數學科疑難問題解答

本刊編輯室

國中數學第一冊

1.

(1) 是不是只有2，3，4，5，9，11的倍數才有判別法？

(2) 這些判別法是怎樣得來的？

答：(a) 2的倍數的判別法，需僅看個位數是否為偶數即可，其原因為一整數可表為10之倍數加個位數，而10可被2整除。

(b) 4的倍數：因一整數可表為100之倍數加上後二位數，而100為4的倍數，故僅需後兩位數為4的倍數即可，因此有下列兩類的情形：

(i) 當十位數為奇數，而個位為2，6時。

(ii) 當十位數為偶數，而個位為0，4，8時。

(c) 5的倍數，因一整數可表為個位數加10之倍數，故當個位數，可被5整除，即為0或5時，該整數可被5整除。

(d) 9或3的倍數，若一整數可依其位置排列法如下列形式：

$$a_n a_{n-1} \cdots, a_0$$

其中a_k表10^k位數字，則

$$a_n a_{n-1} \cdots a_0 = a_0 + a_1(9+1) + a_2(99+1) + a_3(999+1) + \cdots + a_n(\underbrace{999\cdots9}_{n\text{位}}+1) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + 9\text{之倍數}$$

故當$a_0 + a_1 + \cdots + a_n$，即各位數的和，可被9整除則整數為9之倍數，同理其可被3整除，則整數為3之倍數。

(e) 11 的倍數，因 $10^{2k}=\underbrace{999\cdots9}_{2k\text{個}}+1=1+11$ 之倍數，又

$10^{2k-1}=\underbrace{99\cdots9}_{2k-1\text{個}}0+10=10+11$ 之倍數$=-1+11$之倍數。

故 $a_na_{n-1}\cdots a_0=11$ 之倍數$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$

故在 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ 爲 11 之倍數，原整數爲 11 之倍數。一般而言，皆可利用 10 或 100 之關係導出判別法，如考慮 7 之因式時，因 $100=2\ (\text{mod } 7)$，故如 34568，可計算如下：

$$\begin{aligned}34568&=34000+568\\&=680+568\ (\text{mod } 7)\\&=1248\ (\text{mod } 7)\\&=24+48\ (\text{mod } 7)\\&=72\ (\text{mod } 7)\\&=2\ (\text{mod } 7)\end{aligned}$$

可見 34568 被 7 除餘式爲 2，而 34566 含 7 之因式其僅需將數依下列形式變化即可得 7 之判別式，其根據道理如右。

$$\begin{array}{r}\underline{3}4566\\ \underline{680}\\ \underline{12}46\\ \underline{24}\\ 70\end{array}\cdots\cdots\text{可被 7 整}$$

總之，各種判別法，可自己設立，可是在實用情形當然首要二因素爲簡便與實用才可，因此書中才局限於此。

2.

我們也知道，如果一個數的各位數字的和是 3 的倍數，那麼這個數也是 3 的倍數，例如 574131 這個數各位數字的和 $5+7+4+1+3+1=21$ 是 3 的倍數，所以 574131 也是 3 的倍數。

要討論一個數是不是 11 的倍數，我們可以將這個數的各位數字，依照順序一加一減，所得的結果如果是 11 的倍數，那麼這個數也是 11 的倍數，否則就不是，例如要判斷 2647271，我們只須看看 $2-6+4-7+2-7+1=-11$ 是 11 的倍數，就知道

2647271是11的倍數。

學生問：

① 爲什麼574131這個數各位數字的和 $5+7+4+1+3+1=21$ 是3的倍數，就可判爲574131是3的倍數？

② 爲什麼2647271利用 $2-6+4-7+2-7+1=-11$ 的結果是11的倍數，就可判爲2647271是11的倍數？

上列兩個問題，應如何向學生說明？

答：① $10^n \equiv 1 \pmod 3$

$574131 = 5\times 10^5+7\times 10^4+4\times 10^3+1\times 10^2+3\times 10+1$

$\equiv 5+7+4+1+3+1 \pmod 3$

② $10^n \equiv 1$ 或 $-1 \pmod{11}$ 當 n 爲奇數時（$10^n \equiv -1 \bmod 11$）

$2647271 = 2\times 10^6+6\times 10^5+4\times 10^4+7\times 10^3+2\times 10^2+7\times 10+1$

$\equiv 2-6+4-7+2-7+1 \pmod{11}$

$\equiv -11$

$\equiv 0 \pmod{11}$

對普遍的學生不容易說明，但對較高程度學生可利用10的乘方被3除永遠餘1；而被11除則餘1或不足（相向）之道理來說明。