現者乃場勢的微分導數而非場勢本身。（注意此點乃與量子力學不同處，見第五節公設五的註四）。

在電磁學中，實驗所量的乃電場 E ，磁場 B ；電磁場理論（馬克斯威爾方程式）亦表以 E ， B 場。此兩個在三維空間的向量場，可於四維（時空）空間中，以一個向量場表之：

$$A_\mu = (A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c} \phi), \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad H = \text{curl } A \quad \text{見 (4-1) 式}$$

由此四維勢向量，可定義 $F_{\mu\nu}$ 電磁張量場，使所有電磁方程式，皆可表以張量方程式，遵守相對論的原理。在靜電及靜磁現象的電場 E 及磁場 B 是各自獨立的；它們的合併為一個電磁場 $A(A, \frac{i\phi}{c})$ ，或

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

的根據，是安培與法拉第兩實驗定律。這樣的「合併」，或「統一」，乃後來物理學發展的目標之一。

(三) 愛因斯坦於創建了「萬有引力的幾何化」理論後，即企圖建立理論，歸併電磁場於其「萬有引力場」理論之內。愛因斯坦的「萬有引力」理論，乃基於四維空間的黎曼幾何，其基本度規張量 $g_{\mu\nu}$ ， μ, ν 由 1 至 4，乃由物質動量的分布決定，已無餘地以容納電磁場，故愛因斯坦未能達他的「統一場理論」的願望。由前述的三維空間兩個「電」和「磁」場，可在四維空間合併為一個「電磁場」的啟示，似統一萬有引力場與電磁場的企圖，或可於高一維度的空間達成之。一九二一年 Kaluza 及一九二六年 O. Klein，建議一個五維空間的理論，其基本度規張量假設為下形式

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ A_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ A_3 & g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ A_4 & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$$

其 A_1, A_2, A_3, A_4 為四維電磁勢， $g_{\mu\nu}$ 則係愛因斯坦的萬有引力理論中原有的度規張量。

(四) 場的量子化 —— 場與粒子

第六節中已述愛因斯坦的光子理論及它的實驗證明。按電磁學，電磁場方程式可表以四維勢函數 A_x, A_y, A_z, ϕ 的方程式（見第四節(4-2)式）。我們的問題，乃是如何的由這古典物理的電磁場，獲得“光子”。

按前數節（尤其第九節），在量子力學中，“粒子”的描述，是對粒子的座標 q 和其共軛動量 p 加以“量子化”的條件

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

現有一個“古典”的場，如電磁場，或向量 $A(A_x, A_y, A_z)$ 和純量場 ϕ 。我們的理論，是視這些場量 A, ϕ 為場的變數，故對它們加以類上式的量子化條件（

換言之，將 A_x, A_y, A_z, ϕ 等代以“算符”）。這樣量子化的電磁場，即有粒子（光子）性，它的能 $E = h\nu$ ，它的動量 $p = h/\lambda$ 。

電磁場的量子化理論，始於 Dirac (1927)。這理論可謂是愛因斯坦的光子理論的數學形式。

我們應注意的，是下數點：

(1) 馬克斯威爾的電磁場方程式，它本身即是遵守相對論原理（它是張量方程式的）。

(2) 經量子化後，“場”有了“粒子”性，但粒子（光子）的數目是無限數的，不可數的，不守恆的。

(3) 光子有能 E ，動量 p 外，還有角動量（自旋為一整 h ）。

(4) 在古典電磁理論中，電荷是電磁場的“源”；兩個電荷間的交互作用，是通過它們的電磁場為“媒介”。在量子場論中，兩個電荷間的交換作用，乃通過光子的“媒介”。如用古典物理的術語，我們想像兩個電荷不斷的互相放出光子，及吸收光子。（一個粗俗而略表此意的比喻，是兩個人藉不斷的互相通信以維持彼此的情感。）

上述的場的量子化理論，不限於古典電磁場；它可以推廣至其它的“場”。另一熟知的“古典”場，是萬有引力場。按德布洛衣，所謂“粒子”，亦有“波”性，而這“波”便是一種“場”。故“電子”亦有它的“場”；這個“場”亦可以“量子化”。

電子的“波方程”即薛略丁格方程，惟這方程式不符相對論原理的要求（在羅倫茲變換下的不變性）。早在 1926 年薛略丁格、德布洛衣、克萊因 (Klein)、戈登 (Gordon) 都曾由相對論的能—動量關係獲得符合此要求的波方程式，但旋即知用此方程式於氫原子問題時，導致不確的結果。1928 年 Dirac 創立新的電子方程式，符合相對論的要求，自然地包含了自旋角動量 ($1/2$)，正確的氫原子的能態，預告正電子的存在等。

Dirac 的理論，原來祇是為一個電子而設的，但它的“正電子理論”隱涵了一個滿充電子的“負能態”的“海”，換言之，“無限數的電子”。

欲處理這個“無限數的電子”的問題，一個自然的方法便是“場”的方法：將Dirac電子方程式中的波函數視為算符（一如上文的將電磁場的 A ， ϕ 勢函數視為算符然），對這些算符加上“量子化”條件形式與前式不同，

$$a_i a_j + a_j a_i = 0, a_i^+ a_j^+ + a_j^+ a_i^+ = 0, a_i a_j^+ = a_j^+ a_i = 1$$

此處之 $+$ 號，乃指自旋為半整數的 k 的粒子，如電子。 a_i ， a_j^+ 的意義不能於此敘述。

將電子的量子力學方程式的 ψ ，視為一個“古典場”，再度加以量子化，成為一個“電子場”，代表無限數的電子系統。這步驟稱為“第二度量子化”。

由上的簡述，我們得見目前的“基本粒子”和“場”的理論的基本觀點：每種粒子，可視為一種“場”的量子化的“粒子”；“場”的對稱性（如對“規範變換”的對稱性；最簡單的例子，如電磁場的規範變換，見第四節），決定它的“粒子”的特性。

一個“純場”（例如祇有電磁場，沒有電荷在內）的量子化，是較簡單的問題；如有兩個交互作用的場同時存在，（例如電磁場中有電荷，在古典電磁學中沒有大問題），則在量子化的場論中，有極大且基本的問題發生。在量子場論中，同時有電子場（Dirac方程式的 ψ 的量子化）和電磁場（馬克斯威爾方程式的量子化）的交互作用，這個理論是所謂“量子電動力學”(QED)。這個理論的數學計算，自1930年代始，即出現有“無限大”的值的困難。到了1940年代中葉，才經朝永振一郎，許文格(Schwinger)，范因曼(Feynman)等，建立一個“重歸一”的理論，用符合相對論要求的具體確切步驟，將“無限大”的值從有意義的物理量分離開，而獲得與實驗結果吻合的結果（如“Lamb移”，電子自旋磁迴率等）。從“實際”的觀點言，這“重歸一的理論”是成功的。Dirac則以為一個完全的理論，不應有“無限大”的存在；他以為“重歸一”的理論，宜視為是一個完全的理論的初步形式。他自1940年代始，即企圖由古典物理中的動力學，電磁學的基本原理出發，將它們修改，希望在量子化後，可以獲得一個量子場理論，沒有“無限大”的量值出現的。他從未參與“重歸一”理論的發展工作；這是他對這個基本物理問題的“哲學”，亦猶愛因斯坦對量子力學的哲學觀點，和所謂“主流”的不同然。

(五) 基本粒子；統一場論

到了1930年代中葉，除了電子、質子、中子、微中子外，湯川秀樹創介子理論；到1940年代中葉， π 介子果由宇宙線和實驗室中發現，故有這些粒子的“場

”。到1950年代，隨著有許多的粒子的發現，到目前則已知的粒子，已有百數，例如

：

輕子：電子，渺子，重電子，及它們所關的微中子

重子：核子， Λ ， Σ^+ ， Σ^0 ， Σ^- ， Ξ^0 ， Ξ^- ， Δ^- ， Δ^0 ， Δ^+ ， Δ^{++} ， Λ_c ， Λ_b

介子： π^+ ， π^0 ， k ， $\bar{k}$ ， η ， η' ， ρ^+ ， ρ ，upsilons， Ψ/J

夸克：u，d；c，s；t，b；每種有紅R，黃Y，藍b，“色”及其反夸克

這些粒子的“發現”，是由實驗及理論相互交替的發展而來的。

到了介子 π 等的發現（1940年代），物理學家已知宇宙間所有的“交互作用”可分為四種：

- 1) 強作用(核子間的作用)
- 2) 電磁作用
- 3) 弱作用(有微中子參與的作用，如 β 衰變，中子衰變等)
- 4) 萬有引力

上文（本節第三條）曾述愛因斯坦企圖將電磁場合併於萬有引力場理論。數十年來，物理學基本性問題之一，乃上述四種交互作用，是否可「統一」為一個場。

研究此問題的途徑，是曲折深邃的一經由場的“對稱性”，“規範場理論”和還有待創立的新觀念，甚或新的數學工具。筆者誠實的說，不能再“深入淺出”的寫下去了。就目前所知，簡略的可以作敘述如下：

- (1) “弱作用”與“電磁作用”的“統一”(成功於1967-8年)，成為“電弱作用”。
- (2) “電弱作用”與“強作用”的“統一”(成功於1973年)，成為“QCD”(量子色動力學)。

至若最後的目標——四種作用的全統一——似仍在進展中。

十二、總結

本文曾企圖追溯物理學的重大進展的歷程。我們得見物理學乃由下列的不斷程序推進：

由現象的觀察，構成若干概念，以描述觀察經驗（稱為定律）；為「解釋」觀察的結果，創立理論（包括新概念的引入及假設），並導出新的結論；不斷的作新觀察及實驗以驗證理論的結果；由新的實驗，可引致新的現象，為解釋新的現象，於必要時又引入新概念新假設；由之更作推論，新實驗以求証驗，... 如是週而復始，無止境的探索。

(一) 物理學所探索的，由巨觀的現象，如天體的運行，物體的性质，光，熱，電，磁等，而及微觀的現象，氣體導電，原子的光譜，更進而入次原子的領域，如原子核，基本粒子等。

(二) 物理學的觀念，由「原始」的，「直覺」的，如「時間長短」，「長度」，「力」等而成牛頓的「絕對時」；人們以為天經地義的有歐氏幾何性質的空間；由「決定性」，遵守因果關係的理論，而為「機率性」，無因果關係的理論；由「絕對時」的觀念，而代以基於「運作觀點」的「時」；由歐氏幾何的空間，而引入「物理的空間」；由古典物理的連續性而改為量子物理的非連續性；由古典物理學中截然割分的觀念，如「波」與「粒子」，代以量子力學中的「兩觀念互為補充」的觀點；...

(三) 物理理論範圍及性質，隨著現象領域的擴展而改變。

由基於日常所遇的速度的理論，進而至適於趨近光速情形的狹義相對論；由基於日常經驗所感的觀念和理論，代以適於次原子領域的量子力學；由古典的電磁場，經量子化而得光子，推展至其它的場和它們的量子化粒子等。

(四) 由愛因斯坦的將電磁場與他的「引力場」「統一」的企圖，推進而為將「弱作用力場」，「電磁場」，「強作用力場」及「引力場」統一的企圖。

(五) 由上述的各「力場」及各種「基本粒子」，構想宇宙誕生的過程。

(六) 物理學所引致的天文學的重大進展，有：

(1) 由愛因斯坦的「引力論」，導出黑洞的理論，及宇宙結構的理論

(2) 由原子光譜及熱力學，展開星球表面狀態的瞭解。

(3) 由核子反應，導致星球內部熱能產生的瞭解。

以上略舉物理學的重要發展（不包括許多極重要的應用性物理）。由上文得見近數十年來，所謂基礎物理的重點，乃在「極微小」（基本粒子）及「極大」領域（宇宙結構）兩極限。這兩部門物理的基石分別是量子力學（及量子場論）與（廣義）相對論。故這兩個基礎理論的融合，乃物理學家所亟求的。

先以狹義相對論言，狹義相對論已為物理學家所公認的是一個基本原理，它在物理學中的地位，或可以說和「能的守恒」定律同等。以量子力學言，雖有人持不盡同的哲學態度，它本身邏輯上的完整性及它在所有應用上毫無例外的成功，則是無可質疑的，故物理學家亦皆認量子力學為物理學基石之一。惟問題乃是：此兩基石，竟不能互相融合。此點可由下舉情形見之：在相對論中， x, y, z, t 時空座標，乃居相同地位，一起作羅倫茲變換的；在量子力學中， x, y, z 座標乃係「變數」，表以（自伴）算符的，而 t 則仍保持其「古典」性； x 與 p 遵守基本關係

$$px - xp = \frac{h}{2\pi i}$$

而 t 和它的「共軛」能 $-E$ 之間，量子力學中無

$$Et - tE = -\frac{h}{2\pi i}$$

的交換關係也。在量子場理論中，場量和它的共軛變數，確遵守交換關係及羅倫茲變換，然座標 x, y, z, t 則皆視為古典性的「參數」而非算符，不遵守量子化的交換關係的。這是目前量子場論的形式。雖則所有的理論結果，皆極與實驗結果相符，故量子場論的方法，普遍為物理學家所採用，然有人（如 Pauli）以為量子力學與相對論的融合，恐是基本不可能的。這是一個基本性問題，是仍待解決的。

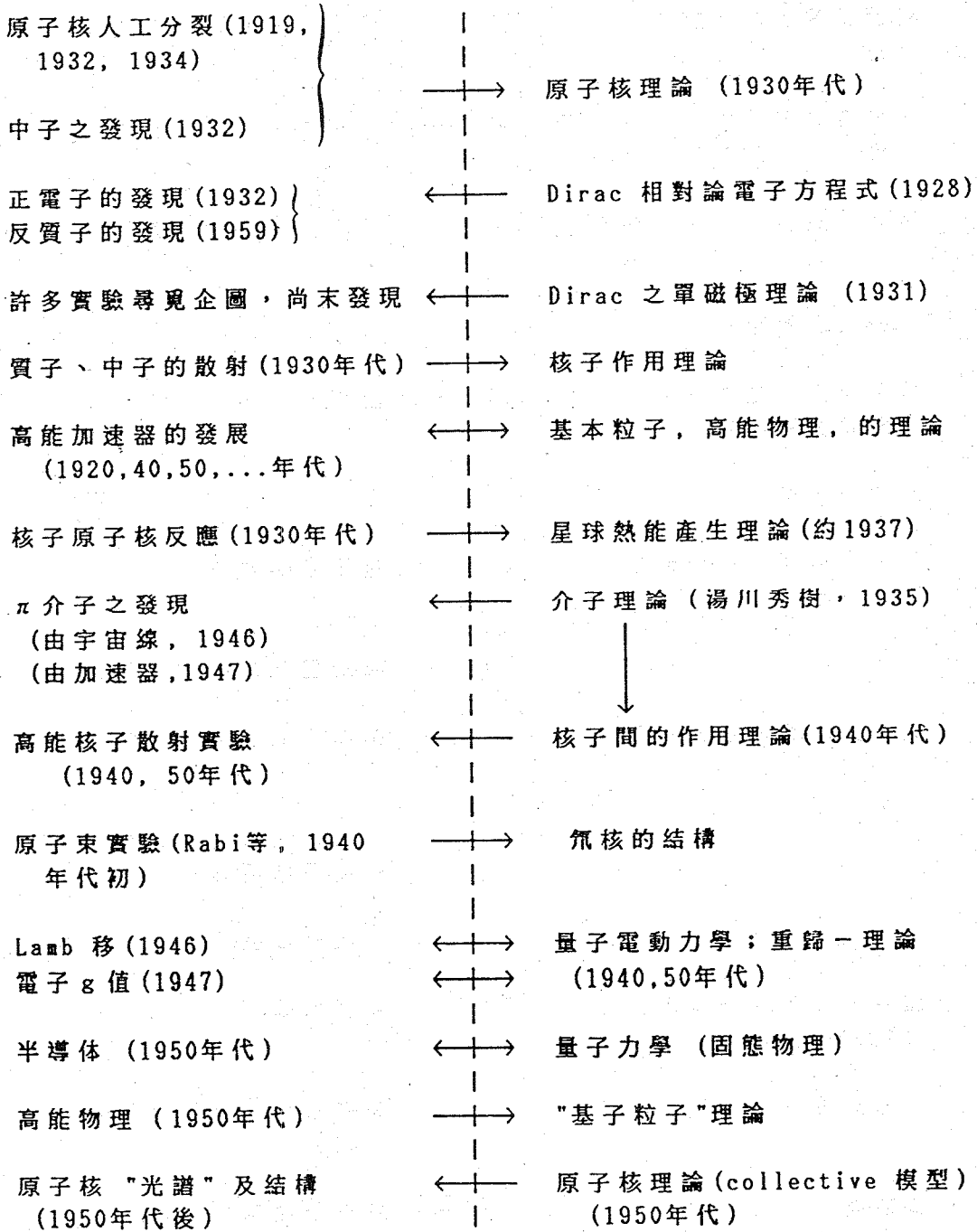
至廣義相對論與量子力學的互不相容問題，則更非本文所能闡述清楚的不作此試圖了。

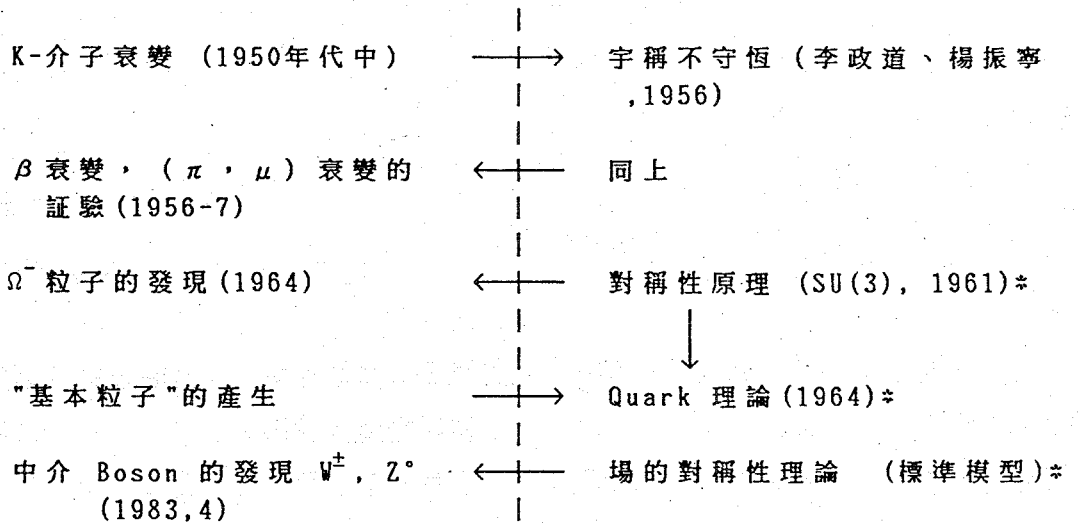
為本文之結，筆者將再著重：物理的進展，既非純由現象、實驗歸納而來，亦非純由理論演繹而來，而係由「實驗」與「理論」二者不斷反覆証驗推進而來的。三百餘年來物理學的重大進展中，「實驗」（現象的觀察）與「理論」（新觀念及假設的引入及演繹）的互為因果的關係，可以箭向表之如下。

現象，實驗		理論
物體在地面上的運動	→	伽利里奧、牛頓的動力學 (十七世紀初，中葉)
行星的運動(刻卜勒定律) (十七世紀初)	→	牛頓的萬有引力論 (十七世紀中)
海王星、冥王星的發現 (十九世紀中，1930年)	←	同上
光的繞射(十九世紀初)	→	光的波動理論(十九世紀初葉)
蒸汽機的效率 (十九世紀初)	→	熱力學第二定律 (十九世紀中)
庫倫，安培，法拉第定律 (十九世紀初)	→	馬克斯威爾，電磁場論 (十九世紀中)
赫爾茲電磁波的發現 (十九世紀末)	←	同上
邁可遜、摩里實驗 (十九世紀末)	←	馬克斯威爾的建議
孤立波(Scott-Russell, 1842)	→	Soliton 理論(1890年代，1960 年代後)
氣體導電；電子之發現 (十九世紀末)	→	原子結構理論
邁可遜—摩里實驗	←	狹義相對論(1905)
黑體輻射光譜 (十九世紀末)	→	蒲朗克的量子論(1900) Bose 統計(1924)

光電效應的証驗 (米立根, 1910年代)	←	愛因斯坦的光子論 (1905)
固體低溫比熱	→	愛因斯坦理論 (1907); 固態理論之始
氫原子光譜 (十九世紀末) 拉塞福 α 散射 (1911)	→	波爾的氫原子理論 (1913)
Franck-Hertz 實驗 (1914)	←	同上
Stern-Gerlach 原子束實驗 (1921)	←	同上
氫原子 H_α 線微結構 (1920, 30, 40年代)	←	Sommerfeld 理論
放射性元素 (1900年代) Moseley 實驗 (1913) 湯木遜正電束之實驗 (1914)	→	同位素觀念
Perrin 的實驗 (1910年代)	←	愛因斯坦之 Brown 運動理論 (1905)
超導性 (1914)	→	B-C-S理論 (1957)
慣性質量與萬有引力質量 (牛頓 Eötvös, 1890; Dicke, 1961)	→	愛因斯坦的等效原理 (1905, 1915)
星光為日球偏折 (日全蝕觀察 1919)	←	愛因斯坦廣義相對論, 萬有引力理論 (1915)
水星近日點的前移 (十九世紀)	←	同上
引力紅移 (用 Mossbauer 效應, 1960)	←	同上

直接証實仍在追求中 (1960年代起)	←—	同上 引致的黑洞理論
許多實驗覓「重力量子」仍未 獲實証(1970-80年代)	←—	「引力」之量子化(1950年代)
雷射(maser, 1954)發現 雷射(laser, 1960)的發現	←—	愛因斯坦之「躍遷機率」理論 (1917)
Compton 效應(1923)	←—→	愛因斯坦光子論(1905)
恆星光譜(星的分級) (第廿世紀初)	—→	星球表面物理狀態理論(1922-3)
元素週期律	—→	庖立之不相容原理(1925)
原子光譜及 Zeeman 效應 (1920年代)	—→	電子自旋理論(1925)
同上	—→	海森堡之矩陣力學(1925)
電子繞射實驗(1927-8)	←—	德布洛依物質波假設(1924)
		↓
		薛略丁格波動力學(1926)
		機率性假定(1926)
		測不準原理(1927)
		↓
		波爾之互補原理(1927)
		↓
原子、分子的光譜及結構 (1920-40年代)	←—	量子力學(1927-8)
Raman 效應(1928)	—→	分子對稱性及結構理論 (1930年代)
β 衰變	—→	微中子理論(1931)





* 近卅年來粒子物理的發展, 可參閱顏東茂一文, 中國物理學刊, 第廿五卷第一期, 1987年春。