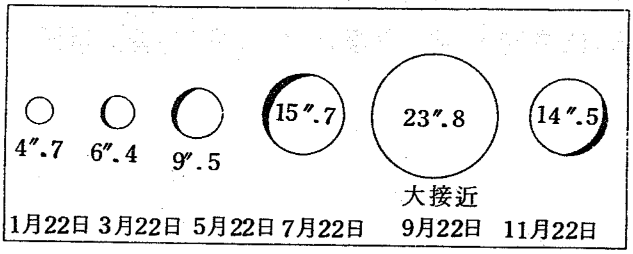
關於火星的天文計算法

何耀坤

臺南市私立光華女中

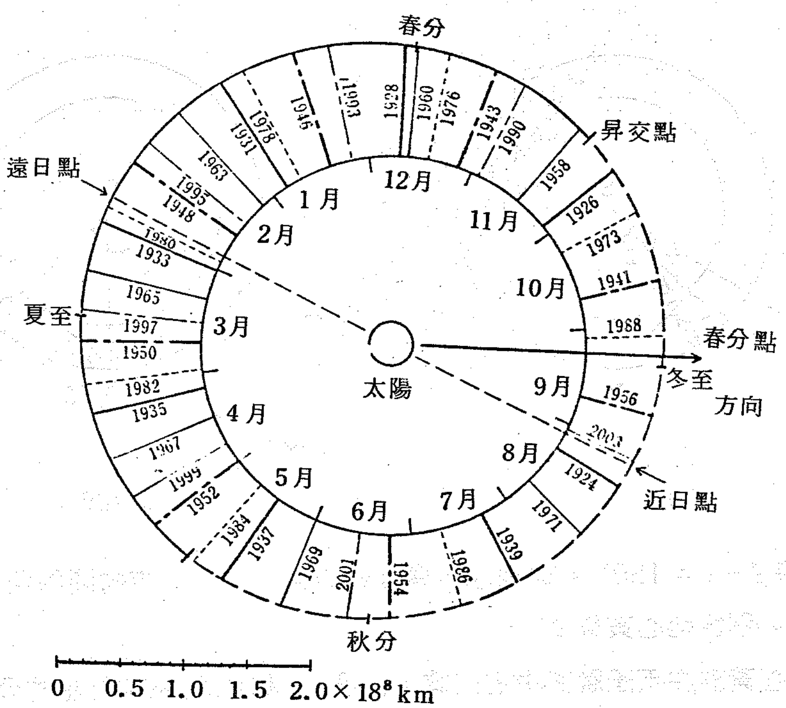
前年（1986）七月十六日火星和地球大接近後，今年九月二十二日又要大接近，其光度可達 −2.8 等，視直徑會達 23″.8（圖一）。火星的視直徑到今年六月時，會超過 10″，到八月下旬會超過 20″。下次的火星大接近，要等到公元 2003 年，所以今年是本世紀最後一次大接近觀測的機會。關於火星的觀測法，請參考本刊第 93 和 95 期。



圖一　今年火星接近地球的視直徑

火星的接近，其光度，視直徑，及下次大接近日期，爲什麼在事前能正確預測出來呢？（圖二）最近一般人的眼光漸漸能轉向宇宙，在書店有許多有關宇宙的書籍，但是都是簡單的圖畫和照片，介紹法只是形式的，無法使一般人能眞正了解天文現象。譬如說，「光一年間可達到的距離稱一光年」，只知這定義無法眞正理解一光年到底有多少。在天文書刊上所寫的是否正確，須要自己去體認才行，要用自己的能力去計算，尋找答案才能對天文學有所了解。

最近有許多青年學生對天文計算有興趣，尤其使用電腦來計算，在以前這是天文專家的工作，但是今天已經變成一般愛好天文者也能操作，不必要有高度的天文知識了。最近關於天體軌道計算，及人造衛星相關的知識被重視。本文配合今年的火星大接近季節來臨，特別提供有關火星的天文計算，喚起教師和學生對天文計算的興趣，更進一步了解天文現象爲什麼在事先能那麼正確地計算出來。



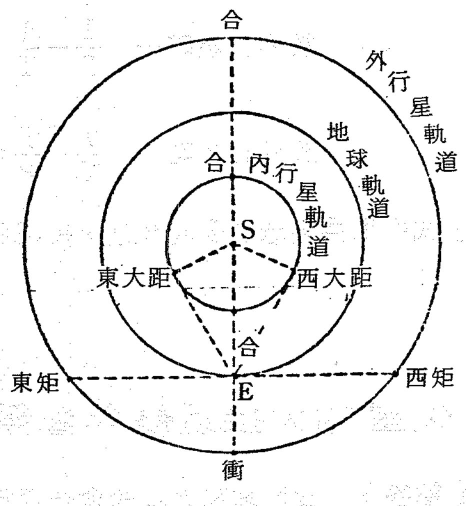
圖二 自 1924 ～ 2003 年間火星接近圖

一、行星的運動

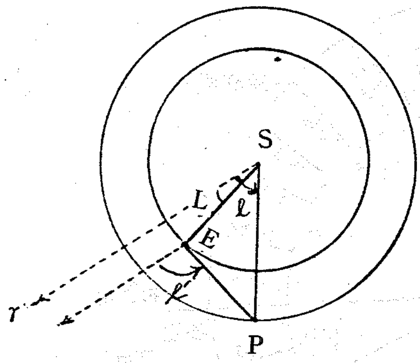
行星繞太陽周圍，畫橢圓軌道運行，因為其離心率和黃道夾角小，所以在一般計算時，行星軌道可當做圓形軌道，可暫不考慮其黃道夾角。

地球和太陽相關的行星的各種位置，如圖三，S 為太陽，E 為地球。

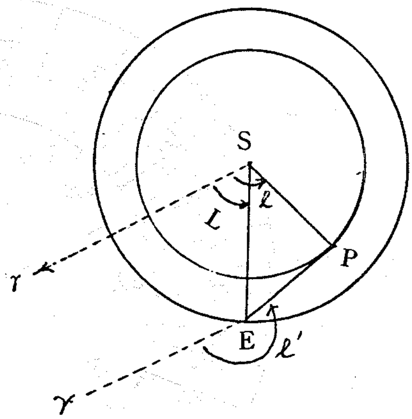
於圖四A，從太陽向春分點之方向 (γ) 畫直線 $S\gamma$，那麼 $S\gamma$ 和太陽與行星 (P) 之方向 SP 之間的角 $\angle \gamma SP$，是自 $S\gamma$ 向反時針方向測定，稱行星的日心黃經，以 ℓ 表示。設於 E 的地球之日心黃經為 L，那麼對外行星來說，在衝日時 $\ell - L$



圖三 地球及太陽相關行星的位置關係



圖四A



圖四B

$=0°$，在合時 $\ell - L = 180°$。從地球向春分點方向，及行星方向間的角 $\angle \gamma EP$，以反時針方向計測，稱爲地心黃經 ℓ'。

行星的日心黃經在天體曆表中有記載。假設 P_1 和 P_2 爲兩個行星的公轉周期，這兩個行星和太陽排列一直線上後，再下次排列一直線上的間隔稱爲會合周期（S），那麼可成立下式關係。

$$\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{S} \quad （但 P_1 < P_2）$$

若考慮和地球的會合周期，

於內行星時… $\frac{1}{P} - \frac{1}{T} = \frac{1}{S}$

於外行星時… $\frac{1}{T} - \frac{1}{P} = \frac{1}{S}$

上式中T爲地球的公轉周期，所用的各周期單位以年、日或秒都可以，但是必須要統一。

二、火星的大接近幾年會發生一次？

【解答】 設地球和火星的會合周期爲S，下次大接近假定在第m次的會合時發生，其間火星有若干次公轉。若火星的公轉周期爲P，經n次公轉後再發生大接近，那麼

$$mS = nP \quad (\text{m和n爲整數})$$

$$\therefore \quad \frac{n}{m} = \frac{S}{P}$$

因爲P＝1.88089年，那麼從會合周期式可得下式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1.88089} = \frac{1}{S} \qquad (S = 2.13522\text{年})$$

$$\therefore \quad \frac{n}{m} = \frac{2.13522}{1.88089} \; (= 1.1352179\cdots\cdots\cdots)$$

將這樣的無限連續的小數無法以正確的分數來表示，所以用近似分數表示，可使用連分數的方式如下計算。

$$\frac{2.13522}{1.88089} = 1 + \frac{25433}{188089} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{10058}{25433}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5317}{10058}}} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4741}{5317}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{576}{4741}}}}} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{133}{576}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{44}{133}}}}}}} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以上可如下寫

$$\frac{n}{m}=1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{44}}}}}}}}$$

①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧

從以上的$\frac{n}{m}$之近似分數，可得下值。

	(n/m)	(mS)	(nP)	(mS − nP)		
①	8/7	14.94654年	15.04712年	−0.10058年	=	−36.74日
②	17/15	32.02830	31.97513	0.05317	=	19.42
③	25/22	46.97484	47.02225	−0.04741	=	−17.32
④	42/37	79.00314	78.99738	0.00576	=	2.10
⑤	361/318	678.99996	679.00129	−0.00133	=	−0.49
	⋮					

即是發生大接近的間隔，是15年，32年，47年，79年，679年，……等。47年＝15年＋32年，79年＝15年＋32年×2，679年＝15年×9＋32年×17。所以從15年和32年的兩種組合，可求出大接近之年。

三、用望遠鏡能識別的火星上的最小花紋情形

設自地球至火星的距離爲△km，火星的半徑爲3390km，以望遠鏡能識別的火星面之花紋的最小長度爲γ km，那麼可成立下式：

$$\sin\left(\frac{25''}{2}\right) = 3390\,\mathrm{km}／\triangle\mathrm{km}$$

$$\sin\left(\frac{2'}{2\times 300}\right) = \gamma\,\mathrm{km}/2\triangle\mathrm{km}$$

$$\therefore\quad \gamma = \frac{3390\times 2\times \sin 0''.2}{\sin 12''.5} = 108\,\mathrm{km}$$

四、計算火星面的中央經度

求 1976年2月10日 20時 30分的火星面的中央經度 。根據天文觀測年表，所記載的火星面中央經度表，2月 10日 8時爲 $58^\circ.85$ ，11 日爲 $49^\circ.53$。所以自10 日 8 時至 11 日 8 時間，共 24 小時內火星的自轉角度爲：$(49^\circ.53+360^\circ)-58^\circ.85=350^\circ.68$，自 10 日 8 時至 10 日 20時 30 分之經過時間爲： 20 時 .5 － 8 時 = 12時. 5。

所以 2 月 10 日 20 時 . 5 的中央經度爲

$$58^\circ.85+350^\circ.68\times\frac{12.5}{24}=241^\circ.50$$

另外中央經度的補正值也有刊載於天文觀測年表，如

觀測時間	20 時 20 分	補正值 $+180^\circ.32$
	20 時 40 分	$+185^\circ.19$

所以 20 時 30 分的補正值爲 $(180^\circ.32+185^\circ.19)／2=182^\circ.76$

$$\therefore \text{中央經度} = 58^\circ.85+182^\circ.76=241^\circ.61$$

五、求算火星面的花紋之經緯度

圖五的左圖是行星，右圖是從地球所看的行星面。左圖中O爲行星的中心，N、S 各爲行星的北極和南極，OA爲赤道，OE是自行星至地球之方向。所以N′S′是從地球所看的行星之北端和南極。M爲行星子午線上的花紋之位置，M′ 爲M和同緯度上的花紋之位置。

$\angle AOE$ 是行星的中央緯度 B，$\angle AOM$ 是花紋的緯度 δ 。從M向ON畫垂線時，

$$\angle MCC' = \angle AOE = B$$

$CO = \gamma \sin \delta$（γ 是行星的半徑）

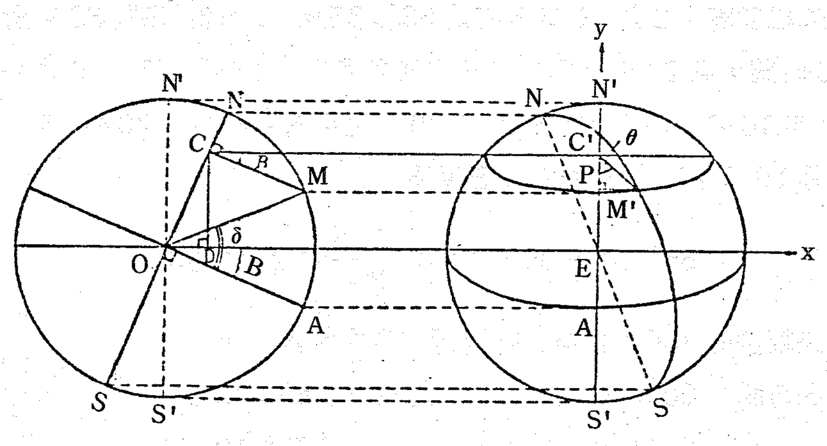
$CM = \gamma \cos \delta$

從C向OE畫垂線CD時，

$CD = OC \cos B = \gamma \sin \delta \cdot \cos B$

在從地球看行星面的圖（圖五之右），中心爲E，$N'S'$ 是中央子午線。M在C的周圍畫半徑 $CM = \gamma \cos \delta$ 之圓，但在圖五之右圖上，看起來好像在以 C' 爲中心的橢圓上運行。

現在以E爲原點，畫通過OE的直線爲x軸，將 $N'ES'$ 爲y軸。假設M從中央子午線 $N'E$，從經度移動 θ，而自 M' 向 $N'E$ 下垂線 $M'P$，那麼 $M'P$ 是 M' 的x座標。



圖五

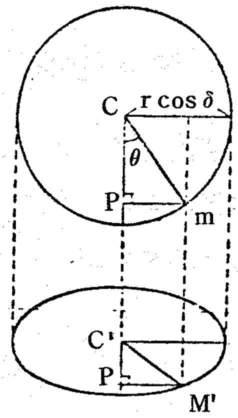
於圖六，上面部分是以C爲中心，將自轉的模樣m之軌道，從極方向看的，半徑爲 $\gamma \cos \delta$。下面橢圓部分是，從軌道面以B角度傾斜的方向所看的軌道圖，相等於圖五的右邊圖中以 C' 爲中心的橢圓。

於圖六，設 M' 相當於以C爲中心的圓軌道上的m，從m向 CC' 下垂線mp，從 M' 向 CC' 下垂線 $M'P$，那麼：

$\angle mCp = \theta$，$mp = r \cos \delta \cdot \sin\theta = M'P$，

$Cp = r \cos \delta \cdot \cos\theta$

因爲從角度B傾斜方向所看的圖是 $C'P$，



圖六

所以 $C'P = Cp\sin B = r\cos\delta \cdot \cos\theta \cdot \sin B$

再回到圖五，求M′ 之座標，

$$x\text{座標} = M'P = r\cos\delta \cdot \sin\theta$$

$$\begin{aligned} y\text{座標} &= C'E - C'P \\ &= CD - C'P \\ &= r\sin\delta \cdot \cos B - r\cos\delta \cdot \cos\theta \cdot \sin B \\ &= r(\sin\delta \cdot \cos B - \cos\delta \cdot \sin B \cdot \cos\theta) \end{aligned}$$

因而中央緯度B決定後，任意的緯度 δ，從中央子午線的任意經度差 θ 的位置，能用xy座標表示。所以將火星的攝影相片或火星的寫生圖一樣的圓，先畫在透明的紙上，在上面作圖特定的中央緯度時的經緯線後，將這張紙放在火星攝影相片上，或火星寫生圖上，可測定火星上模樣的位置。中央緯度參照「天文觀測年表」。

六、從地球看火星的光度的計算法

根據天文觀測年表，火星和地球有下列數值。

1976年：（8時），	（火星日心距離）	（火星地心距離）	（地球日心距離）
1月11日	1.5852	0.6743	0.9834
6月 3日	1.6652	1.9754	1.0144

設1月11日的火星之光度爲−0.85等，那麼6月3日的光度是幾等？

【解答】 火星和太陽及地球的距離，各爲 γ，Δ，地球和太陽間的距離爲R，火星表面的光度及反射能的定數爲C，從地球看火星的光度爲J，那麼

$$J = C(\gamma+\Delta+R)(\gamma+\Delta-R)/2\gamma^3\Delta^3$$

1月11日的光度爲 J_1，6月3日的光度爲 J_2

$$J_1 = 1.6942\,C$$

$$J_2 = 0.1717\,C$$

$$\therefore \quad \log\frac{J_1}{J_2} = 0.4(m+0.85)$$

$$\therefore \quad m = 1.64\text{等}$$

根據「天文觀測年表」記載爲1.75等，誤差爲0.1等而已。

七、火星表面的重力加速度的計算

求火星表面的重力之加速度，半徑為3390公里，質量為6.395×10^{26}克。

【解答】 設半徑為R，質量為M，萬有引力常數為G，在火星表面的重力加速度g，可從下式求算。

$$g = \frac{GM}{R^2}\ (\ G = 6720 \times 10^{-8}\ cm^3 / g \cdot 秒^2\ )$$

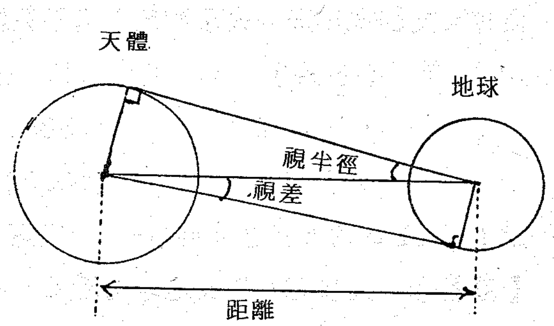
上式中代入各值，可得

$$g = 374\ cm / 秒^2$$

八、火星的地平視差

假設火星最接近地球時，其距離為0.365天文單位 。求這時火星的地平視差，但是太陽的地平視差是8″.80。

【說明】 從兩個不同地點看天體時，該地點和天體中心連結的直線互相所成的角，稱為視差（圖七）。因為恒星的視差很小，從地球上任何地點看，都在同方向。但是比較靠近地球的，如月球，太陽和行星，都能測定其視差，有時不可忽視其視差。



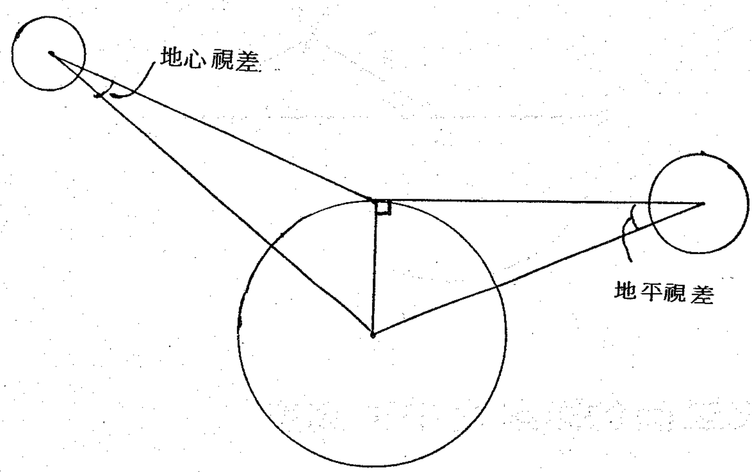
圖七

連結地球中心和天體中心的方向，稱地心方向。地球的赤道半徑對天體中心所成的角度，稱地心視差，簡稱視差（圖八）。天體在觀測地的水平線上時的地心視差，稱為地平視差。設地球的赤道半徑為R，地平視差為P_0，和天體的距離為D， 那麼 $D = R / \sin P_0$，可知D和$\sin P_0$成反比。

【解答】

	(距離)	(視差)
太陽…	一天文單位	8″.80
火星…	0.365單位	x″

所以 $\frac{0.365}{1}=\frac{8.80}{x}\quad \therefore x=24''.1$



圖八

九、在火星上任何地點能看到兩個衛星嗎？

假定火星半徑爲R，火星的兩衞星Phobos（內衞星）和Deimos（外衞星）的軌道半長徑各爲2.76R，6.92R，不考慮離心率，又設其軌道面和火星赤道面一致。

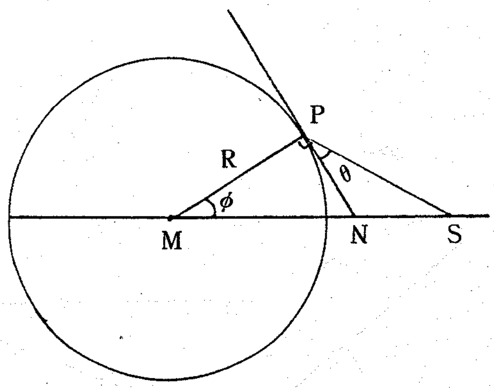
【解答】 於圖九，M爲火星中心，MS＝a爲衞星軌道半長徑 。P爲緯度ϕ的觀測地，那麼P和火星面的接線PN是P的地平線。P的位置變化時，N也在MS上移動。若MN＞MS時，在P點看不見衞星，即是

$\frac{R}{a}=\cos\phi$ 時的ϕ是能看到衞星的最大緯度。

那麼　Phobos：$\frac{R}{2.76R}=\cos\phi\quad \therefore \phi=68°45'$

$$\text{Deimos}：\frac{R}{6.92R}=\cos\phi \quad \therefore \phi=81'42'$$

根據以上，從高緯度 $81^\circ 42'$ 以上地方，看不見衛星。在 $68^\circ 45' \sim 81^\circ 42'$ 地方，只能看見Deimos ，兩個衛星都能看見的地點，是 $68^\circ 45'$ 以下低緯度地方。



圖九

十、計算火星面的衛星之中天高度

於圖九，緯度 ϕ 之地點P的衛星中天高度爲 $\angle SPN=\theta$ 。於三角形MPS，$\angle MPS = 90^\circ+\theta$ ，$\angle MSP = 90^\circ - \phi - \theta$ ，

$$\therefore \quad \frac{\sin(90^\circ+\theta)}{a}=\frac{\sin(90^\circ-\phi-\theta)}{R}$$

$$\text{即是} \quad \frac{R}{a}=\frac{\cos(\phi+\theta)}{\cos\theta}=\cos\phi-\sin\phi\tan\theta$$

$$\tan\theta=\frac{\cos\phi-R/a}{\sin\phi}$$

$$\therefore \quad \text{Phobos}： \quad \tan\theta=\frac{\cos\phi-0.3623}{\sin\phi}$$

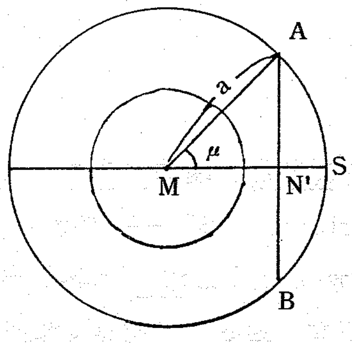
$$\text{Deimos}： \quad \tan\theta=\frac{\cos\phi-0.1445}{\sin\phi}$$

十一、在火星上地點，衛星能見於天空上的時間

在火星面的緯度ϕ之地點，求算衛星能看見於天空的時間。圖十是將圖九，從極看赤道面的投影圖，如N被投影為N′。

$\therefore MN' = MN = R / \cos\phi$

通過N′和MS垂直的線，和衛星軌道的交點為A和B，這點就是衛星在地平線上的某點，S是中天點。所以弧ASB是於P點的衛星在天空上的軌道部分。



圖十

設$\angle AMN' = \mu$，那麼

$\cos\mu = MN' / MA = R / a\cos\phi$

衛星在軌道一周所需時間為k，衛星出現在天空上的時間為t，那麼

$$t = \frac{2\mu}{360^\circ} \times k = \frac{\mu k}{180^\circ}$$

k值在Phobos是0.4627日，在Deimos是5.4789日

【例】 於赤道的數值，Phobos為4時15分鐘，Deimos為59時41分鐘。Phobos 出現於天空的時間是4時15分，在地平線下的時間為6時51分鐘。Deimos出現於天空的時間為59時41分鐘，在地平線下的時間為71時49分鐘，都是在地平線下的時間較長。

參考資料

1. 天文觀測年表：地人書館編。
2. 天文計算入門：長谷川一郎著。
3. 天體位置計算：長澤工著。
4. 天體軌道論：長谷川一郎著。
5. 天文計算：齊田博著。