

英國那飛爾中學數學課程計畫

林福來

國立臺灣師範大學數學系

這是一個正發展中（1986年10月至1991年10）的中學數學課程。這是研究與發展緊密結合的課程。

課程發展的靈魂人物是哈特博士（Dr. Kathlean M. Hart）。

哈特擁有雙博士頭銜。她是美國印地安那大學教育博士，英國倫敦大學哲學博士，專業都是數學教育。進修高等學位之前，曾任中學數學教師十年，擔任過師資訓練工作。

哈特博士自1975年夏到1984年間，在倫敦大學專任數學教育研究員，先後協調三組研究群。1975年起接掌“中學數學與科學概念”計畫〔Concepts in Secondary Mathematics and Science；（CSMS）；1974～1979〕（Hart；1981），數學概念研究群的協調人，共完成十一個重要的數學概念單元的研究，自行主持分數與比例兩單元。緊接在CSMS工作之後，負責協調“中學生的數學解題策略與錯誤”計畫〔Strategies and Errors in Secondary Mathematics（SESM）；1980～1982〕（Hart；1984）。SESM的工作是，根據CSMS中發現的各概念的主要錯誤類型，進一步以面談的方式，分析錯誤的原因，再據此擬定診斷性教學教案，進行教學實驗。SESM共完成比例、代數、分數、實測與圖形等五個單位的錯誤分析與診斷教學，哈特博士主持比例單元。因為在CSMS與SESM兩計畫中，發現許多英國中學生拒絕學習老師教的數學方法，解題時依賴自行發展的學童法（Child-method），因此，就又設計了一研究計畫“學生的數學架構”〔Children's Mathematical Frameworks（CMF）；1983～1984〕〔Hart et al；1987〕，進入教室視察從具體教具操作學習到數學公式學習之間的轉型現象。在CMF中，哈特自己共完成立體體積、分數、減法運算、圓周長等單元學習的轉型調查。

在1984年，接受英國政府邀請，擔任皇對督學（Her Majesty Inspector（HMI）），

負責考察中小學校的數學教學。擔任 HMI 期間，自言興趣還是在研究工作上。

在 1986 年，那飛爾（Nuffield）基金會決定繼中小學自然科學課程，小學數學課程之後，開始發展中學數學課程。基金會負責人找上哈特博士，開門見山說“不管你現在薪水多少，我們付你更多，請主持我們的中學數學”。

是高薪？是興趣？抑兩者都是？哈特博士接下那飛爾中學數學課程主持人的職務。年薪比一般英國大學資深教授還高。

哈特博士憧憬着，中學生都將有機會享受那
“帶來美好回憶的數學課”

哈特博士，她，

了然學生的學習狀況，
以研究數據為依歸，
相信有實證檢驗的理論，
全力為數學教室脫胎換骨，
期望數學學習的新生。

哈特博士這樣的人，主持發展的課程，其精神、內容與特色，都是我們樂於見識的。

一、課程精神

那飛爾中學數學課程是針對全體中學生而設計。

強調過程（process）的學習。哈特博士的看法是：

“學習數學內容雖然重要，但一般在中學數學所學的知識與方法，一旦離校後，在成人日常生活中却很少再用到。成人生活中需要的一些基本能力，像清晰的思考、組織能力、連繫關聯性及清楚表達觀念等，都可從數學學習中培養。

解題活動（problem solving）與探索活動（investigation）對於培養這些能力的貢獻，遠非單調機械性的技巧演練可比。因此，應多提供多發展此類活動，並以此類活動的成果，做為學生學習進展的成績報告。強調解題與探索的過程，絕不會因此減低向來強調的“正確且合理的答案”之重要性，却可同時激發全體學生的能力發展”。

“過程”可分成三段，即開始（starting）、實作（doing）與報告（reporting）。每一階段又可細分成若干小步驟，計畫中擬出二十個小步驟，大致上將可涵蓋課程中的核心教材中的各單元。

二、課程全貌

一、教材架構

整體課程將發展三種教材：

1. 核心教材 (core material)，占學習時間 $\frac{2}{5}$ 。

2. 層次教科書 (level books)，占學習時間 $\frac{3}{5}$ 。

3. 教師資源。

三種教材的一般構想，簡述於下：

1. 核心教材：

目標：提供活動，讓學生使用已學過的數學 (to use maths) 教材包括探索 (investigations)，專題研究 (projects) 及解題活動。

教材設計成適合以合作方式學習的班級性教學及小組教學。施教方式鼓勵提供學生表達的機會，像討論、口頭問答與陳述等。

核心教材的內容可以跟層次教科書的內容連繫，但學生活動所需的數學預備知識並不依賴層次教材。

2. 層次教科書：

目標：供學生學習新的數學單元 (to learn maths)。

配合中學會考 (GCSE ; 11 ~ 16 歲) 的課程需求，將數學內容分成若干單元，每一單元又根據學生的概念了解層次設計成若干學習層次。建立單元內層次的基礎，將依據實證研究結果，例如 CSMS、SESM、GAIM (Graded Assessment In Mathematics) APU (Assessment of Performance Unit) 等計畫的報告。發展好的層次教材還經試教檢驗是否具進展性，即教材是否提供學生從低層次進展到較高層次的充分準備。

層次教材的發展，希望讓幾乎所有的中學生，在每一單元都有適合自己程度的學習教材。

每個單元施教開始，即需先檢定每位學生的了解層次。

層次教科書的內容包含說明，示範例題，有限的練習題、習題、遊戲 (games)，使用相關材料，應用等等。

3. 教師資源

教師用的資源，材料可分成三類：

- ① 一般性。
- ② 關於層次教科書。
- ③ 關於核心教材。
- ① 一般性

一般性的資料以改進數學教學為主。它將包含文獻上數學教學的研究成果與建議，例如 SESM 的報告。這部分資料對各校的學科主席特別重要，他們將是校內教學討論會的主導，負責校內的在職訓練。

② 關於層次教科書

包括各單元的教學策略、評量、學生推理的錯誤分析以及學習成就紀錄等建議事項。

③ 關於核心教材

包括錄音帶、幻燈片、投影片及要點說明。老師根據這些資源提供有趣的數學應用活動。

二、研 究

1. 既有研究文獻，將充分反應於教師指引及學生用的教材設計。
2. 另設兩個研究計畫，以進行不同教學方法的效度檢驗及進展性教案的設計與實驗。
3. 研究文獻尚缺，而時間、人力預算上無法兼顧的大研究問題，暫以班級性小型研究的結果為依據。

三、教室經營

1. 中學生每週五節數學課，兩節上核心教材，三節上層次教材。
2. 中學的第一年中，預定檢定出每個學生各單元的了解層次。班級內分組教學時，相近了解層次的學生即可分在同組。
3. 核心教材強調口語表達及討論。學生可兩人一組，編混合能力小組或編同了解層次組。
4. 教學指引中將提供不同的評量方式，包括解題過程的評量與數學技能的評量。

四、實 驗

實驗學校將包括中學（11～16歲）及貫連中、小學的中級學校（9～13歲），開始發展的教材是中學一、二年級（11～13歲）用的核心教材與層次1～5的層次教材。第1至第5層次的教材，以配合較差40%學生的能力為原則。其中第1層次的算

術是給最差的 10 ~ 15 % 學生用的，實際上都是補救教材。

五、一般行政

1. 經 費

整個課程的起始預算是五年共四十萬英鎊（約台幣兩千萬元）。包括人事費、教材稿費、主持人出席國際會議差旅費。

2. 人事組織

主持人哈特博士，專任秘書一人，專任助理一人，專任研究員一至三人（1988 年度起由一人增至三人）。教材編寫群，約 15 位中學老師。另設顧問五人小組，顧問委員只負責評鑑，不參與發展。

3. 教材編寫費

按頁計酬，每頁被接受付 5 英鎊，經主持人審後再修定又付 5 英鎊，計 10 英鎊一頁。

4. 那飛爾基金會設在倫敦大學王家學院（Kings College）。哈特博士可收碩士、博士學生。大部分研究文獻整理都透過這些學生幫忙。

5. 哈特博士的工作年資列入其退休年資。

三、核心教材

一、前三年的活動設計

每年數學課共 $5 \text{ 節} \times 30 \text{ (週)} = 150 \text{ 節}$ ，核心教材占 $2 \text{ 節} \times 30 = 60 \text{ 節}$ 。

1. 第一年的活動設計

第一年的活動，可分成六項：

A. 引導講座（Lead Lecture）； $6 \text{ 節} / \text{單元} \times 2 \text{ 單元}$

B. 長計畫（Longer Projects）； $4 \text{ 節} / \text{單元} \times 2 \text{ 單元}$

C. 探索活動（Investigation）； $1 \text{ 節} / \text{單元} \times 12 \text{ 單元}$

D. 遊戲（Puzzles and Games）； $1 \text{ 節} / \text{單元} \times 7 \text{ 單元}$

E. 技能（Skills）：

- 閱讀；2 節

- 筆記；2 節

- 紀錄； $2 \text{ 節} \times 3$

- 估測； $2 \text{ 節} \times 2$

- 電算器； $2 \text{ 節} \times 2$

X. 其他：例如評量

第一年的第一學期，包括學生了解層次的評量檢定，以便將學生的學習層次定位。

2. 第二年的活動設計

- (1) 第二年鑑定學習層次的評量減少。
- (2) 涉及的技能較深，有些需講解。
- (3) 開始評量“過程”。
- (4) 較費時的“長計畫”活動，在課堂內開始，學生自己花時間完成。
- (5) 探索活動更具開放性。

第二年的活動有五項，時間安排如下：

- A. 引導講座；6 節／單元 $\times$ 2 單元
- B. 長計畫；4 節／單元 $\times$ 4 單元
- C. 探索活動；1 節／單元 $\times$ 14 單元
- D. 遊戲；1 節／單元 $\times$ 4 單元
- E. 技能：
 - 電算器；1 節／單元 $\times$ 2 單元
 - 坐標圖形；3 節／單元 $\times$ 2 單元
 - 估測；2 節／單元 $\times$ 2 單元
 - 解題技巧；1 節／單元 $\times$ 2 單元

3. 第三年活動設計

說明

* (1) 第三年與第二年活動類似。但學生的探索活動已開始被建立檔案，故需學生自己多花時間。

* (2) 長計畫的說明將在書裏介紹，學生自行花時間完成。

(3) 使用電算機及 LOGO 是技能的重點。

各項活動、時間安排如下：

- A. 引導講座；6 節／單元 $\times$ 3 單元
- B. 長計畫；4 節／單元 $\times$ 4 單元
- C. 探索活動；1 節／單元 $\times$ 6 單元
- D. 遊戲；1 節／單元 $\times$ 3 單元
- E. 技能；
 - 解題（證明）；2 節／單元 $\times$ 4 單元
 - 電算機；4 節／單元 $\times$ 3 單元

(超過 30 週，但希望電算機的時間可分到非數學課去上)。

* 學生探索活動及長計畫的紀錄檔案，將是未來會考 (GCSE) 成績的一部分。

二、引導講座實例——各地的數數

引導講座設計動機表現在哈特博士充滿憧憬的問話裏“中學裏，讓我們一再回味的課有幾堂？”引導講座預期在學生心底，留下美好的回憶。

預定設計的單元有：

- 各地的數數 (進位)
- 大象怎不會翻滾
- 自然界中的螺旋 (幾何圖形)
- 彩色玻璃 (形狀)
- 蘇格蘭鐵路 (傾斜度)
- 空中旅行 (空間、路徑)
- 樂器吉他的製作……等等。

下面介紹已發展好的單元：各地的數數

1. 教材與活動

• 師：聽從沒聽過的語言，聽得懂嗎？我們來聽一段看看。

• 錄音帶：阿巴路亞 (Abaluyah) 人數數，1 到 15。

• 師：聽不懂她講的話，猜得到她在說什麼嗎？

她在數數，她正在數 1、2、3，一直到 15。

她是阿巴路亞人，住在東非。

• 透明片—1 (指示肯亞的西部)。

• 師：在肯亞西部，靠近維多利亞湖。

• 師：數數是很基本的活動。每一種文化，講每一種語言的人都會數數。

世界上有多少種語言，知道嗎？

大概有五千六百五十一種。每種語言都有表示數的字。

這一節我們要聽幾種不同語言的數數。

你什麼時候開始學數數？太久不記得了，是嗎？小孩子學講話時，通常也就開始學數數了。

誰教你數數的？母親？兄？姊？

你是如何學的，有沒聽過弟弟、妹妹學數數？

有的話，大概還記得是押韻唱的，你一定知道一些押韻的數數歌。

- 錄音帶：數數歌（two little blackbirds）。

- 師：底下是另一首。

- 錄音帶：one, two, ……

- 師：多數語言裏，都有像這樣的數數歌。幾乎所有數數歌却只數較小的數，1 到 5，或 1 到 10，或 1 到 12。你知道為什麼嗎？

因為這些較小的數是小孩子感覺上最難學的，奇怪嗎？

有兩個原因，一是這些是小孩學話時開始學的幾個字。

另一個原因可能是你沒想過的，這些較小的數的字，每一個都很不一樣，所以難。

- 透明片—2（one, two, three, four, …, ten, eleven, twelve）。

- 師：這些字互相之間都沒有關係，所以難學。

小孩需要一直學新的字嗎？當然不必，大一點的數像 twenty-two, twenty-three, twenty-four …，這些字是前面的數字組合起來而已，很有規則。

所有語言的數字都像這樣有規則嗎？

如果有，跟英文的數字規則一樣嗎？

回頭再聽一次阿巴路亞人的數數，注意聽，看能不能聽出規則來。這次聽她往下多數幾個數。

- 錄音帶：阿巴路亞數數，1 到 25。

- 師：聽出規則了嗎？不懂的語言聽起來比較困難，這次我們放慢一點，並且把數出來的字在透明片上顯示出來。

- 透明片—3：（將透明片中的字先蓋起來，配合錄音帶的聲音，一個字，一個字打出來）。

- 錄音帶：阿巴路亞數數 1 到 25，相當慢。

- 師：現在我們可以看到規則了。1 到 10 這十個字很不一樣，然後，十和一，十和二、十和三，…二個十和一，二個十和二，…。規則跟英文數字很像。英文“twenty”，當然是“two-tens”兩個十）的意思，所以

twenty-one, twenty-two, twenty-three ……

就是 two-tens-one, two-tens-two, two-tens-three ……

因此，阿巴路亞語跟英語裏，數數都是以十為底進位的。

這種數系叫做十進位數系。

接着聽一段莫魯 (Moru) 語，在尤甘達的東西部。

- 透明片—1：(指示尤甘達的東西部)。

- 錄音帶：莫魯人數數，1 到 15。

- 師：聽出規則沒有？一不一樣的規則？

再聽一次，放慢一點，同時打出字來。

- 透明片—4：(將字先蓋住，配合錄音，逐字打出)。

- 錄音帶：莫魯數數 1 到 20。

- 師：看到十的規則了吧！

“bute” (唸成 boo-tay) 是十，“alo” 是一，十一是 “bute nga pa alo”，即十和一。一直到 “bute ritu”，兩個十，即是二十。

莫魯人數數也是十進位的。

但，再注意一下，還有另一個規則。(指透明片上的 njidrialo) 這是六。這字有點複雜。分解一下。“nji” 是五，“alo” 是一。所以 njidrialo 是五和一。

再看 7，“njidrieri”。“eri” 是二，所以 7 是 “nji” 和 “eri”，五和二。8 是五和三，9 是五和四。

莫魯數字另外還有一個進位數五。莫魯數字含有兩個進位數五和十。這是雙進位的數系。

為什麼莫魯人以五和十為進位數，知道嗎？

小孩子數數時，常用手指頭，所以五和十是許多語言中常用的進位數。

有用二十為進位數的，十個手指頭加十個腳趾合起來。

愛斯基摩人就有的以二十為底進位的。

再聽另一種語言。注意聽！看能不能聽出是以多少當進位的。

這是新幾內亞的畢內 (Bine 唸成 bec-nay) 人。

- 透明片—5：(打出新幾內亞 Papua New Ghina)。

- 錄音帶：畢內人數數，1 到 10。

- 師：多少進位的？再聽一次，並且看透明片上的字。

- 透明片—6：(配合錄音，逐字打出)。

- 錄音帶：畢內人數數，1 到 10，相當慢。

- 師：多少是進位的底數？

三對不對。他們進位數是 “nesae”，三。大一點的數就算成幾個三，十是三個

三和一，即

“ nesae-nesae-nesae-ipepa ”

新幾內亞這國家實在不可思議，只有三百萬人口，方言有一千零十種。

底下是他們的另一種方言，基魏（Kiwai）人的數數。

。 。 。 。 。 。 。 。 。 。

接續的教材與活動跟上面類似。繼續介紹基魏人的數系，那是以二為底進位；非洲薩伊（比屬剛果）的匹克米族（Pygmy）矮人的數系，以二為底進位，其另一特徵它是個有限數系，任何比六大的數，都以土語“ras”表示，意即許多。七、八、九、十，……都是“ras”，都是很多。因為匹克米族人生活簡單，不需要六以上的數，能夠每天獵得六隻叢林內的野豬已經夠多了。有限數系的例子還有，像澳大利亞的一些土著的語系也是。有限數系的語言，通常是狩獵族的語言，他們生活中不會碰到大的數；新幾內亞的胡利（Huli，唸成hoo-lee）人的數系是15進位，代表數的字同時代表另一種意義，例如一是“mbirira”，而mbirira也是左手小指的意思，“Homberia”意思是十二，也是胸膛。即代表每個數的字，同時代表身體的某一部位，數數時可以用說的，也可以指出代表該數的身體部位，這種方式的數數，通常叫做“身體數數”（body-counting）。而整個身體就是基數15。因此，胡利人說18，“nguiria na teberia”，意即“一個人跟三”。非洲南部的巴索托（Basotho）人，住在賴索拖（Lesotho）王國，數數時也是以身體數，不過只以手指頭。……。

2. 教師指引

（一）簡 介

教師指引中，包含供全班討論的點子，及學生作業中各問題的參考答案。

各地的數數這單元提供其他數數系統的具體例子，要學生知道我們的十進位系統只是其中之一。許多學生對於“位值”的概念很弱，阻碍數這單元的進一步學習，本單元提供了增強的機會。每個數數系統的基礎是“分群”（grouping），特別注意學生有沒有此體會。

（二）資 源

- 錄音帶中每一段已設計好，順着放即可。一段結束，留下相當的空白，讓你暫停。數數過程中，數與數之間也有頓時。兩者很容易區別。
- 透明片，除了教材附帶的外，仍須準備一空白片及水性筆。順便預備幾張卡片，好蓋住透明片。

● 幻燈片。共十片，內容分別是：

- ① 肯亞人，母親與小孩。
- ② 尤甘達人，種煙草農人。
- ③ 尤甘達人。
- ④ 賴索拖女孩。
- ⑤ 吐華魯 (Tuvalu) 小孩玩遊戲。
- ⑥ 新幾內亞小孩。
- ⑦ 新幾內亞，胡利人。
- ⑧ 新幾內亞，小孩划獨木舟。
- ⑨ 新幾內亞，母親與小孩。
- ⑩ 新幾內亞，母親與小孩編籃子。

(三) 預備知識

能數數，起碼從 1 數到 50。

九九乘法表中 2、3、4 這三數的乘法表。

(四) 分組方式

小組作業為宜。但下列問題 1、2、3 則須全班一起討論。

(五) 設 備

錄音機及透明片，不需其他設備。

(六) 評量方法

多數的學生作業，都有正 / 誤答案。

(七) 目的與過程 (作業)

練習以 2、3、4 為底，建立數系。

(八) 班級討論

甲、若班上有同學的母語非英語，請他們準備以母語教班上同學數數。這些數字要寫下來。

若班上沒有，請校內教外語的老師幫忙。

班上同學聽、學非英語的數數，並對照寫出的數字後，可以討論下列問題：

- 有沒有什麼規則？
- 進位的底數是多少？
- 猜下一個數怎麼寫 (說)？

- 下一個數如果無法決定，還需知道些什麼條件？
- 可以繼續寫多少個數字？
- 再下來，要再繼續需知道什麼？
- 利用上面這一數系中的數字一、二和三，造一個以 3 為底進位的數系，寫出 1 到 10。

乙、設想有一群基魏人，平常數數（2 進位數系）時雖有數字，但並無紀錄數字的
需求。最近新建了一間學校，如果你是老師，你要如何教他們寫數字？

- 每個數都需要一個代表符號嗎？
- 什麼數需要符號？
- 每個人創一些這些數的代表符號。
- 根據你的符號，怎樣寫 7 和 21？
- 這數系的優點、缺點在那裏？
- 用這符號系統寫你的年齡，你家門牌號碼，媽媽的年齡。

上述活動，將基魏人改成畢內人。再做一次。

丙、自創一種語言，將其中代表起始幾個自然數的字創造出來。

請你的同伴將繼續數的數字寫出來。

當各小組都玩過上述遊戲之後，全班一起討論幾個創得好的幾種數系，看看每一數系數數時會發生什麼困難。比較這些數系的優點、缺點？那一組創的數系最好？為什麼？

丁、略。

(九) 習題解答

- * (1) 21 : bute ritu nga pa alo.
- 22 : bute ritu nga pa rii.
- 23 : bute ritu nga pa na.
- 24 : bute ritu nga pa su.
- 25 : bute ritu nga pa nji.
- 26 : bute ritu nga pa njidrialo.
- 27 : bute ritu nga pa njidrieri.
- 28 : bute ritu nga pa njidrina.
- 29 : bute ritu nga pa njidrisu.

如果知道 30，就可以再寫到 39。知道 40，可以寫到 49 等等。

(2)~(9)略。

3. 習題

** (1) 以莫魯語寫出比 20 大的數。

你能寫到多少？還需要知道什麼，才能繼續數下去？

* 註：本題原問題就是下面的 3.習題(1)。

(**) 註：莫魯語 30 並沒在教材中介紹。

三、“各地的數數”單元的特色

1. 具象化

教材活動的編寫方式很接近劇本。

看幻燈片中的人，聽錄音帶中此種人的聲音，對照透明片上的字幕，再聽老師的引導，這種活動方式，既顧及教室內的設備，又已達到具象的效果。

或許，當學校視聽設備齊全時，此活動以錄影帶製作，具象效果更佳。

2. 數數系統設備

教材中介紹了二進位、三進位、五進位、十五進位、二十進位、十進位；雙進位數系、有限數系等。內容相當完備，選擇的語言，又都是學生一聽即可瑯瑯上口的。

3. 概念表現佳

結合數的進位與表數的文字規則，深化了位值的概念。

4. 易於推廣

這份教材完全是新開發的。活動中又須配合視聽設備，因此，如何將教材設計成易於推廣，方便每個老師教學使用，是教材編寫的重要關鍵。從上面的教材及教學指引的介紹，可以感受到這是一個用心發展的單元。老師只須遵照指示進行教學即可。

5. 開放性的討論

當學生跟隨教材，掌握住數的符號本質，數的文字表現與進位關係後，幾個全班性的討論點子，都很具開放性，尤其最後要學生自創語系，創數的符號，創數的文字，相當能滿足 12 歲學生好表現的心理。

6. 美好的回憶

教材中介紹的語系，易學有趣。六節課之後，許多同學可能相當熟練了。往後私下聚會時，碰到數可能就會發揮一下。

四、探索活動——兩個實例

A. 時鐘（一年級，十二歲使用）

1. 教材（學生自行閱讀）

- 一天 24 小時，一小時 60 分，1 分 60 秒。
- 每天的時間有兩種表示方法：
 - a. 以中午為準，分成上午（a.m.）及下午（p.m.）的幾點。
 - b. 從午夜算起，看是幾點。

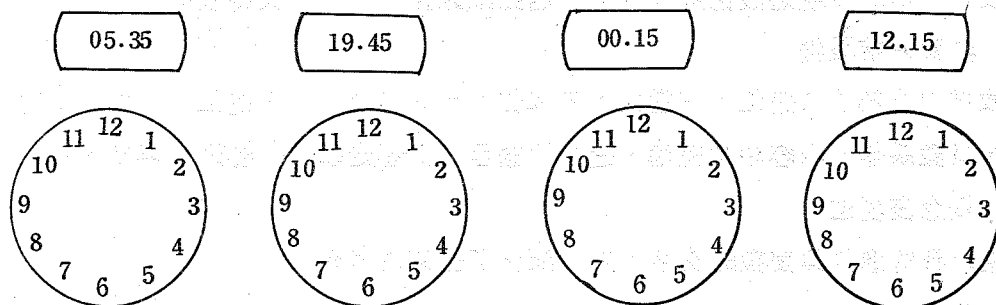
例如，3 a.m 是 03.00 時

2 p.m 是 14.00 時

9.35 a.m 是 09.35 時

5.55 p.m 是 17.55 時

- 我在電子（數字）錶上看到下列時間，請在時鐘面上畫上指針表示這些時間。



- （底特律～印地安那波里司汽車時刻表一張；略）。
- 這是美國的一張汽車時刻表，請照着描繪一張。
 - a. 表中多處出現 15"，你猜那是什麼意思？
 - b. 表中簡寫 MI、OH 和 IN 各代表那一州？
 - c. 東部時間〔Eastern Time（ET）〕什麼意思？
英國有類似的時間嗎？
 - d. 將表中出現的地名列出。畫出一條路線圖用來當歐洲人用的旅行手冊封面。

2. 教師指引

（一）教 具

尺、筆、紙。

（二）目 標

第一年核心教材中，許多單元需用到時鐘，本單元提供此基礎知識。

在時鐘面上畫指針紀錄時間，可以看出角度的實測能力，可做為學習層次教科書中實測單元的參考。

描繪汽車時刻表不簡單，要求學生先設計好再畫。

(三) 分 組

以個別學習為原則。

(四) 班級討論

時刻表可供討論 a. 符號的意義 b. 兩時刻間的時間。例如：

- 從甲地到乙地所需時間？這跟搭那一班車有關嗎？
- 表上有沒有汽車從來不停的地方？
- 停車用餐的次數有多少？
- 多少站有限時包裹的投遞？
- 在地圖上指出這些站？

(五) 學生錯誤

特別注意將 17.00 時讀成 7 時的學生。

B. 電視節目表（三年級；14 歲）

1. 教 材

甲、找上週整週的電視節目表。

將每一節目列在下面的分類表：

節目種類	新聞時事	喜 劇	泡沫劇	兒童節目	電 影	體 育	其 他
節目名稱							

- 你們小組各人列出的分類表是否完全一樣，如有不同，寫下你的理由。
 - 紀錄每週各種節目的時間分配。
- 紀錄上要同時能顯示每天各種節目的時間。
- 根據紀錄，回答下列問題：
 - a. 那種節目是在一週中特定的一天放的？
 - b. 那一種節目占時最多？為什麼？
 - c. 各種節目時間分配是否合理？

乙、電視應播什麼？

設想你正要申請電視第五頻道的管理職位。

申請書中，同時要附上一週節目綱要，節目內容是另一回事，但須要把每天播那幾種節目，如何安排定出。

- a. 你的節目綱要將包含那幾種節目？
- b. 如何把你的構想充分表達在申請書上？
- c. 你是如何決定該播些什麼節目的？

丙、探索題

下列問題，小組商量看看那一題最有趣，選一題。

選定題目後，你的小組就要進行調查，收搜一些資料，幫你回答你們選定的問題。

- a. 什麼時段最適宜播兒童節目？
- b. 那一種節目最普遍（最多人看）？
- c. 需不需要早餐節目？
- d. 廣告是必需的嗎？

計 畫

- a. 進行調查之前，須先決定資料如何收集，如何紀錄。

- 設計單張的問卷調查表？
- 請人填表？
- 問那些問題？
- 問誰？
- 問多少人？
- 被問者的年齡要不要紀錄？

- b. 問卷調查前，設計一個表格來整理資料。

- 如何紀錄最好？
- 任何回答都能登錄嗎？

- c. 問卷調查之後，再想想看：

- 如何表現結果？
- 列舉式、表格式、圖形圖表、長條圖、或其他方式？
- 不同年齡群要不要比較？

報 告

- d. 敘述你準備回答的問題。

描述你的資料是怎麼收集的。

- e. 包含所有調查的結果。

包含任何你認為需要再收集的資料。

- f. 利用你得的結果，回答你的問題。

2. 教學指引

- a. 適用年齡與能力

三年後，任何能力群。

- b. 預備知識

- 時間的兩種計時方式（上、下午十二小時或二十四小時）。

- 時段計算。

- 統計。

- 讀表中資料的能力。

- c. 分組方式

本單元活動，鼓勵學生：

- 仔細計畫。

- 組織好調查工作。

- 以最恰當的方式作報告。

下列關於活動進行的建議，包括分組的方式。

第一節：

- 說明問題，以小組方式做第一部分甲的問題。

- 全班共同討論各組答案。指出跨兩種分類的節目。

討論下列問題：

- 一個節目列在兩種分類；有沒有關係？

- 集合的文氏圖會用嗎？

- 應不應該多增加種類？

- 討論到各組都能設計出下節要用的節目分類表。

將學校的上課表拿來當例子，有助於討論。

第二節：

須準備電視節目表或收音機節目表，要求學生做教材中乙的作業，強調報告中，需

- 以他們自己的話，將問題說清楚？
- 將收集到的資料，表達的很清楚。

關於丙，電視應播什麼？

開始時，全班一起商量一些構想，鼓勵各組從不同的角度，探討不同的問題。

鼓勵每組將收集到的資料寫出來，供其他組使用。建議學生分三段寫報告：導言、研究與結論。

d. 延伸活動

各組可利用全班收集到的資料，去構思聖誕節那週的電視節目。

電腦將是有用的工具：

- 畫圖套裝軟體，幫助畫統計圖表，設計封面。
- 文字處理機，印電視節目表。

學生做作業時，需提醒他們思考兩個問題：

- 每項節目播出的最適當時間。
- 展示電視節目表的最佳方式。

五、兩個探索活動實例的特色

1. 技能方面

時鐘單元裏強調角度的估測能力及閱讀時刻表的能力。

電視節目單元強調以問卷調查方式進行解題活動，並配合電腦處理圖表。

這些都是原設計時，各該年度強調的技能。

2. 使用數學

時間的表示法和簡單統計方法都是學生已學過的單元，這裏提供真正使用它們的機會。

3. 形成問題的能力並沒強調

探索活動異於解題活動之一，即在於前者強調學生自己形成有意義的數學問題。這特色在此二單元都沒強調。

四、層次教科書

一、教材結構

層次教科書共分五個單元，分別是：數、空間、實測、機率與統計，及函數與結構等。

每一單元預計分成十二個學習層次。最低層次的標準是使人人有合適教材，最高層次標準以達到中學會考 GCSE 的要求為原則。

每一層次編成獨立的一本教科書型態，每一本層次教科書約 32 頁。每年起碼學習五本層次教科書。

二、教材發展的難關

數學概念的了解層次是主持人哈特博士的招牌。層次教科書的設計，自然起源於哈特博士的研究心得。可是，整套中學課程涵蓋面廣，不只個人的研究終歸只是幾個點，即使綜覽研究文獻，往往也找不到支持教材發展所需的許多研究資料。若干難關，有待課程發展時勉力突破，略述於下：

1. 知識起源問題

第一層次教科書的教材起點在那裡？

實測、機率與統計及函數與結構等三個單元，基本上起點都建立在學生對數與空間兩單元相當程度的了解上；例如，預定數第十層次教科書相當於函數第一層次。這三個單元不涉及中學數學的學習起點問題。

數與空間的第一層次教材從何處起頭？

哈特博士研究中學生數學概念了解層次時，曾點出教材的序列設計根據，不外乎

- ① 專家以整體數學結構為基礎，分析的單元序列，
- ② 數學老師經驗的教學序列，
- ③ 學生的數學概念發展（學習）序列。（參閱，Hart, 1981）

當上述三種資料不一致時，何者為重？哈特做研究時所持的觀點是，學生的學習序列應擺在首位。此觀點也延續到她主持的課程發展中。

關於數這單元，哈特面對的問題是

中學生人人都具有之數的概念，是什麼？

有關數的概念研究，自然不乏文獻資料，不過，所有文獻討論的對象幾乎都是六、七歲學生的數的概念，有更小的對象，卻沒有中學生的基本數概念研究。因此，哈特面

對的問題需要靠進一步的研究來處理。處理方法，自然是根據研究文獻中所顯示的小學生之基本數概念，設計面測與筆測問卷，進行局部的地區性班級調查。研究結果，發現英國中學生，98%以上都具有“往上數”(counting on)的能力，即一般的數數1、2、3，……，25，但不從1數起也能往上數。

根據研究所得，學習數第一層次教科書的預備知識定為：

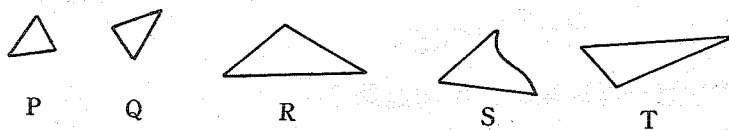
- ① 能聽寫一位、兩位和三位數字，
- ② 能將一組小於25的數，依大小次序排列，(因數數時，已依照次序數)，
- ③ 能說明“多於”的意義，且能將兩群個數皆小於7的東西，區分出那一群較多，
- ④ 能將10、20、30，……，70、80這組以10為單位的兩位數，遇缺補足。

上述的預備能力，從測驗結果已證實98%的11歲中學生都具備。(鑑定試題，參閱附錄……)

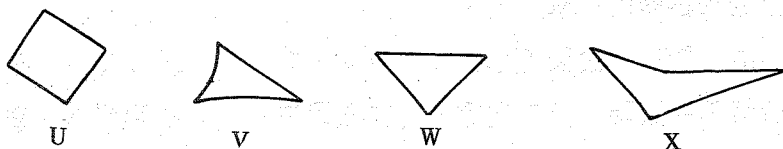
關於空間單元，文獻上最著名的是Van Hiele的幾何概念發展層次理論。許多實證檢驗過此理論的真實性。美國芝加哥大學進行的中小學數學課程研究計畫，中學數學組主持人Usiskin教授根據Van Hiele的理論，發展幾何教材。Usiskin發展出的幾何知識起點如下：

(一) “能根據外形分辨圖形”

例如 1. 下列圖形那些是三角形？

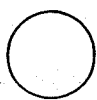


2. 下列圖形那些是三角形？



(二) “學生靠形狀認識長方形…，長方形看起來跟正方形不同”

例如 3. 下列圖形那些是正方形？



J



K



L

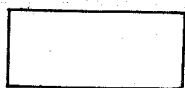


M

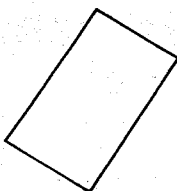
4. 下列圖形那些是長方形？（圖形如例 3 所示）

- “第一層次的幾何知識，基礎是“眼見”為憑”。

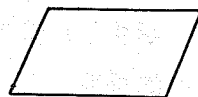
例如 5. 下列圖形那些是長方形？



S



T



U

（以上實例與說明，錄自 Usiskin 教授編的教師手冊）。

Van Hiele 的理論及據此理論發展的第一層次教材，既有文獻可考，哈特博士面對的問題是：

此第一層次的幾何教材，是否就是英國 11 歲中學生的學習起點？

換句話說，從理論上看，這些第一層次教材已是最基本的，如以“專家的觀點”來做教材序列的發展依據，也就別無選擇了。哈特博士想要知道的是，有多少 11 歲的中學生，具有學習此第一層次幾何的能力？

哈特就根據文獻，發展面測及筆測試題，以班級性測驗的方式，檢驗英國 11 歲中學生的幾何最基本知識的了解情形（研究方法完全跟中學生數學概念了解的研究一樣，只是樣本較小）。研究結果顯示，有 85 % 的 11 歲中學生能夠靠外形辨認圖形名稱。哈特博士決定以此做為空間單元的第一層次教科書的起點。

2. 各單元層次間的橫向相關

數第一層次教科書 95 % 以上的 11 歲中學生有能力接受。空間第一層次的目標是供 85 % 的中學生學習。數發展到第四層次，目標也是 85 % 的中學生。因為空間第一層次與數第四層次，目標同時是學生能力群 85 %，所以哈特自然想到，學習空間第一層次與學習數第四層次的學生預備知識是否一致？換句話說，下列幾個問題有待小型研究加以澄清。

(1) 能學習空間第一層次教材的學生，是否都具有學過數第一層次、第二層次及第三層次的能力？

(2) 反之，具有數第一層次、第二層次能力的學生，是否能力仍不足以學習空間第一層次教材？

(3) 探討上述問題時，各層次的能力“定性”是否清晰？

目前（1988年六月）已檢驗過的小型樣本，七名空間第一層次的學生，六名對數的了解至少在第二層次以上，是否都已達第三層次，還得面測檢定。

上述的問題，當各單元的層次教科書都進入發展階段時，顯然都會碰到。不過，較高層次間的橫向關聯性，顯然會比低層次的橫向關聯容易檢定。因為較好學生的能力特性比較容易測出，學生程度愈差愈難測其能力。

3. 各單元層次的垂直發展

數這單元起始的六個層次，基本上都將是小學學過的教材。須要再學這些層次教科書的學生都是小學沒學好，有待診斷補救的學生。

發展此種教材，有幾個問題需要解決：

- ① 文獻上有關小學生數概念的了解層次，如何修定成中學生低或就群的了解層次？
- ② 教材如何兼具補救與挑戰兩種看似矛盾的特性。

空間單元的第一、第二層次教科書，也同樣面臨上述兩個問題。

顧慮待診斷補救學生的學習能力較低，所以數的第一到第六層次的進展，可說步步為營，緩慢前進。例如，第一層次是以95%的能力群為對象，到了第四層次，進展到以85%的能力群為對象。關於能力特性，第一層次學生數數時，需要一個一個往上數，例如面對教具——數數，即數到22，第一層次學生數的方法是1、2、3，……，22。到了第二層次的學生，數到22，已能10、20、21、22這種數法，而不必逐一地往上數。第三層次，已了解加法兩種意義，減法兩種意義。第四層次，再發展到減法四種意義中的另外兩種。

空間第一層次與第二層次同樣是小學教材。第一層次對象是85%的11歲能力群，第二層次對象是70%的11歲能力群。第一層次的對象無法再增多，主要原因是英國小學數學中，空間的教材，介紹的較少。至於第一、第二層次之間的能力差距，不像數的層次那樣漸進的原因，可以試着從這兩層次教科書的綱要來分析看看。

空間第一層次教材綱要

本教材討論圖形的辨認與命名，不含圖形的特性分析。綱要如下：

1. 那些是立體圖形，那些只能畫在平面上。
2. 空心與實心圖形。
3. 平面與曲面。
4. 紙上的圖形。
 - (a) 將一圖形任意移動，然後找同樣的圖形。
 - (b) 在紙上畫不同方向的同一圖形，找同樣的圖形。
5. 直邊，畫直線段的技巧。
6. 從紙上圖形中找出正方形。
7. 在格子點紙上，畫多邊形（不一定正多邊形）。
8. 封閉圖與開口圖。
9. 畫長方形，分辨長方形與正方形。
10. 認識圓。
11. 利用圓規畫圓。
12. 用紙摺長方形與正方形。

空間第二層次教材綱要

本教材討論圖形的辨認與命名，不含圖形特性分析。

1. 立方體
 - (a)面的形狀；(b)面上的角落（corner）；(c)頂點；(d)隨便轉，形狀一樣。
2. 長方體
 - (a)面的形狀；(b)面上的角落；(c)頂點；(d)隨便轉，形狀一樣。
3. 角
 - (a)閉圖內的角；(b)角與轉的量。
4. 比較角的大小，那一個最大？那一個最小？
5. 角落、直角、平角。
6. 依照已知長度與方向（無測度的，如公分、度等）畫直線。
7. 正方形、圓命名。
8. 圓的重要性。（在地上滾動、車輪、齒輪）。

9. 直角的重要性（如何保持物品正直）。

10. 利用模版畫圖或圖案。以模版畫的圖形會變樣嗎？

從綱要中，可看出第一、第二兩個層次的教材，一再地以二分法，介紹圖形，像立體圖與平面圖，空心與實心，圓與方，長方與正方，最大與最小，封閉與開口等等。第一層次僅看外形，沒有大小之分，第二層次首次出現憑外觀判斷角的大小。第一層次中的長方形與正方形是討論第二層次中的立方體與長方體的基礎。從認識圓到討論圓在生活中的應用也跨越一個層次。幾個重要，常見圖形的認識是此二層次的教材主體。兩層次間不能再細分，哈特可能有她的實證基礎。實際編寫教材時，如何保握住層次間的“發展性”，是另一重點。

哈特認為較高層次的教材發展，將比上述討論的這些起始教材容易。

4. 教室經營

層次分得愈多，教室組織與經營就愈困難。例如數第一層次教材，11 歲的中學一年級最多 5 % 需要學，每班 30 人，5 % 只有一到兩位同學。這種情形，同樣發生在數這單元的前幾個層次教材。採取混合能力編班的班級，老師如何同時幫助學生學習十種左右的教材？全校採取能力分組，把需要診斷補救的中學一年級學生，集中教學，是哈特的構想。

5. 概念統整

層次教科書，每一層次涉及的數學概念都很孤立。例如，分數、百分率、比與比例及有理數將分散在許多層次的教材內，期待學生學完這些單元，再自行統整，感受這些單元的關聯，當然是不切實際的奢望。因此，如何設計統整教材，將是教材發展中的另一挑戰。

五、課程特色

一、數學課重新定義

中學數學課的五分之二讓學生進行解題活動、探索活動，以使用學過的數學概念與方法為宗旨，另外的五分之三才學習中學的數學新單元。

近十年來，先進國家像英、美等國，數學教育界一再強調數學教學應以解題與探索活動為主體。學生進行解題與探索活動之時，每個人在腦中都攜帶着自己的工具箱，箱內裝着學過的概念與方法，工具的性能，工具是否齊全，會不會選擇適當的工具，以及

能否將工具組合形成更具威力的工具等等，都影響解題活動的品質。基本上，解題活動依靠的是已擁有的工具箱。能夠活用工具解決問題，已是上驕，很難期望一般學生能創造工具。因此，數學教育界鼓吹的解題活動，落實於教學時，就得發展配合學生工具箱內工具的問題。如果這類活動重要，那就得明確定出它在數學課的地位。

那飛爾中學數學課程的處理方式，就是上述 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{3}{5}$ 的分配。 $\frac{2}{5}$ 的教材叫做核心教材

，由名稱可見其重要性。

進一步，在占五分之二數學課的核心教材中，哈特博士以她出身藝術家庭，熱愛歌劇的天性，又平空創造出所謂的引導講座，期望發展出讓學生留下“美好回憶的幾堂數學課”。

這樣的課程，一旦推廣，可預見的是傳統令多數小孩畏懼呆板的數學課，將會脫胎換骨。繼起的是多樣化的活動，我個人的感觸是，“數學課竟然也可以是這樣！”

二、全民教育

對那些在小學數學沒學好而可能學好的學生而言，上了中學，進入新的環境，將是一次新的學習機會。哈特博士認為，這些學生，向來沒被正確地引導，診斷補救過。一般的研究，強調的是新近學習的單元之診斷補救，幾乎沒有研究，針對中學新生進行整體小學數學的診斷補救。如果這些學生沒有恰當的診斷補救教材可學，那可以想見的是，五年的中學數學課將又是白白浪費掉。哈特基於她的教育家氣質，她決心不顧一切困難，發展這些學生的診斷補救教材，例如，數的第一至第六層次，空間的第一、第二層次教科書都是。

三、研究導向

經過十多年的數學教育研究工作，哈特很自然地養成了她的“研究氣質”。接受新觀念，但強調實證檢驗。

整體課程發展，不僅有特定的專題研究計畫，即設計教具操作學習與數學公式間的橋，進行教學實驗；另外，許許多多的教材發展問題，就如同第參節討論層次教材時介紹的一樣，也都以小型研究方式處理。各個教材單元，同時也找研究生或訪問學者，進行研究文獻探討，充分利用研究資料來發展教材。例如，哈特曾問筆者“中學比例教材如何開始介紹？以圖形放大、縮小當情境好不好？”這類問題若沒有研究數據如何回答？

四、強調過程

數學學習的目標定在培養“處理問題的過程”的能力，而非數學知識的增強。

落實此目標的具體設計就是核心教材的解題活動與探索活動。

解題的過程將是評量學生學習成就的重點，改變了傳統的成績評量重點。

參考資料

1. Hart, K. M. (1981) , *Children's Understanding of Mathematics* : 11 ~ 16 , London : John Murray.
2. Hart, K. M. (1984) , *Ratio : Children's strategies and Errors* , Windsor, Berks, NFER - Nelson.
3. Hart, K. M. Johnson, D.C. Brown, M. , Dickson, L. , & Klarkson, R. , *Children's Mathematical Frameworks* : 8 ~ 13. A Study of Classroom Teaching, Windsor, Berks : NFER - Nelson (in Press) .
4. Hart, K. M. (1981) , *Hierarchies in Mathematics Education* , Educational Studies in Mathematics , V.12 , # 2 , Pg 205 ~ 218.