

# 人造衛星的軌道探討

何耀坤 編譯

臺南市私立光華女中

最近天體的物理觀測和研究很進步，其前提是認知天體位置和運動。天體位置和軌道的決定是很無味的作業，但是若沒有這工作對天體的真正研究無法進展，也不可能有人造衛星的發射。最近由於彗星的接近地球，這方面的研究變成活潑。一般人對行星或人造衛星的軌道之關心提高，在軌道計算方面使用電腦也漸漸普及於一般愛好天文的業餘觀測者。人造衛星的軌道問題包括軌道要素，軌道半徑和公轉周期，衛星實際經過路線及軌道的大氣影響等，這些和人造衛星的未來位置預測有密切關係。

## 一、人造衛星的軌道要素

人造衛星的軌道要素和太陽系內的天體不同，以赤道面為基準而表示。如圖 1 中  $O$  為地球中心， $P$  為北極， $Q$  為南極， $PQ$  為地軸， $OA$  為春分點方向。為表示從  $O$  發出的任意直線方向，從  $OA$  至該直線和自轉方向的角度稱赤經。 $CFE$  為人造衛星軌道， $C$  為昇交點。 $\angle AOC$  為昇交點的赤經以  $\Omega$  表示， $i$  為軌道傾斜角或赤道夾角。圖 1 中  $B$  為近地點， $\angle COB$  為近地點引數，以  $\omega$  表示。人造衛星軌道形狀和位置決定後，為了表示衛星在軌道上的位置而設定一定時間稱元期。

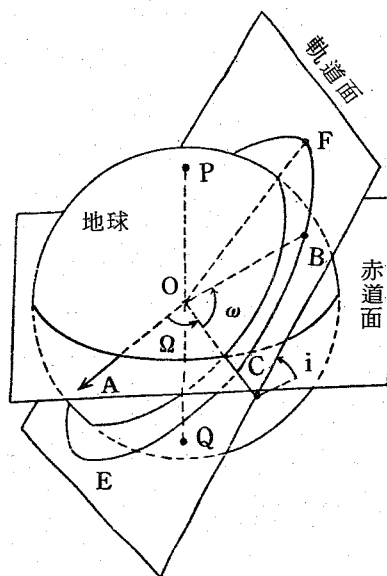


圖 1

人造衛星的軌道要素如下六項，以如下數值表示。

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{元 期: } t_0 \\
 &\text{緯度引數: } u = u_0 + \dot{u}(t - t_0) + \ddot{u}(t - t_0)^2 \\
 &\text{昇交點赤經: } \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0) \\
 &\text{近地點引數: } \omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0) \\
 &\text{傾斜角: } i \\
 &\text{軌道半長徑: } a
 \end{aligned} \right\} (1)$$

上式中  $u_0$ ,  $\Omega_0$ , 及  $\omega_0$  是元期  $t_0$  的數值,  $\dot{u}$ ,  $\dot{\Omega}$  及  $\dot{\omega}$  是一天的變化量,  $t - t_0$  是從元期的日數。有時用近地點高度  $q$  和遠地點高度  $Q$  代替軌道半長徑, 那麼

$$a = 6378 + \frac{1}{2}(q + Q) \quad (a, q, Q \text{ 之單位爲公里}) \dots\dots\dots(2)$$

設離心率爲  $e$ , 那麼

$$e = \frac{Q - q}{Q + q + 12756} \dots\dots\dots(3)$$

(證明) 設地球的赤道半徑爲  $R$ ,

$$\begin{aligned}
 q &= a(1 - e) - R, & Q &= a(1 + e) - R \\
 \therefore a(1 - e) &= q + R, & a(1 + e) &= Q + R
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{q + R}{Q + R}$$

$$(Q + R)(1 - e) = (q + R)(1 + e)$$

$$Q + R - q - R = e(q + R + Q + R)$$

$$\therefore e = \frac{Q - q}{Q + q + 2R} \quad (R = 6378 \text{ 公里})$$

## 二、計算人造衛星的軌道半徑和公轉周期

設太陽和行星的質量各爲  $m_1$  和  $m_2$ , 太陽和行星間的引力所產生的行星之加速度爲  $a_n$ , 萬有引力常數爲  $k^2$ , 軌道半徑爲  $r$ , 公轉周期爲  $P$ , 那麼

$$a_n = k^2 \frac{m_1}{r^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{P^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{P^2}$$

上式中  $V$  為軌道速度， $V = \frac{2\pi r}{P}$

$$\therefore k^2 \frac{m_1}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{P^2}$$

$$\therefore \frac{r^3}{P^2} = \frac{k^2 m_1}{4\pi^2} \dots\dots\dots(4)$$

上式右邊都是常數，表示  $r^3$  和  $P^2$  成正比，這就是 Kepler 的行星運動之第三法則。在(4)式中假設  $m_1$  為地球的質量，半徑  $r$  以圓軌道繞地球周圍的人造衛星之周期為  $P$  時，

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{3.986 \times 10^{20}}{4\pi^2} = 0.1010 \times 10^{20} \text{ (cm}^3 \text{ s}^{-2}\text{)}$$

上式中  $r$  之單位為 Km 時， $P = 0.00995 r^{3/2}$  ( $r$  : Km,  $P$  : s)。

因為接近地球表面繞的人造衛星， $r = 6378$  Km，所以

$$P = 5068 \text{ 秒} = 84.47 \text{ 分}$$

如果以地球赤道半徑為單位所表示的  $a$ ，寫做  $a$  時，

$$\left. \begin{aligned} \text{那麼 } P &= 0.00995 a \sqrt{a}, \quad (a : \text{Km}, P : \text{秒}) \\ &= 5068.15 a \sqrt{a}, \quad (P : \text{秒}) \\ &= 84.47 a \sqrt{a} \quad (P : \text{分}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

那麼平均每天運動  $n$  如下式，

$$\frac{86400 \text{ 秒}}{P \text{ 秒}} = \frac{6137^\circ.2}{a \sqrt{a}} \dots\dots\dots(6)$$

地球的形狀非正圓的球， $P$  比極半徑大些，因此人造衛星的運動會受地球的膨大部分之攝動。其他有大氣的阻力和太陽輻射壓之影響，其軌道會有複雜的變化。所以用(1)式將人造衛星的運動很正確地求算，是不可能的。如果在短時間的衛星運動，可用(1)式的軌道要素預測大略上的衛星位置。假設不考慮大氣的阻力和太陽輻射影響，只考慮地球的攝動時，如下列，這是相等於(1)式的第二項。

$$\left. \begin{aligned} \text{昇交點赤經之攝動 } \dot{\Omega} &= - \frac{A_2}{a^2 (1-e^2)^2} n \cos i \\ \text{近地點引數之攝動 } \dot{\omega} &= + \frac{A_2}{a^2 (1-e^2)} n \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

人造衛星的離心率是很小，可視為  $e = 0$ ，那麼一日份的攝動量可用下式(9)求算。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{-9^\circ.97}{(a\sqrt{a})a^2} \cos i \\ \dot{\omega} &= + \frac{9^\circ.97}{(a\sqrt{a})a^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

因為緯度引數是  $u = v + \omega$ ，離心率為 0，那麼  $u$  的一日之變化量是，

$$\dot{u} = \dot{v} + \dot{\omega} = n + \dot{\omega} \dots\dots\dots(9)$$

$\ddot{u}$  包含有  $a$  的變化和其他影響，可從觀測以實驗決定。

### 三、人造衛星經路和位置的計算法

爲了簡化，假設人造衛星軌道爲圓形。因爲人造衛星的運動速度快，對明亮的衛星預測仍有實用價值，所以可省略近地點引數。將人造衛星和地球中心點連結，其直線和地表交點稱直下點，其經緯度爲  $\lambda$  和  $\varphi'$  ( $\varphi'$  是地心緯度)，那麼可成立如圖 2 之關係。圖中西經取正數， $\lambda$  和  $\varphi'$  之地點在春分點之東側，用負數表示。那麼於昇交點，直下點和赤道所形成的直角球面三角形，可成立下式關係。

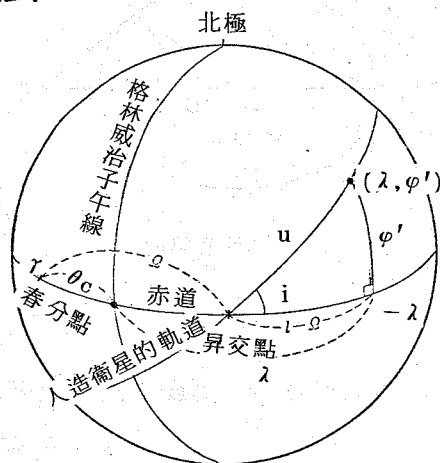


圖 2 人造衛星的軌道

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' \cos (l - \Omega) &= \cos u \\ \cos \varphi' \sin (l - \Omega) &= \sin u \cos i \\ \sin \varphi' &= \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

若知  $u$ ，由(10)式可求算  $l - \Omega$  和  $\varphi'$ ，由  $l = (l - \Omega) + \Omega$  可得直下點的  $l$  (地方恒星時間)。設這時刻的格林威治恒星時間爲  $\theta_0$  時， $\lambda = \theta_0 - l$  (西經：正數)。

以上式可求算直下點的經度， $u$  用(1)式能計算。對  $t$  和  $t_0$ ，若知直下點的經緯度 ( $\lambda, \varphi'$ ) 就能將人造衛星的經路畫在地圖上，但是要將  $\varphi'$  換算爲地理緯度  $\varphi$ ，若在大略上的預測時可省略之。

下面記述求算人造衛星的赤經，赤緯，高度及方位角的方法。設人造衛星的軌道半長徑爲  $a$ ，直下點的經緯度爲  $\lambda, \varphi'$ ，同時刻的格林威治恒星時間爲  $\theta_0$  時，直下點的

恒星時間是  $l = \theta = \theta_G - \lambda$ 。

如圖 3，沿地球子午線和赤道垂直的切口是橢圓形，C 為觀測點，Z 為天頂，O 為地心。地理緯度是  $\angle EDC = \varphi$ ，O 和 C 的連線和赤道面所成的角  $\angle EOC$  為地心緯度 ( $\varphi'$ )，而  $\varphi'$  常比  $\varphi$  小。OC 為地心半徑 ( $\rho$ )，以地球的赤道半徑 (= 6378.160 公里) 為單位表示。C 的經度為  $\lambda$ ，C 的地心赤道直交座標如圖 4。那麼

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi' \cos \theta \\ y &= \rho \cos \varphi' \sin \theta \\ z &= \rho \sin \varphi' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

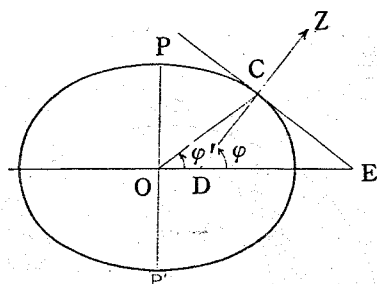


圖 3 地心緯度

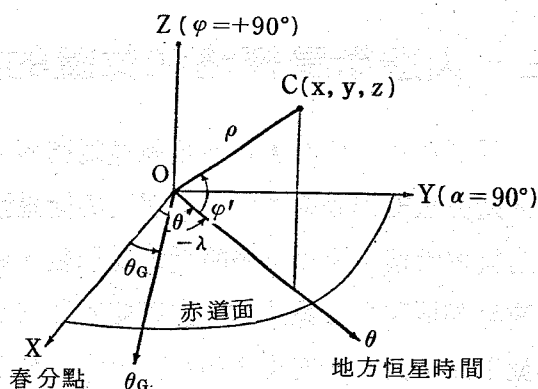


圖 4 地心直交座標

按照上式方法，那麼人造衛星的地心直交座標如下式。

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi' \cos (\theta_G - \lambda) \\ y &= a \cos \varphi' \sin (\theta_G - \lambda) \\ z &= a \sin \varphi' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

觀測地點的經緯度為  $\lambda_0, \varphi_0$ ，那麼觀測地的地心座標如下式。

$$\left. \begin{aligned} X &= C \cos \varphi_0 \cos (\theta_0 - \lambda_0) \\ Y &= C \cos \varphi_0 \sin (\theta_0 - \lambda_0) \\ Z &= S \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

因為  $xyz$  座標系是赤道直交座標， $xy$  面是赤道面， $x$  軸向春分點方向， $z$  軸向北極方向。所以從觀測地看人造衛星的赤經為  $\alpha$ ，赤緯為  $\delta$ ，那麼由圖 5 可得下式。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Delta \cos \delta \cos \alpha = x - X \\ \eta &= \Delta \cos \delta \sin \alpha = y - Y \\ \zeta &= \Delta \sin \delta = z - Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

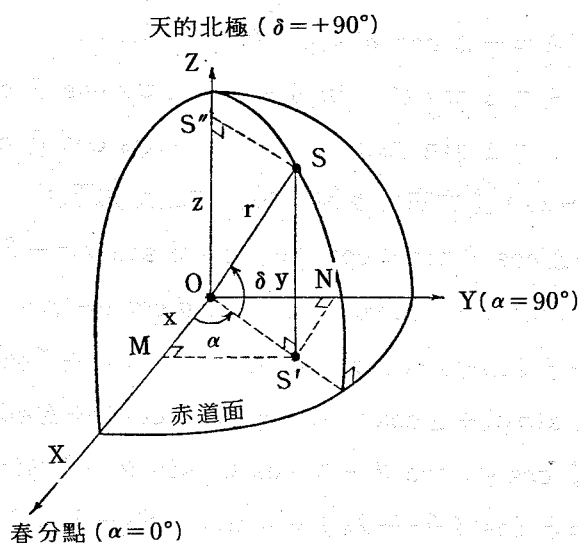


圖5 赤道直交座標

上式中  $\Delta$  是和人造衛星之距離，單位是地球的赤道半徑，若將之換算為 km 單位，如下式。

$$\Delta (\text{km}) = 6378 \Delta$$

人造衛星的高度和方位角的換算法如下，在此先簡述有關球面三角形的重要公式，由圖6，可得下式。

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

於球面三角形 PZS (圖7) 當為 ABC 時，由公式(15)可得下式。

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - h) \sin(360^\circ - A) &= \sin(90^\circ - \delta) \sin H \\ \sin(90^\circ - h) \cos(360^\circ - A) &= \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H \\ &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H \\ \therefore \cos h \sin A &= -\cos \delta \sin H \\ \cos h \cos A &= \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos H \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \end{aligned} \left\} \dots\dots\dots (16)$$

將上式(16)兩邊乘  $\Delta$  (和人造衛星之距離)，那麼可得下式，下式中  $h$  為地平高度。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos h \sin A &= -\Delta \cos \delta \sin (\theta - \alpha) \\ \Delta \cos h \cos A &= \Delta \cos \varphi_0 \sin \delta - \Delta \sin \varphi_0 \cos \delta \cos (\theta - \alpha) \\ \Delta \sin h &= \Delta \sin \varphi_0 \sin \delta + \Delta \cos \varphi_0 \cos \delta \cos (\theta - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

上式中  $\theta = \theta_0 - \lambda_0$ ，上式右邊展開，用(14)式改寫如下。

$$\begin{aligned} \Delta \cos h \sin A &= -\Delta \cos \delta \sin \theta \cos \alpha + \Delta \cos \delta \sin \alpha = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \\ \Delta \cos h \cos A &= \zeta \cos \varphi_0 - \Delta \sin \varphi_0 \cos \delta \cos \theta \cos \alpha - \Delta \sin \varphi_0 \cos \delta \sin \theta \sin \alpha \\ &= -\xi \sin \varphi_0 \cos \theta - \eta \sin \varphi_0 \sin \theta + \zeta \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \sin h &= \zeta \sin \varphi_0 + \Delta \cos \varphi_0 \cos \delta \cos \theta \cos \alpha + \Delta \cos \varphi_0 \cos \delta \sin \theta \sin \alpha \\ &= \xi \cos \varphi_0 \cos \theta + \eta \cos \varphi_0 \sin \theta + \zeta \sin \varphi_0 \end{aligned}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \bar{A} &= \xi \cos (\theta_0 - \lambda_0) + \eta \sin (\theta_0 - \lambda_0) \\ \bar{B} &= -\xi \sin (\theta_0 - \lambda_0) + \eta \cos (\theta_0 - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

那麼

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos h \cos A &= -\bar{A} \sin \varphi_0 + \zeta \cos \varphi_0 \\ \Delta \cos h \sin A &= +\bar{B} \\ \Delta \sin h &= +\bar{A} \cos \varphi_0 + \zeta \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

上式的 A 是以北為  $0^\circ$ ，測北→東→南→西的方位角，h 為地平高度。

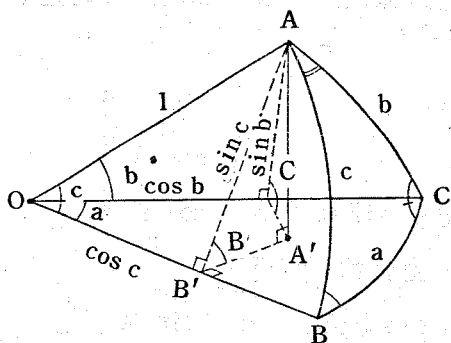


圖 6 球面三角形

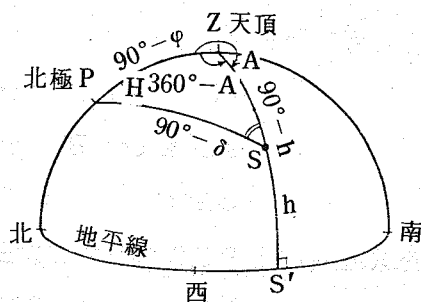


圖 7 地平座標

下列綜合有關人造衛星的軌道及位置預測的計算公式。

(1) 軌道要素 (設  $e = 0$ )

元期： $t_0$  (UT)

緯度引數： $u = u_0 + \dot{u}(t - t_0) + \ddot{u}(t - t_0)^2$

昇交點赤經： $\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0)$

赤道夾角： $i$       軌道半長徑： $a$  (若用地球赤道半徑為單位時寫  $a$ )

在此  $(t - t_0)$  之單位為日， $u$  和  $\Omega$  之單位為  $(^\circ/\text{日})$ ， $\ddot{u}$  之單位為  $(^\circ/\text{日}^2)$ 。設近地點高度為  $q$  (Km)，遠地點高度為  $Q$  (Km)，那麼， $a = 6378 + 0.5(q + Q)$  (Km)

$$, a = \frac{a}{6378} .$$

若不知  $q$ ， $Q$  或  $a$  時，

$$n_1 = \dot{u} - 10^\circ \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right)$$

$$a_1 = \left( \frac{6137}{n_1} \right)^{\frac{2}{3}}$$

用上式求  $a$  的第一近似值  $a_1$ ，

$$n = \dot{u} - \frac{9^\circ \cdot 97}{(a_1 \sqrt{a_1}) a_1^2} \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right)$$

$$a = \left( \frac{6137.2}{n} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{地上高度} \quad H = 6378 (a - 1) \quad (\text{Km})$$

$$\text{周期} \quad P = 84.47 a \sqrt{a} \quad (\text{分})$$

(2) 預測時間為  $t$  (UT)，求格林威治恒星時間  $\theta_g$ 。

① 軌道要素是根據 1950.0 分點時，

$$\theta_g = 360^\circ \times (0.67052 + 1.0027378 D)$$

② 軌道要素是根據於  $t$  的春分點時，

$$\theta_g = 360^\circ \times (0.67126 + 1.0027379 D)$$

在此  $D = \text{MJD} (\text{儒略日數 Julian day number}) - 40000.0$ ，上式的  $( )$  內只取小數點以下。

(3) 求於  $t$  時的  $u$  和  $\Omega$ 。

(4) 直下點的經緯度  $(\lambda, \varphi')$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' \cos (l - \Omega) &= \cos u \\ \cos \varphi' \sin (l - \Omega) &= \sin u \cos i \\ \sin \varphi' &= \sin u \sin i \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda = \theta_g - \{ (l - \Omega) + \Omega \} \quad (\text{西經：正，東經：負})$$

$$\varphi = \varphi' + (\varphi - \varphi') \quad (\varphi - \varphi') \text{ 是根據表 1。}$$

表 1 地心座標的係數

| $\varphi$ | C         | S         | $\varphi-\varphi'$ | R (km) |
|-----------|-----------|-----------|--------------------|--------|
| 0°        | 1.000 000 | 0.993 305 | 0'.0=0°.00         | 6378.2 |
| 5         | 1.000 025 | 0.993 331 | 2'.0=0°.03         | 6378.0 |
| 10        | 1.000 101 | 0.993 406 | 3'.9=0°.07         | 6377.5 |
| 15        | 1.000 225 | 0.993 528 | 5'.8=0°.10         | 6376.7 |
| 20        | 1.000 392 | 0.993 695 | 7'.4=0°.12         | 6375.7 |
|           |           | 205       |                    |        |
| 25        | 1.000 598 | 0.993 900 | 8'.8=0°.15         | 6374.4 |
| 26        | 1.000 644 | 0.993 945 | 9'.1=0°.15         | 6374.1 |
| 27        | 1.000 691 | 0.993 991 | 9'.3=0°.15         | 6373.8 |
| 28        | 1.000 739 | 0.994 039 | 9'.6=0°.16         | 6373.5 |
| 29        | 1.000 786 | 0.994 088 | 9'.8=0°.16         | 6373.2 |
|           |           | 50        |                    |        |
| 30        | 1.000 838 | 0.994 138 | 10'.0=0°.17        | 6372.8 |
| 31        | 1.000 889 | 0.994 189 | 10'.2=0°.17        | 6372.5 |
| 32        | 1.000 941 | 0.994 240 | 10'.4=0°.17        | 6372.2 |
| 33        | 1.000 994 | 0.994 293 | 10'.5=0°.18        | 6371.9 |
| 34        | 1.001 048 | 0.994 347 | 10'.7=0°.18        | 6371.5 |
|           |           | 54        |                    |        |
| 35        | 1.001 103 | 0.994 401 | 10'.8=0°.18        | 6371.2 |
| 36        | 1.001 158 | 0.994 456 | 11'.0=0°.18        | 6370.8 |
| 37        | 1.001 215 | 0.994 512 | 11'.1=0°.18        | 6370.5 |
| 38        | 1.001 271 | 0.994 568 | 11'.2=0°.19        | 6370.1 |
| 39        | 1.001 328 | 0.994 625 | 11'.3=0°.19        | 6369.7 |
|           |           | 57        |                    |        |
|           |           | 58        |                    |        |
|           |           | 59        |                    |        |
|           |           | 60        |                    |        |
|           |           | 61        |                    |        |
|           |           | 62        |                    |        |
|           |           | 63        |                    |        |
|           |           | 64        |                    |        |
|           |           | 65        |                    |        |
|           |           | 66        |                    |        |
|           |           | 67        |                    |        |
|           |           | 68        |                    |        |
|           |           | 69        |                    |        |
|           |           | 70        |                    |        |
|           |           | 71        |                    |        |
|           |           | 72        |                    |        |
|           |           | 73        |                    |        |
|           |           | 74        |                    |        |
|           |           | 75        |                    |        |
|           |           | 76        |                    |        |
|           |           | 77        |                    |        |
|           |           | 78        |                    |        |
|           |           | 79        |                    |        |
|           |           | 80        |                    |        |
|           |           | 81        |                    |        |
|           |           | 82        |                    |        |
|           |           | 83        |                    |        |
|           |           | 84        |                    |        |
|           |           | 85        |                    |        |
|           |           | 86        |                    |        |
|           |           | 87        |                    |        |
|           |           | 88        |                    |        |
|           |           | 89        |                    |        |
|           |           | 90        |                    |        |
|           |           | 91        |                    |        |
|           |           | 92        |                    |        |
|           |           | 93        |                    |        |
|           |           | 94        |                    |        |
|           |           | 95        |                    |        |
|           |           | 96        |                    |        |
|           |           | 97        |                    |        |
|           |           | 98        |                    |        |
|           |           | 99        |                    |        |
|           |           | 100       |                    |        |

(5) 從地點  $\lambda_0$  和  $\varphi_0$  所看的赤經和赤緯

$$\left. \begin{aligned} X &= C \cos \varphi_0 \cos (\theta_G - \lambda_0), & x &= a \cos \varphi' \cos l \\ Y &= C \cos \varphi_0 \sin (\theta_G - \lambda_0), & y &= a \cos \varphi' \sin l \\ Z &= S \sin \varphi_0, & z &= a \sin \varphi' \end{aligned} \right\}$$

上式中  $l = (l - \Omega) + \Omega = \theta_G - \lambda$

$$\xi = \Delta \cos \delta \cos \alpha = x - X$$

$$\eta = \Delta \cos \delta \sin \alpha = y - Y$$

$$\zeta = \Delta \sin \delta = z - Z$$

$$\Delta \text{ (Km)} = 6378 \Delta$$

(6) 從  $\lambda_0, \varphi_0$  之地點所看的方位角  $A$  和高度  $h$

$$\bar{A} = \xi \cos (\theta_G - \lambda_0) + \eta \sin (\theta_G - \lambda_0)$$

$$\bar{B} = -\xi \sin (\theta_G - \lambda_0) + \eta \cos (\theta_G - \lambda_0)$$

那麼

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos h \cos A &= -\bar{A} \sin \varphi_0 + \zeta \cos \varphi_0 \\ \Delta \cos h \sin A &= \bar{B} \\ \Delta \sin h &= \bar{A} \cos \varphi_0 + \zeta \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\}$$

#### 四、求算人造衛星的實際經路

設時間  $t_1$  和  $t_2$  的人造衛星之直下點的經緯度為  $\lambda_1, \varphi_1$  和  $\lambda_2, \varphi_2$ ; 格林威治恒星時間為  $\theta_{G1}, \theta_{G2}$ , 那麼人造衛星經路  $l$  如下:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(時間 } t_1 \text{)} & \text{(時間 } t_2 \text{)} \\ l_1 = \theta_{G1} - \lambda_1, & l_2 = \theta_{G2} - \lambda_2 \\ \varphi'_1 = \varphi_1 - (\varphi - \varphi')_1, & \varphi'_2 = \varphi_2 - (\varphi - \varphi')_2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

上式中  $(\varphi - \varphi')$  從表 1 求出。

昇交點赤經  $\Omega$  和軌道傾斜角 (赤道夾角)  $i$  可從下式求。

$$\left. \begin{aligned} \tan i \sin (l_1 - \Omega) &= \tan \varphi'_1 \\ \tan i \cos (l_1 - \Omega) &= \frac{\tan \varphi'_2 - \tan \varphi'_1 \cos (l_2 - l_1)}{\sin (l_2 - l_1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

緯度引數 ( $u$ ) 用下式求算。

$$\left. \begin{aligned} \cos u_1 &= \cos \varphi_1' \cos (l_1 - \Omega), \quad \cos u_2 = \cos \varphi_2' \cos (l_2 - \Omega) \\ \sin u_1 &= \sin \varphi_1' / \sin i, \quad \sin u_2 = \sin \varphi_2' / \sin i \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

從上式(22)所得的  $u$  和  $\Omega$ ，再求(1)式，更求周期和軌道半長徑。

(計算例) 人造衛星之經路的直下點之經緯度得下列結果，用之試求軌道要素。

(解：)

$$\theta_{G1} \quad 305^\circ.33$$

$$\theta_{G2} \quad 306.15$$

$$l_1 \quad 79.53$$

$$l_2 \quad 88.25$$

$$(\varphi - \varphi')_1 \quad 0^\circ.2$$

$$(\varphi - \varphi')_2 \quad 0.2$$

$$\varphi_1' \quad +38^\circ.5$$

$$\varphi_2' \quad +32.2$$

$$l_2 - l_1 \quad +8.72$$

$$\cos (l_2 - l_1) \quad +0.9884$$

$$\sin (l_2 - l_1) \quad +0.1516$$

$$\tan \varphi_1' \quad +0.7954$$

$$\tan \varphi_2' \quad +0.6297$$

$$\tan \varphi_2' - \tan \varphi_1' \cos (l_2 - l_1) \quad -0.1564$$

$$\tan i \cos (l_1 - \Omega) \quad -1.0319$$

$$\tan (l_1 - \Omega) \quad -0.7708(II)$$

$$l_1 - \Omega \quad 142^\circ.38$$

$$\cos (l_1 - \Omega) \quad -0.7920$$

$$\tan i \quad +1.3029$$

$$i \quad 52^\circ.49$$

$$\Omega \quad 297.15$$

$$\sin i \quad +0.7932$$

| i          | 1              | 2              |
|------------|----------------|----------------|
| t          | 9時 10.0 分 UT   | 9時 13.3 分 UT   |
| $\theta_G$ | 20時 21.3 分     | 20時 24.6 分     |
| $\lambda$  | $-134^\circ.2$ | $-142^\circ.1$ |
| $\varphi$  | $+38.7$        | $+32.4$        |

| i                   | 1              | 2              |
|---------------------|----------------|----------------|
| $l - \Omega$        | $142^\circ.38$ | $151^\circ.10$ |
| $\cos (l - \Omega)$ | $-0.7921$      | $-0.8755$      |
| $\cos \varphi'$     | $+0.7826$      | $+0.8464$      |
| $\sin \varphi'$     | $+0.6225$      | $+0.5329$      |
| $\cos u$            | $-0.6199$      | $-0.7408$      |
| $\sin u$            | $+0.7847$      | $+0.6718$      |
| $\tan u$            | $-1.2659$      | $-0.9068(II)$  |
| $u$                 | $128^\circ.31$ | $137^\circ.80$ |

$$\text{元期 EP.} \quad 9\text{時 } 11.6 \text{ 分 UT}$$

$$\left. \begin{aligned} u &133^\circ.1 \\ \Omega &297.2 \\ i &52.5 \end{aligned} \right\}$$

## 五、大氣對人造衛星軌道的影響

人造衛星和一般天體之不同，是有大氣的阻力，所以其周期常變化。雖然離地面

1000 公里的高空，空氣很稀薄，但仍有大氣存在，而且人造衛星以  $7 \sim 8 \text{ km/sec}$  之快速運動，其阻力抵抗又大。按照實驗已知，一般對在流體內運動的物體受流體之阻力，物體速度小時和速度成正比，但速度非常快時和速度的平方成正比。設人造衛星運行的大氣密度為  $\rho$ ，速度為  $v$ ，和運動方向垂直的人造衛星的斷面積為  $\sigma$ ，阻力和  $\rho$  及  $\sigma$  成正比，所以阻力  $= K \sigma \rho v^2$ ，此式中  $K$  是人造衛星的形狀和表面性質的比例常數。所以人造衛星受大氣阻力時，其速度就減少。因此人造衛星的軌道半長徑  $a$  受大氣的阻力，漸漸減少。

$a$  受大氣阻力減少  $|\delta a|$  時的離心率  $e$  的變化，於圖 8  $E$  為地球中心， $E'$  為他焦點， $A$  為近地點， $B$  為遠地點， $CD$  為短徑。

(1) 人造衛星 ( $P$ ) 在近地點  $A$  時

設地球中心  $E$  固定， $a$  以  $|\delta a|$  減少時， $2a = EB + BE'$  以  $2|\delta a|$  減少，同時  $EE'$

也以  $2|\delta a|$  減少。因為  $a = \frac{EE'}{2a}$ ，

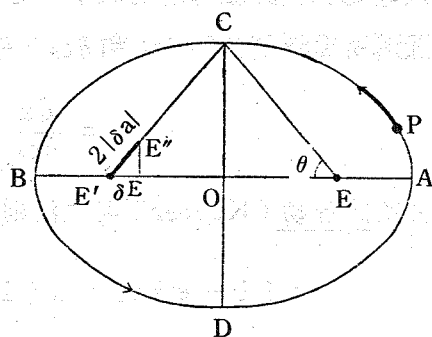


圖 8

$$\therefore e + \delta e = \frac{EE' - 2|\delta a|}{2a - 2|\delta a|} \dots\dots\dots (23)$$

因  $EE' < 2a$ ，從分母和分子同減  $2|\delta a|$ ，因為  $\delta e < 0$  即是  $P$  在  $A$  時， $e$  會減少。

(2)  $P$  在遠地點  $B$  時

對  $a$  之減少  $|\delta a|$ ， $2a$  也減少  $2|\delta a|$ 。這是因為  $E'$  向左方移動  $2|\delta a|$  而引起，所以  $EE'$  却增加  $2|\delta a|$ ，

$$\therefore e + \delta e = \frac{EE' + 2|\delta a|}{2a - 2|\delta a|} \dots\dots\dots (24)$$

所以在遠地點時  $e$  會增大。

(3)  $P$  在  $C$  (或  $D$ ) 時，

$2a = EC + CE'$  以  $2|\delta a|$  減少， $E'$  移  $E''$ 。設  $\angle CEE' = \angle CE'E = \theta$ ，由  $e$  的定義，

$$\cos \theta = \frac{OE}{CE} = e$$

若將  $EE'$  之減少為  $\delta E$ ，那麼  $\delta E = 2|\delta a| \cos \theta = 2|\delta a| e$

$$\therefore e + \delta e = \frac{EE' - \delta E}{2a - 2|\delta a|} = \frac{2ae - 2e|\delta a|}{2a - 2|\delta a|} = e \quad \dots\dots\dots(25)$$

即是 P 在 C 或 D 時，雖然由於 a 的減少，但是 e 不變化。

近地點離地球表面最低，遠地點最高，所以大氣密度  $\rho$  在近地點最大，遠地點最小。不但如此，人造衛星的速度  $v$  在近地點最快，在遠地點最慢。因此大氣的阻力在近地點最強，在遠地點最弱，所以(23)式的減少  $|\delta e|$  比(24)之增加  $|\delta e|$  更大。在 C 和 D 時  $\delta e = 0$ ，所以無影響。

這些關係更詳細可說明如下。若在近地點 (A) 和遠地點 B，取相等的微小道程  $\delta s$ ，其通過所需時間各為  $\delta t_A$  和  $\delta t_B$ ，速度以  $v_A$  和  $v_B$  表示，那麼

$$v_A = \frac{\delta s}{\delta t_A}, \quad v_B = \frac{\delta s}{\delta t_B}$$

由於開普勒 (Kepler) 第二法則 (面積速度一定)，

$$a(1-e)v_A = a(1+e)v_B; \quad \therefore \frac{v_A}{v_B} = \frac{1+e}{1-e} \quad \dots\dots\dots(26)$$

在 A 和 B，以同長道程  $\delta s$  運行時所受的大氣阻力各為  $R_A$  和  $R_B$ ，那麼

$$R_A = K\sigma\rho A v_A^2 \delta t_A = K\sigma\rho A v_A \delta s$$

$$R_B = K\sigma\rho B v_B^2 \delta t_B = K\sigma\rho B v_B \delta s$$

參照(26)式

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho A v_A}{\rho B v_B} = \frac{\rho A}{\rho B} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \quad \dots\dots\dots(27)$$

這類似的關係式在 DAC 間和 CBD 間也可成立。根據以上考察可知，e 在遠地點會增大，但是(27)式中  $\rho_A > \rho_B$ ， $\frac{1+e}{1-e} > 1$ ，那麼在一公轉之間，含近地點的 DAC 的 e 之減少比其他一半 CBD 的 e 之增加更凌駕，結果離心率受大氣的阻力而漸漸減小，軌道漸漸近於圓形。

### 【主要參考書】

- |                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| 天體軌道論， <u>長谷川一郎</u> (恒星社)  | マイコンが解く天體之謎， <u>中野主一</u> (新光社) |
| 天文計算入門， <u>長谷川一郎</u> (恒星社) | 天體の位置計算， <u>長澤工</u> (地人書館)     |
| 球面天文學提要， <u>荒木俊馬</u> (恒星社) | 天文の計算教室， <u>齊田博</u> (地人書館)     |