

中國大陸的中學數學課程現況

林福來

國立臺灣師範大學數學系

報導中國大陸的中學數學課程現況，理當搜集第一手中文資料來整理，情勢上却僅能就已發表及將發表的文獻加以「譯還原」。香港大學梁貫成講師，就大陸公布的資料，以及其訪談大陸數學教育家跟教學參觀的所聞所見，發表了一篇「中國（大陸）的中學數學課程」（Leung, 1987），以下稱之為「梁文」。又廣西師範學院的徐先生與黃先生（譯音），以「在地人」的身份，在一位加拿大英屬哥倫比亞大學Robitaille教授的鼓勵下，寫了一篇「中國（大陸）中學數學課程發展現況」（Xu and Huang; 1988），即將刊載於著名期刊「數學之教育的研究」（Educational Studies in Mathematics），該期刊主編Bishop博士讓我在「許、黃」文未登出前先閱。本文的主要參考資料就是梁文與許、黃文。

談中國大陸的數學課程，幾個我們台灣的數學教育工作同仁急想知道的問題，大概是：

- 他們教些什麼？
- 他們怎麼樣教的？
- 他們的課程有那些特色？
- 他們考些什麼？

從這幾個問題出發，也盡可以涵蓋西方國家慣常使用的數學課程架構中：課程目標、學習理論、教材內容、教學方法、教學評量、課程評鑑等等主要的成分，只不過次序上不一致。西方國家強調目標確定後才能談教材內容。事實上，有些數學課程研究計畫的課程目標是內容編寫完，才回頭擬目標的。筆者既無法得知中國大陸的數學課程發展過程中，目標與內容何者為先；教學的理論與實際教學方法，又是孰先孰後，或是漸漸

改進的。因此，本文報導時，將不遵守一般數學課程的慣用次序，僅從最感興趣的問題著筆。

壹、教些什麼？

基本上，大陸中學數學課程由（偽）中央統一規定，初中三年使用的教材綱要只有一套，五族四千萬初中生共用。初中數學教科書也是（偽）中央教育當局審定。高中則分成普通高中與重點高中，重點高中學生資賦較普通高中生為優，普通高中全體共用一套教材綱要。此套綱要外加若干單元合成另一套重點高中的教材綱要。初、高中綱要與章節單元如下：

一、初中數學教材綱要（參閱Leung，1987）

算 術 與 代 數	幾 何	機 率 與 統 計	三 角
初一 1. 有理數(28)* 2. 多項式的加、減 運算(19) 3. 一元一次方程式(30) 4. 一元一次不等式(8) 5. 二元一次聯立方程 式(18) 6. 多項式的乘、除運 算(23) 7. 因式分解(23) 8. 有理式(21)			

算 術 與 代 數	幾 何	機 率 與 統 計	三 角
初二 1. 平方根與立方根(12) 2. 無理式(22) 3. 指數(16) 4. 二次方程式(52)	1. 基本概念(16) 2. 平行線與垂直線 (18) 3. 三角形(40) 4. 四邊形(20) 5. 多邊形面積與畢 氏定理(8)		
初三 1. 函數及其圖形(26) 2. 對數(22)	1. 相似形(36) 2. 圓(48)	1. 統計簡介(16)	1. 解三角 形(32)

*註：括號內的數字，代表該單元的教學時數。

二、初中數學教科書內容

根據（偽）國定教材綱要所編寫，全大陸初中生通用的一套初中實驗教科書，全套共八冊。六本教科書及兩本習作，第一冊至第三冊從代數介紹起到基本函數止，第五冊至第七冊介紹幾何。第四冊及第八冊分別是代數與幾何的習作。

初中實驗教科書的教材章節如下：（參閱 Xu and Huang, 1988）

年級	代 數 與 函 數	幾 何
一	集合 方程式與函數 一次方程式 一次聯立方程式 一次（線型）函數 多項式 因式分解	平行線 平移 三角形

年級	代 數 與 函 數	幾 何
二	實數 分式 根式 不等式 二次方程式與二次函數	四邊形 向量及其運算 相似
三	n 次函數 指數函數 對數函數 三角函數 反三角函數 解三角方程式	三角函數 解三角形 圓與多邊形

三、高中數學教材綱要與內容

重點高中有而普通高中沒有的單元，將在章節名稱前打星號（*）示別，打黑點（●）的就是普通高中的教材綱要及內容。（參閱 Leung, 1987）。

甲、代數

1. n 次函數、指數函數、對數函數（36 小時）：

- 集合、子集合、交集、聯集、餘集。
- 映射，函數。
- n 次函數及其圖形、單調函數、奇函數與偶函數。
- * 一對一對應，逆映射。
- 反函數、函數及其反函數的圖形關係。
- 指數函數、對數函數、對數換底、簡易指數方程式與對數方程式。

2. 三角函數（34 小時）：

- 廣義角、弧度量、任意角的三角函數、等角三角函數間的關係、三角公式，給定

三角函數值求角度。

- 單位圓上的三角函數值表示法，正弦與餘弦函數的圖形及其性質，函數 $y = A \sin(ax + b)$ 的圖形，正切與餘切函數的圖形及其性質。

3. 三角函數的和、差角公式（26 小時）：

- 正弦、餘弦及正切函數的二倍角公式、半角公式。
- 積化和、差與和、差化積。

4. 反三角函數及簡易三角恆等式（12 小時）：

- 反正弦函數、反餘弦函數、反正切函數、反餘切函數。
- * 三角恆等式。
- 基本三角恆等式。
- 簡易三角恆等式。

5. 數列與數學歸納法（14 小時）：

- 數列；等差數列、等差數列的一般項及前 n 項和；等比數列、等比數列的一般項及前 n 項和。
- 數學歸納法、數學歸納法的例子與應用。

6. 不等式（22 小時）：

- 不等式、不等式的性質、不等式的證明、求解不等式、絕對值不等式。

7. 行列式與線型方程組（16 小時）：

- 二階行列式及二元一次方程組；三階行列式、三階行列式的性質、三階行列式的行、列展開式，三元一次方程組。
- * 三元齊次方程組、四階行列式及四元一次方程組。

8. 複數（18 小時）：

- 數的概念與複數概念的發展，複數的向量表示法。
- 複數的四則運算、複數的極式及其運算。
- * 複數的指數表示法。

*9. 一元多項式及高次方程式（22 小時）：

- * 一元 n 次多項式、綜合除法、餘式定理、因式定理、因式分解。
- * 一元 n 次方程式根的個數及根與係數關係，代數基本定理。

10. 排列、組合與二項式定理（18 小時）：

- 加法原理、乘法原理、排列、排列的公式、組合、組合公式、組合數的兩個性質。

- 二項式定理、二項式展開式的性質。

11. 機率（12 小時）：

- 隨機事件的機率，機會均等事件的機率，不相關事件的機率，獨立事件的機率，獨立重複試驗。

乙、立體幾何

1. 直線與平面（28 小時）：

- 平面、平面的基本性質、平面圖形的畫法。
- 兩直線間的位置關係，同垂直於一線的兩直線，對應邊平行的角，相異平面上二直線間的夾角。
- 直線與平面間的位置關係，直線與平面平行的條件與性質，直線與平面垂直的條件與性質，三垂線定理及其逆定理。
- 兩平面間的位置關係，兩平面平行的條件與性質，二面角、兩平面垂直的條件與性質。

* 2. 多面角與正多面體（7 小時）：

- * 多面角、多面角的性質。
- * 正多面體、多面體的變換。

丙、平面解析幾何

1. 直線（22 小時）：

- 有向線段，兩點間的距離，分點。
- 直線的傾斜角與斜率；直線的點斜式、斜截式、兩點式及截距式，一般直線方程式。
- * 二元一次不等式的圖解，直線的極式。
- 平行直線、垂直直線、兩線間的夾角、兩線的交點、點到直線的距離。

2. 圓錐曲線（24 小時）：

- 曲線與方程式，求曲線方程式，充要條件，曲線的交點。
- 圓的標準式，圓的一般式。
- 橢圓的定義及其標準式，橢圓的幾何性質與其圖形畫法。
- 雙曲線的定義及其標準式，雙曲線的幾何性質與其圖形畫法。

- 拋物線的定義及其標準式，拋物線的幾何性質與其圖形畫法。

- * 圓錐曲線的切線與法線。

3. 坐標變換（4 小時）

- 坐標軸的平移，平移化簡二元二次方程式。

- * 坐標軸的旋轉，旋轉化簡二元二次方程式。

- * 一般二元二次方程式的化簡與其標準式，二元二次方程式的討論。

丁、初等微積分

1. 極限（16 小時）：

- 數列的極限與其四運算法則。

- * 函數的極限與其四運算法則。

- * 連續函數。

- * 兩個重要的極限。

* 2. 導數與微分（20 小時）：

- * 瞬時速度、導數、導數的幾何意義，普通函數的導數，導數的和、差、積、商，合成函數的導數，基本函數的導數公式，隱函數的導數，二階導數。

- * 微分、泰勒式逼近。

* 3. 導數的應用（18 小時）：

- * 中值定理，遞增（減）函數，函數的相對極大值與極小值，（絕對）最大值與最小值，二階導數的應用。

* 4. 不定積分（16 小時）：

- * 導函數、不定積分、積分的基本規則、不定積分的運算公式、有向積分、變數變換積分法、分部積分法。

* 5. 定積分及其應用（14 小時）：

- * 定積分的概念、積分基本定理、平面圖形所圍的面積，旋轉體的體積、平面曲線的弧長，旋轉體的表面積。

四、數學資優生的教材

根據項武義所編的一套教材，（偽）中國科學院數學所負責重新編寫成一套中學六年的教科書，共六冊，每一冊給一個年級，從初一到高三六個年級使用。對象則是最優

秀的中學生。各冊大致內容如下 (Xu and Huang, 1988) :

第一冊：代數

- * 數的運算，有理數系。
- * 文字符號（變數）。
- * 利用數系的性質與等式，求解方程式（方程組）
- * 多項式的運算。
- * 分離係數法，綜合除法與餘式定理。

第二冊：幾何

- * 直觀幾何。
- * 集合與簡易邏輯。
- * 演繹幾何。

第三冊：函數

- * 不等式。
- * 坐標——數與圖形。
- * 初等函數。

第四冊：代數

- * 多項式理論。
- * 方程式論。
- * 線型方程組。
- * 機率與統計。
- * 複數。

第五冊：幾何

- * 向量。
- * 解析幾何（向量法）。
- * 立體幾何（向量法，綜合法）。

第六冊：微積分

利用逼近法、極值、函數的連續性討論微分與積分。

這套資優生教材跟普通中學生教材比較，一些較沒應用價值的單元與理論被刪去了。一些現代題材，像向量、逼近、微積分、機率與統計加進來了。

一般而言，教材單元序列有所謂直線式與螺旋式。直線式的安排是每個要介紹的單元，從基本概念到所有相關性質，都集中講完，才進入另一個單元。螺旋式的安排則是將每個單元分出了解層次，某一時期內介紹屬於相近難度的了解層次的多個單元，許多單元依了解層次由易而難，一個層次介紹完，再介紹另一較高難度的了解層次，因此相同的單元，將會一再出現，每次出現難度愈來愈高。

從初中的各年級的教材綱要及教材內容，很清楚可以看出大陸的初中數學教材單元序列是直線式的。主要的教材著重代數與幾何。梁文（Leung，1987）中統計初中各學科的每週時數及全年時數，得知數學全年共 170 小時，占全部授課時數 17%，百分比相當高。其中初一、二、三各學年每週各有 5, 6, 6 小時的數學課。

到了高中，高一、二、三每週各 5 小時的數學，占全部上課時數的 15%。這情況跟許多其他國家初中階段比高中階段份量低，恰好反過來。不過，不管初、高中，數學都很受重視，這是肯定的。

高中的教材單元序列也是直線式。相對而言，立體幾何份量相當重，普通高中共 57 小時，重點高中共 64 小時，三個月以上的上課時間花在立體幾何上。重點高中所學的微積分相當深入。統計並未列入高中教材。實際上，微積分在高中因大專升學不考，很少學校教。

貳、怎麼樣教的？

一、教學參觀見到的教法

許、黃文（Xu and Huang，1988）提到大陸課堂內最常見的教法是講演法，直接灌輸，較少啟發。梁文（Leung，1987）中根據實際參觀教學，描述的也是講演法。參觀過六間中學的九節數學課後，梁文提到“問答式”雖在課堂上偶而會碰到，但很少很少被用。九節中的兩節完全沒有問答，其他幾節最多兩、三個同學被叫來回答問題。小組討論與小組活動這類學習方式，絕無僅有。梁先生參觀的某一堂特別的課，老師曾試著引導小組討論，但據其觀察學生的反應，顯然他們很不習慣此類學習活動（Leung，1987，p.45）。

因此，可以說大陸中學數學的教法就是講演法。

二、推動中的教學法

近年來北京、上海與武漢各有數學課程發展計畫，除了發展教材外，同時也實驗各種不同的教學法。理念是如何讓學生在教學過程中扮演主動的角色，以及擴展學習過程中，學生的參與程度。

根據許、黃文（Xu and Huang, 1988）介紹的幾套教學法，敘述於下：

甲、閱讀——討論——講解——習作

讀、論、解、作，這套教法是最著名的重點高中，上海育才中學實驗推行的，其教學過程為：

閱讀——學生在課堂上閱讀指定之教科書上的章節。

討論——閱讀後，學生在課堂內互相自由討論。

講解——老師觀察，傾聽學生的閱讀與討論，再就教材重點與疑難處進行講解。

習作——學生在課堂內做習題。

閱讀與討論這兩個步驟，目的在培養學生的自學（auto-instruction）¹能力，同時，學生也對教材有了基本的了解，講解這步驟可幫學生澄清概念，加深了解。習作目的除了培養學生解題能力外，還希望能疏解學生的學習負擔。

自從1979年起，讀、論、解、作教學法在育才中學的若干班級實驗，跟控制班比較的結果。實驗班學生的學習負擔已減輕，閱讀能力增進，自我表達的能力也加強了。

乙、知識內在結構導向的教法

上海景山中學也是著名的重點高中。景山提倡的教法，是根據數學內容的內在結構，將教科書上的教材分成若干個教學單元。每一個教學單元的教學步驟都照下列步驟進行，

- (1) 自學。
- (2) 講解重點。
- (3) 課堂習作。
- (4) 自行整理重點（auto-summary）。

上述四個步驟，除了(2)外，都由學生自己在課堂內進行。

根據實驗結果，發現如此教學學生的獨立學習能力大增。

丙、六步教法* (the method of six teaching modes)

六步教法的六個教學步驟，依序為：

- (1) 自學。
- (2) 啟發。
- (3) 複習。
- (4) 習作。
- (5) 更正錯誤。
- (6) 初步摘要。

六步教法強調教科書上的每一單元，都須依序達成六個教學步驟，更正錯誤是師、生共同進行。老師在習作進行中，講解重點。其餘各步驟都由學生獨自進行。

提倡六步教法的是湖北大學的李 (Lee) 教授，根據李教授的實驗報告，實驗班學生感覺學習較容易，平均成績也高於控制班學生。

布魯那 (Bruner) 的發現式教法也在湖南省被使用。

丁、中學數學自學輔導實驗計畫之教法——四段教法*

許、黃文 (Xu and Huang, 1988) 鄭重介紹的數學課程發展計畫，就是“ (偽) 中國科學院 ” 心理所盧 (Lu) 教授自 1965 年起所主持的“中學數學自學輔導實驗計畫” (譯名)，此計畫同時進行教材與教法的實驗。除了文化大革命 (1966-76) 期間，計畫被兩次停掉外，自 1965 年起，已連續實驗二十多年，目前有 2000 個以上的班級使用此計畫的教材、教法。盧教授提倡的教法，可分成“九點學習原理”“四段教學”“四型學生”與“評鑑”來報導。

1. 九點學習原理

經過長期的實驗，盧教授選擇了九點學習原理當做他發展教材的指標。九點分別是

- ① 適當的步伐，從小步漸進為大步。

*教法的名稱乃為行文方便，筆者所杜撰，非原名 (不詳)。

- ② 立即回饋，使學生可自行檢驗。
- ③ 使用前導原則，從已知推論未知。
- ④ 由繁化簡，學生技巧愈進步，計算過程可愈簡化。
- ⑤ 直陳重點。從題材中辨別重要的與無關的資訊；類化與歸納。
- ⑥ 避免僵化的反覆練習。
- ⑦ 促進聯想力，培養學生的彈性思考與一般化能力。
- ⑧ 培養學生循序的邏輯思考力。
- ⑨ 述明運算的理由，減低教材的語言敘述份量。增進學生了解定理與公式的證明。

2. 四段教學——歷程與原則

為逐漸培養學生自學的習慣，盧教授將初中的教學歷程分成四個階段。

第一階段，以指導閱讀方法為主要目標，學習如何閱讀教材，如何了解術語意義，如何整理整節的重要觀念等都是此階段的目標。

第二階段，目標是使學生逐漸接受自學的方法。在此階段的教學，每一節課的開始幾分鐘，老師先介紹教材概要，分配學習時間，並給與啟發性的引導。接著該節的大部分時間，就由學生自行閱讀，做作業及檢查答案。到了最後十分鐘，用來小考，訂正錯誤及整理重點。此時的活動，師、生一起參與。第二階段一般費時約兩個月左右。

第三階段，基於學生自學習慣已逐漸養成，進一步增強學生獨立學習的能力。整理一章或一單元的重點，發現不同單元題材間的邏輯關係，都是教學重點。這階段需半年至一年的時間。

第四階段，落實學生自學習慣與發展獨立學習的能力。根據盧教授的實驗，此階段一直持續到初中畢業。

盧教授另外提出七點教學原則如下：

- ① 教學要引用心理學原理。
- ② 在老師引導下，使用自學法。
- ③ 增強學習動機。
- ④ 並用班級性教學與個別性學習。
- ⑤ 並用自行校閱與別人校閱。
- ⑥ 並用啟發、閱讀、習作及了解。
- ⑦ 增強原則：接受彈性觀點。

3. 四型學生

爲了進行教學實驗，盧教授將學生依其思考特性分成四種學習型態，即

- ① 聰敏穩定型。
- ② 聰敏不穩定型。
- ③ 穩定不聰敏型。
- ④ 不聰敏不穩定型。

盧教授的實驗，證實四型學生都可培養自學習慣。比較上①、③兩型的成就比②、④兩型爲佳。由於自學輔導的教學過程中，學生的學習較獨立，因此，聰敏學生可以學的快一點，其他學生可以學的慢一點。

4. 教學實驗結果與評鑑

盧教授發現實驗組的學生跟控制組比較，有四方面成就較佳：

- ① 學習成就。
- ② 自學能力的發展。
- ③ 自學能力的轉移（至其他學科）
- ④ 所有學科的發展。

例如，天津第四十一中學初一八個班級中，有一個班當實驗班。在第二學期結束時，實驗班老師請病假，學生只好自學一個月。學期末八個班級各班的數學平均成績，實驗班高達89.5分，爲八班之冠，同時，比較其他各科的平均成績，實驗班也都高於其他班級。

1983年十月，中國（僞）科學院心理所舉辦一評鑑研討會，專門評鑑此“中學數學自學輔導實驗計畫”。結論是，此計畫對教育改革與心理學發展都有貢獻。

1985年，此計畫獲得（僞）國家獎。

雖然，介紹「推展中的教學法」占了很多篇幅，但從梁文與許、黃文的報導，真正在教室內進行的教法，仍然是灌輸式的講演法。若干重點高中可能是推展新的教學方式的搖籃。

參、數學課程特色

一、政治意味浮凸

數學課程目標中強調政治教育，這是很特殊的。梁文將大陸發佈的教學綱要中，數

學教學的目標譯成英文引用，其要點大致是：

「使學生掌握必需的基本數學知識，以參與社會主義的改革與建設，及學習現代的科技；使獲得快、準的計算能力、邏輯思考能力與空間視覺能力，以便逐漸發展學生的分析與解題能力。從數學教學中，學生可獲得政治教育，鼓勵學生熱心學習數學以配合四個現代化，並建立唯物論的辨證法的概念。」

不僅在數學教學目標中明列政治詞彙，像鼓吹四個現代化及發展唯物論的辨證法的概念，同時在教學要點中的第一點，也舉出「利用唯物論辨證法的觀點來解釋教材」。

大陸學者認為「數學與唯物論辨證法的關係很密切」（Chang, 1982），利用唯物論辨證法的觀點來說明數學概念「有助於學生學習基本的數學知識，同時也有助於學生形成唯物論辨證法的觀點」。

據梁文（Leung, 1987, p.39）報導，政治教育的重要性在大陸上常見文章討論，在已出版的刊物中，可發現許多人提供經驗，說明如何從各個學科的教學中，實現政治教育的目標（例如，物理——Cheng, 1984；英語——Gu, 1984；數學——Lu, 1983）。（Leung, 1987, p.39）政治意味浮凸，顯示大陸的數學教學並非爲了數學的文化價值，數學內在結構的美或數學本身的知識價值；而是把數學教學目標強調在工具的層次，學數學是實現四個現代化的工具，是政治教育的工具。

二、升學壓力

大陸學生，小學升初中，初中升高中都需經由地方性的升學考。到了高中畢業得參加全國性的升學考，以決定是否能升學及升何學院與學系。升學考、競爭激烈，梁文指出與老師訪談的經驗，老師們表示升學考增加他們很大的教學壓力，教材與教法也深受升學考的影響。

在徐、黃文（Xu and Huang, 1988）中也提到，由於升學考的試題僅以現行教科書內容爲限，因此，數學課程的改革相當困難。例如，重點高中的初等微積分綱要，實際上僅是預備納入，而非已正式納入課堂教學。僅有少數幾個重點高中真正教而已。原因，一方面是因學生學習負擔沉重及增加老師的教學準備，但真正的原因，還是大學升學考並不包含微積分，不考自然就不必教了。

升學考試題也是一份判斷大陸數學教學方向的指標，梁文中附有1984年，廣州高中聯招數學考題，及全國大專聯招自然組數學考題，將另闢一節加以分析。

三、內容導向

數學課程有的以教材內容為中心，有的以學生為中心。以教材內容為中心，強調的是單元教材間的起、承、轉、合，以學生為中心，則強調學生何時適合學些什麼，學生的興趣、了解層次是教材編材時的重要指標。

以學生導向的教材，需要透過基礎研究，建立一些關於學生的基本資料，編寫時才有依據。例如，比例推理這單元，中學數學一定會介紹。可是如何開始介紹呢？一般的研究顯示比例推理能力發展，有兩個影響它的主軸，一軸是比例的解題策略，另一軸則是問題的背景情境，解題策略中，正確推理的起點是加倍與折半。背景呢？常見的圖片放大、縮小？日常生活問題像食譜？或其他背景？目前這還很困擾研究者呢！大陸目前恐還缺乏基礎研究資料，不易以學生為中心編教材。

徐、黃文中談到給資優生使用的教科書，前三冊給初中三年用，後三冊給高中生用。在前三冊中，從算術到代數的轉化，從直觀幾何到演繹幾何的轉化，有詳盡的討論。這兩次轉化，算術到代數以數系的共通性質為橋樑，直觀幾何到演繹幾何，則以集合的邏輯搭橋。在後三冊中，也著重兩次轉化的討論，從綜合幾何到解析幾何利用向量當橋樑，從定量到變量則以逼近為橋（Xu and Huang, 1988）。

這番描述，充分顯示其以內容為中心的本質。

肆、升學考數學內容

凡是有升學考的地方，升學考的考題應算是課程的一部分，一份考題對教材、教法的影響，往往比許許多多的學習理論還深遠，因此，涵蓋升學考題於課程中，可以說是很自然的。例如，英國的 SMP 中學數學課程，就將會考的命題納入其課程中。使用 SMP 教材者，就選考 SMP 的會考題目。

針對 1984 廣州升高中聯招的數學題及全國升大學的數學考題，略加分析，可以猜測大陸初中，高中數學教學的重點。

一、升高中考題（廣州，1984）

1. 填充題：（每格 2 分，共 16 分）

(1) 因式分解： $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz =$ _____。

(2) 設 a, b 為同性質符號的實數，則當 _____， $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 不成立。

(3) 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ ，則 $\frac{x+y+z}{y} =$ _____。

(4) 將一長方形的四邊中點，依次連接，所得圖形是 _____。

(5) $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， a, b, c 分別是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊，

$\tan(90^\circ - B)$ 寫成 $\angle B$ 的三角函數應是 _____， $\frac{b}{c}$ 寫成 $\angle A$ 的三角函數應是 _____。

(6) 「外切於一圓的四邊形，其兩雙對邊和相等」的逆定理是 _____。

(7) 設 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩個實根是 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ， $a > 0$ ，則 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集合是 _____。

(8) 以一給定線段當斜邊，所作直角三角形的直角頂點的軌跡是 _____。

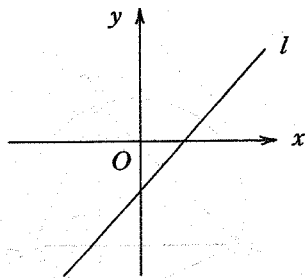
2. 複選題（每小題 2 分，共 6 分）

（答對 2 分，答錯倒扣 1 分，不答得 0 分，本題最低分 0 分）

(1) 設 a 是三角形的一內角。則在 a 的三角函數中，一定是正值的是 a 的 (A) $\sin$ (B) $\cos$ (C) $\tan$ (D) $\cot$ 。

(2) 設 $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ 為同一圓上的兩弧，且 $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ ，則 (A) $AB = 2CD$ (B) $AB < 2CD$ (C) $AB > 2CD$ (D) $AB, 2CD$ 長不能比較。

(3) 在下圖中， l 是線型函數 $y = kx + b$ 的圖形。



則 (A) $k > 0$ (B) $k < 0$ (C) $k < 0$ (D) $k > 0$

$b > 0$ $b < 0$ $b > 0$ $b < 0$

3. （每小題 5 分，共 15 分）

(1) 解方程組

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ \sqrt{x+6} + y = 2 \end{cases}$$

(2) 已知 $\log 3 = 0.4771$ ，求 3^{10} 是幾位數？

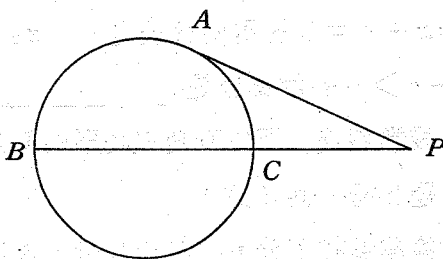
(3) 求 $(\sin 120^\circ + \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 135^\circ)$ 之值。

4. (7 分)

某工廠預定到 1986 年時，將生產量提高至比今年多 21%，試求每年平均增加的百分率。

5. (10 分)

在下圖中， PA 為圓的切線， A 為切點， PCB 是圓的一割線。



已知 $PA = 3\sqrt{3}$, $BC = 6$, $\angle P = 30^\circ$ 。

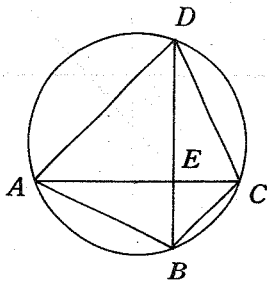
(A) 求 AC 長。

(B) 求圓的面積。

6. (10 分)

設 x 的二次方程式 $3x^2 - 4mx + 1 = 0$ 有二正根。求 m 值的範圍。

7. (12 分)



上圖中，四邊形 $ABCD$ 內接於圓，弦 AC , BD 交於 E 點，已知 $AD \cdot AB = CD \cdot CB$ 。求證： E 是 AC 的中點。

8. (11 分)

某船以每小時 10 海裡的速度向西航行。早上 8 點，從船所在的 B 點望見一小島 A 在北 30° 東。更往西行，到了早上 9 點，從船所在的 C 點，望見 A 島在北 60° 東。如果船繼續往西行，到了早上 11 點，船到達 D 點。試問 A 島離 D 點有多遠。

9. (13 分)

設直線 $y = x - 2$ 與拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 相交於兩點 $(2, m)$ 與 $(n, 3)$ 。
已知拋物線的對稱軸為 $x = 3$ 。

- (1) 求 a, b, c 。
- (2) 在同一坐標平面上畫出此直線及拋物線。

二、升高中考題分析

根據筆者在臺灣的工作經驗，將 1984 廣州聯招這份數學題，粗略、主觀地分析於後。

1. 考題內容分佈

依照數、代數、平面幾何、坐標幾何、三角五分支分類，各類配分如下：

- 數：方根（1—(2)；2 分），對數（3—(2)；5 分）等比數列—百分率（4；7 分），計 14 分。
- 代數：解方程式（含方程組，不等式）及因式分解（1—(1)，(7)；3—(1)，6；19 分），比例式（1—(3)；2 分），計：21 分。
- 平面幾何：三角形（1—(4)，2—(2)；4 分），圓（1—(8)；2 分），邏輯命題（1—(6)；2 分），圓與畢氏定理（5；10 分），圓與相似（7；12 分）計：30 分。
- 坐標幾何：直線（2—(3)；2 分），拋物線（9；13 分），計 15 分。
- 三角：定義（1—(5)，2—(1)；4 分），特別角函數值（3—(3)；5 分），三角測量（8；11 分），計 20 分。

檢查各類內容的考題配分，即：

數：14 分，代數：21 分，平面幾何：30 分，坐標幾何：15 分，三角：20 分，

並跟教材綱要比較，可得下列兩點結論：

- (1) 初三教材是主要考試內容。

初三的教材單元中，函數與圖形即上述坐標幾何的題目占 15 分，相似、圓占 24 分，三角占 20 分，對數占 5 分，共計 64 分。

(2) 相對於教學時數，代數考題偏少。

初一全年及初二半年以上都在學習代數。實際考題僅占30分，即上述數學代數總和再去掉對數部分，共30分。

2. 考題難度

(1) 統整題很多

許多考題中，都需同時應用若干概念與定理，例如：

1—(8)：軌跡，半圓周角定理。

2—(2)：全等三角形，三角形兩邊和大於第三邊。

5：圓幂定理，畢氏定理， $36^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 三角形性質，解聯立方程式。

7：相似，圓周角基本性質。

9：坐標、方程組、拋物線性質。

統整題多，難度自然高。

(2) 難、中、易試題分配

如果根據筆者分析臺灣高中聯招的經驗，將臺灣學生答對率5%~20%以下的稱為難題，20%~50%稱為中等題，50%~80%稱為簡易題。上、下兩端各稱為超難題與超易題，那麼廣州聯招考題，筆者主觀臆測的結果是：

① 沒有超易題。

② 簡易題，占分在6分左右。

③ 中等題，占分在30分左右。

④ 難題，占分在44分左右。

⑤ 超難題，占分在20分左右。

顯然地，廣州1984年升高中考題，難度相當高。

三、升大學考題（全國，1984）

本份試題總分120分，另有額外題10分。

1. 選擇題（15分）

（答案正確：3分；空白：0分；答案錯誤或選多於一項：倒扣1分）

(1) 集合 $X = \{ (2n+1)\pi ; n \text{ 爲整數} \}$ 與 $Y = \{ (4k \pm 1)\pi ; k \text{ 爲整數} \}$ 的關係爲 (A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$ (C) $X = Y$ (D) $X \neq Y$

(2) 設圓 $x^2 + y^2 + Gx + Ey + F = 0$ 與 X -軸切於原點，則

(A) $F = 0$, $G \neq 0$, $E \neq 0$ (B) $E = 0$, $F = 0$, $G \neq 0$

(C) $G = 0$, $F = 0$, $E \neq 0$ (D) $G = 0$, $E = 0$, $F \neq 0$

(3) 設 n 爲一正整數, 則 $\frac{1}{8} [1 - (-1)^n] (n^2 - 1)$ 的值

(A) 一定是 0 (B) 一定是偶數 (C) 是整數但不一定是偶數 (D) 不一定是整數

(4) $\cos^{-1}(-x)$ 比 $\cos^{-1}x$ 大的充要條件是 (A) $x \in (0, 1]$ (B) $x \in (-1, 0)$ (C) $x \in [0, 1]$ (D) $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ (5) 設 θ 爲一第二象限角, 且

$$\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin \theta}, \text{ 則 } \frac{\theta}{2}$$

(A) 爲第一象限角 (B) 爲第三象限角 (C) 一定是第一象限或第三象限角

(D) 爲一第二象限角

2. (24 分) 本題共 6 小題, 每小題 4 分, 只需直接寫下答案。

(1) 一圓柱面的側面切開後得 2×4 的長方形, 求此圓柱體積。(2) 求使函數 $\log_{0.5}(x^2 + 4x + 4)$ 遞增的 x 的區間?(3) 求解 $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}$ (4) 求 $(x + \frac{1}{x} - 2)^3$ 展開式中的常數項。(5) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^n}{3^n + 1}$ 。(6) 6 名歌手與 4 名舞者排在一起, 任兩位舞者不相鄰, 求安排的方式有多少種?
(只需列算式)

3. (12 分) 畫圖

(1) 令

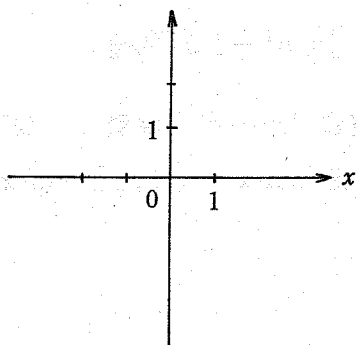
$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{當 } x \leq 0 \\ 1, & \text{當 } x > 0 \end{cases}$$

試畫 $y = H(x - 1)$ 的函數圖形。

- (2) 試畫極坐標方程式 $(\rho - 2)(\theta - \frac{\pi}{4}) = 0 (\rho > 0)$ 的曲線

(1)

(2)



4. (12 分)

設 3 平面兩兩相交，交於 3 直線，試證：此三直線必交於一點或平行。

5. (14 分)

設 c, d, x 都是實數，且 $c \neq 0$ ， x 是一未知數，試討論方程式 $\log_{(cx + \frac{d}{x})} x = -1$

在什麼情況下有解，並求其解。

6. (16 分)

(1) 設 $p \neq 0$ 且實係數二次方程式 $z^2 - 2pz + q = 0$ 有二複數根 z_1, z_2 。令

Z_1, Z_2 複數平面上代表 z_1, z_2 的點。試求通過原點，以 Z_1, Z_2 為焦點的橢圓的長軸的長。

(2) 試求過 $M(1, 2)$ ，以 y 軸為準線，離心率 $\frac{1}{2}$ 的橢圓，其左頂點的軌跡方程式。

7. (15 分)

在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分別為 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊，且 $c = 10$ ， $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

設 P 為 $\triangle ABC$ 的內切圓上一動點，試求 P 到 A, B, C 三點距離平方和的極大值與極小值。

8. (12 分)

令 $\alpha > 2$ ，設 $\{x_n\}$ 為一數列，其中 $x_1 = \alpha$ ， $x_{n+1} = x_n^2 / 2(x_n - 1)$

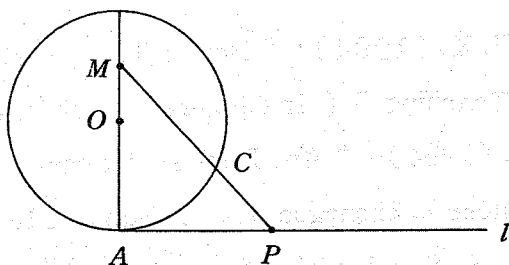
($n = 1, 2, \dots$)

試證：(1) $x_n > 2$ 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ ($n = 1, 2, \dots$)

(2) 若 $\alpha \leq 3$, 則 $x_n \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$)

(3) 若 $\alpha > 3$, 則當 $n \geq \frac{\log \alpha / 3}{\log 4 / 3}$ 時, 可得 $x_{n+1} < 3$ 。

9. (額外題, 配分 10 分, 不列入總成績計算)



在上圖中, 單位圓 (圓心 O , 半徑 1) 與直線 l 相切於 A 點, 設一動點 P 從 A 點

沿著切線 l 運動, 取 AC 長等於 $\frac{2}{3}AP$ 。

連接 PC 交 AO 於 M 點。已知當 $AP = \frac{3\pi}{4}$, P 的速率為 v , 試求此時 M 點的速率。

四、升大學考題分析

1. 考題內容分佈

從試題的表層觀察, 內容分佈大致是:

算術 (整數、排列、組合、數列、實測) : 占 30 分

代數 : 占 18 分

三角 : 占 25 分

平面解析幾何 : 占 31 分

立體幾何 : 占 12 分

極限 : 占 4 分

微積分 : 占 10 分 (額外題)

本份試題涵蓋許多基本的數學知識與概念, 像整數性質, 求體積, 對數的定義與圖形平移的概念等。

2. 試題的難易度

筆者缺乏分析升大專聯考數學題難易度的經驗，此部分留白。直觀感覺，升大學這份題目較升高中那份，相對於考生而言，簡易題較多。升大學考生容易得到一些基本分數。

參考資料*

1. Cheng H.X.(1984): "How I Teach Dialectical Materialism through Physics Teaching" (in Chinese), Zhonggus Jiaoju Bao, 29/5/84。
2. Gu J.H.(1984): "An English Teacher Competent in Political Education" (in Chinese), Zhonggus Jiaoju Bao, 21/2/84。
3. Leung F.K.S.(1987): "The Secondary School Mathematics Curriculum in China", Educational Studies in Mathematics, v.18, p. 35~57。
4. Lu X.L.(1983): "Using the Special Features of Mathematics to Achieve Political Education"(in Chinese), Jiaoxue Tongxun, Jan. ?
5. Xu S. and Huang B.(1988): "Current Status of Secondary School Mathematics Curriculum Development in China", To be appear in Educational Studies in Mathematics, v.19。

*註：Cheng (1984), Gu (1984) 及 Lu (1983) 等三篇中文的文獻，間接抄自 Leung (1987) 的參考文獻。