以立體投影法
預測人造衛星運行位置

何耀坤　編譯

臺南市私立光華女中

以天球赤道和春分點爲基準表示天體位置的座標稱赤道座標，是由赤經和赤緯（或北極距離）組合。赤道座標易測定，對尋找天體位置方便。地平座標是高度（仰角）和方位角之組合，易表示天體在天球的視位置。地平座標由觀測地點和時間不同而變化，利用這性質可測定觀測地點的經緯度和正確時間。方位角的精密測定困難，一般只用高度。測定高度和方位角可使用六分儀，經緯儀，精密測定高度用子午環。將赤道座標變換爲地平座標，要用球面三角法，對一般人來說是很煩雜作業。本文特別介紹用立體投影法和製圖計算變換座標的方法，以便預測人造衛星的運行位置。

一、高度和方位角

觀測人造衛星位置若用赤經和赤緯表示，因爲天球在日周運動，無法隨時知道東西方向。若用高度和方位角，因爲用觀測地的天頂和子午線爲基準，所以容易判別方向。如圖1，Z爲天頂，P爲北極，大圓（圖2）PZ爲子午線，子午線和地平線在北交點爲Q，天球上的天體爲S，連結Z和S的大圓和地平線之交點爲T。那麼S的方位角爲∠QOT，是以OQ爲基準從北→東→南→西北，用0°至360°計測。如S在天頂北方爲0°，在東邊爲90°，在南邊爲180°，西邊爲270°。S點高度爲∠TOS，以h

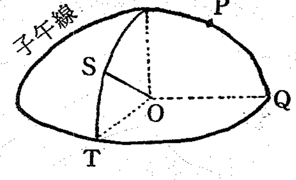

圖1　高度和方位角

表示。高度對地平線上之點爲 0°，天頂高度爲 90°，∠ZOS稱天頂距離，以Z表示，那麼 Z + h = 90°。

實際觀測天體位置時高度比天頂距離容易計測，但是爲了後來的計算使用天頂距離較爲方便。如此將天球位置以方位角和高度（或天頂距離）表示的座標稱地平座標。

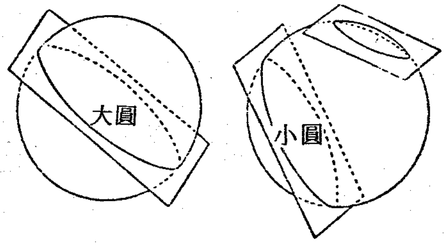

圖 2 大圓和小圓

二、立體投影法

將赤道座標變換爲地平座標，在數學上應用球面三角法，須經很繁雜的計算，但也可用下述的製圖計算方法變換座標。假設有如圖 3 的半球狀的天球模型，將 P 和 Z 兩點連結爲大圓，球中心爲 O，∠POZ 爲 1°時使 PZ 之弧長爲 1，然後測定 P 和 Z 間的弧長，就可測出從 O 看這兩點的張角，這時弧長稱這兩點的角距離。於圖 3，半球底的圓爲地平線，P 爲北極，Z 爲天頂，PZ 爲子午線。自 P 畫角距離 90° 的大圓就成赤道，赤道和子午線之交點爲 L，和地平線交點爲 M。

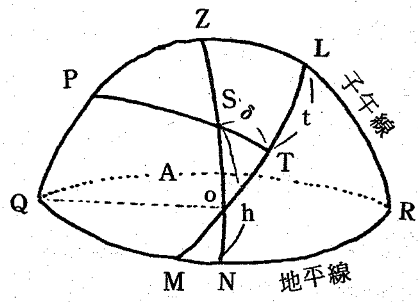

圖 3

假設某天體 S 的赤緯爲 δ，時角爲 t（圖 3）。如果將天體位置要記入天球上，其方法是從 L 先在赤道上求角距離 t 相離之點爲 T，而畫經 P 和 T 的大圓，然後求從 T 相離角距離爲 δ 之點爲 S。決定 S 點以後，用下列方法求高度和方位角。天頂 Z 和 S 相連的線和地平線之交點爲 N，那麼 SN 就是高度，ZS 是天頂距離，弧 QN（向 Q→R→N 計測）之角距離是方位角。

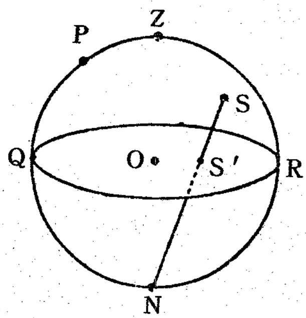

圖 4 立體投影

實際上作這種球面模型，要畫出大圓是困難的，必須將這球面模型平面化。例如於圖 4 中，大圓 QR 爲地平線，Z 爲天頂，P 爲北極，這天球下半雖看不見，天頂的相

對點N爲天底。假設天球上的S點，相連S和N的線和平面QR之交點爲S′，S和S′對應。那麼天球在地平線上面部份都能和這圓內的點相對應，這種對應法，我們可將半球面上的都記在一個圓內，稱立體投影。

立體投影在數學上具有趣性質，假設球面上有兩曲線以某角度相交在某點時，其立體投影也以同角度相交。於圖5①兩曲線a和b在A以角度θ相交時，其立體投影如圖5②。所投影的曲線a′和b′必以角度θ相交，這種對應稱等角映像。假設有如圖6的大圓ABC，地平線也是大圓，兩大圓在A和C點相交，而A和C以O中心爲對稱。若將大圓ABC迴轉直線OZ周圍，使A點和子午線之正北點P一致，那麼C點會和子午線正南Q點一致。因此天球上所有的在垂直線OZ周圍沿球面以適當角度迴轉時，可和通過P和Q的大圓一致。

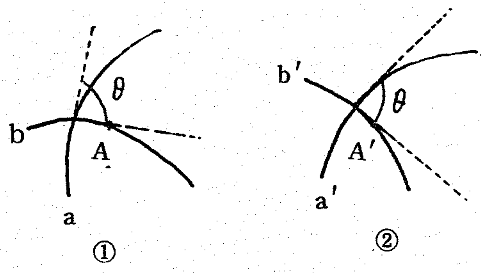

圖5

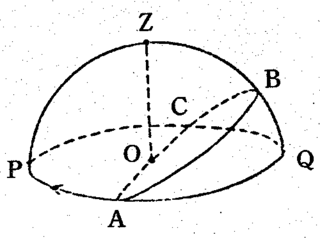

圖6

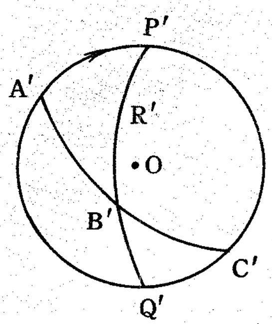

圖7

假設大圓ABC的立體投影爲A′B′C′，另一大圓PRQ的投影爲P′R′Q′（圖7）。那麼將圓弧A′B′C′在中心O周圍迴轉時，會和弧P′R′Q′一致。如果在圓PQ內部畫通過球面的大圓群對應的立體投影圓弧群時，在球面上的所有大圓的立體投影，將這圓弧在圓心周以適當角度迴轉時，必會和所畫的圓弧群中的任何一個一致。實際上要畫通過PQ的所有的大圓之立體投影是不可能的，所以畫如圖8，從子午線每2°通過PQ的大圓立體投影，就是立體投影方格紙。

在這方格紙上畫有和這些圓弧群相交直角的圓弧群，是在球面上從0°每增2°角距離的小圓之立體投影。從0°之點的角距離是記在圖8的圓外之數字，是計測大圓之長

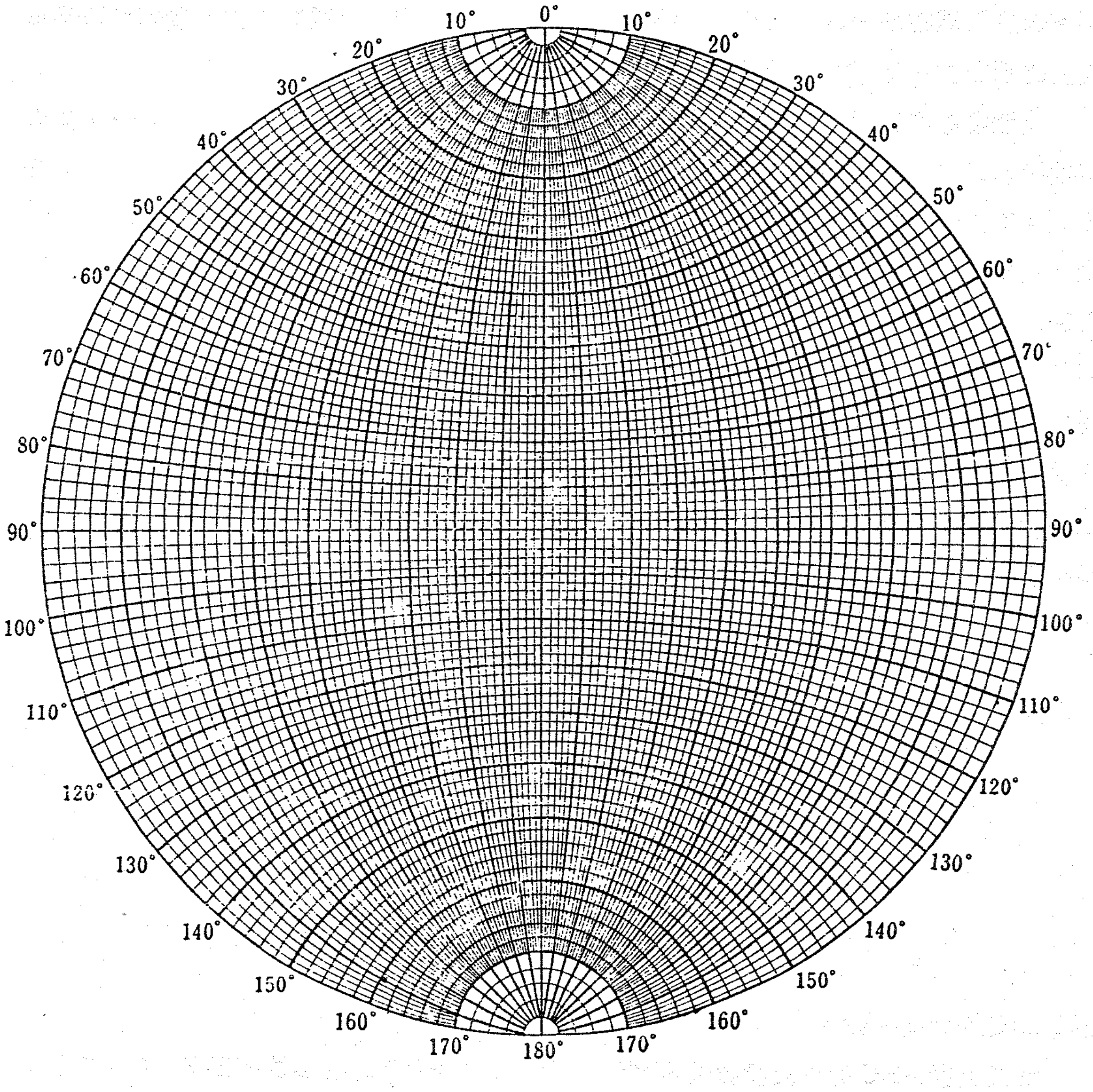

圖 8 立體方格紙

度指標，例如 16° 之小圓和 40° 之小圓之長度所夾的大圓之弧長是 40°－16°＝24°

三、赤道座標更換爲地平座標的方法

將球面上的圖形立體投影於平面的方法，先準備描畫透視紙放在圖 8 的立體方格紙上，描寫外圓和中心位置。若目標的天體在子午線西邊（時角爲正），或在東邊（時角

爲負或比 12 時大），其方法不同。在此以時角爲正，自0時至6時之間爲例說明。現在將天球子午線西半立體投影於這張圓內，在圖9描畫的圓爲L X MY ，中心點爲O。圓周上的一點爲P，將之爲天球北極之投影。半圓XPMY是子午線投影，XY 爲天球西邊地平線投影。那麼XY是∠POX相等於此地點緯度φ的直線。天球的赤道被投影爲和PO 垂直的直線LM，天頂Z爲XY 垂直線和圓周之交點。所以在圓內能畫出北極P，天頂Z，赤道LM，地平線XY ，那麼在圖上容易記上已知赤緯和時角，以及已知的高度和方位角。下面用之將赤道座標更換爲地平座標。

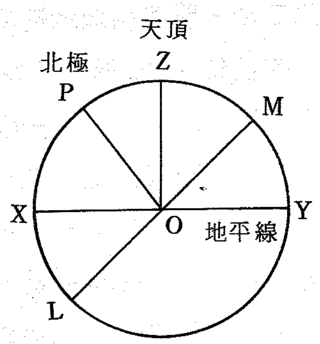

圖 9

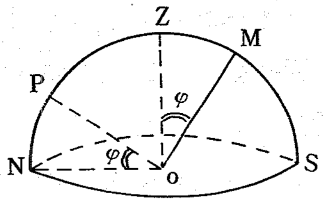

圖 10

假設已知某天體的赤緯和其時角，若時角用時、分、秒單位表示時，要改爲度數單位，赤緯爲δ，時角爲t。在圖 11 中從M的角距離爲t的直線LM上之點爲K，然後畫連結K和P的大圓。這是使用透視紙放在圖8的立體方格紙上，以中心爲軸迴轉，求自P經K的大圓。然後從K計測在大圓弧PK 上的角距離爲δ之點爲S。計測S點的高度和方位角的方法如下，先畫經Z和S之大圓，和XY 之交點爲N。那麼S和N之角距離爲高度，N和Y的角距離是從正南計測的方位角。方位角是從正北向東計測，就是將NY 之長度加180°等於方位角。若時角爲負時，NY的角距離是自正南向東計測，就是從180°減角距離NY之大小，等於方位角。用此方法計測弧長和角度時，應特別注意方向，如計測時角從子午線向西時爲正，向東時爲負。赤經自赤道向北計測時爲正，向南時爲負。

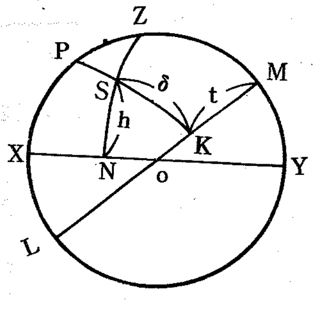

圖 11

用立體投影法將赤道座標表示的天體位置，更換爲地平座標的方法綜合整理如下：

(1) 求觀測地點的經緯度，用200萬分之1地圖，記到十分一度。地圖上的經度大都用度單位表示，應改爲時分單位。假設所求經度爲東經8時＋λ_0分（8是中原標準時間和世界時的差）。

(2) 用λ_0求算對觀測時間T的恒星時，可用下式。

設當日於世界時的格林威治恒星時為Ⓗ。（希臘字母Theta之大寫），中原標準時間為T時，該觀測地的恒星時如下式。

恒星時＝Ⓗ。時＋T時＋（0.164×T時）分＋$\lambda_{。}$分－1.5分……(1)

上式最後兩項在同一地點是同值。

(3)恒星時減天體赤經，由下式可求天體的時角。

圖12中，P為天球北極，Z為天頂，AB為天球赤道，γ為春分點，S為天體。那麼

∠γPS＝天體S的赤經＝α

∠SPZ＝天體S的時角＝t

∠γPZ＝恒星時＝Ⓗ

t＝Ⓗ－α……(2)

因此知恒星時和赤經，就可求算該天體的時角。

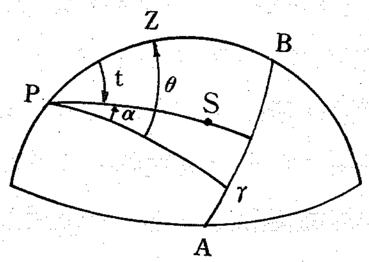

圖12

(4)用時角和赤經，使用立體投影法可求高度和方位角。

為計算方便，可事先準備下列事項。①從觀測地點經度，用公式(1)，事先計算式中的（$\lambda_{。}$－1.5）分之值。②從觀測地的緯度，在透視紙上記入圖9的天頂，北極，子

表1　於世界時0時的格林威治恒星時間

1月	1日	6時	40分	7月	1日	18時	36分
	11	7	19		11	19	15
	21	7	59		21	19	54
2	1	8	42	8	1	20	38
	11	9	22		11	21	17
	21	10	01		21	21	57
3	1	10	35	9	1	22	40
	11	11	14		11	23	19
	21	11	53		21	23	59
4	1	12	37	10	1	0	38
	11	13	16		11	1	18
	21	13	56		21	1	57
5	1	14	35	11	1	2	41
	11	15	15		11	3	20
	21	15	54		21	3	59
6	1	16	37	12	1	4	39
	11	17	17		11	5	18
	21	17	56		21	5	58

午線，赤道等。③準備世界時0時的格林威治恒星時的表（表1）。④準備圖8的立體方格紙。

四、對地球的人造衛星軌道

於圖 13 中，設A點爲觀測者，人造衛星B在大圓的軌道上運行。設人造衛星的周期爲T分，在圖 14 之①中，設人造衛星在A點，觀測者也在A點。從A點出發的人造衛星經時間T，不能返A點，而返到同緯度稍偏西的A′。因爲人造衛星的昇交點稍有逆行性質，軌道一周後昇交點N移於偏西N′。假設昇交點一天逆行W度時，一周期T分之間昇交點偏西X°，那麼，

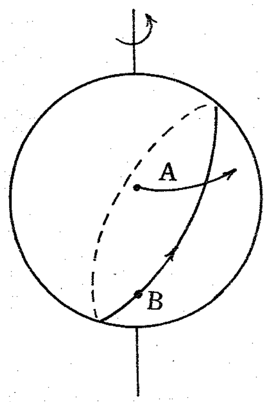

圖 13

周期間的昇交點逆行之大小 $= X = \dfrac{W}{1440} \times T$ ……(3)

W每天約4°，T在 90 分至100分間，X約0.25°。觀測者在A點，經T分後因受地球自轉運動，經度偏東T分。觀測地點每分鐘向東移¼°，那麼T分後Y $= T°/4$ 向東移動。但T分非以平均太陽時計測，要以恒星時爲單位，其差微小。若以觀測者看來，人造衛星一周期（T分）後，經度偏西如下式，大約25°左右。

$$K = X + Y = \left(\frac{T}{4} + \frac{W}{1440}T\right)° \cdots\cdots(4)$$

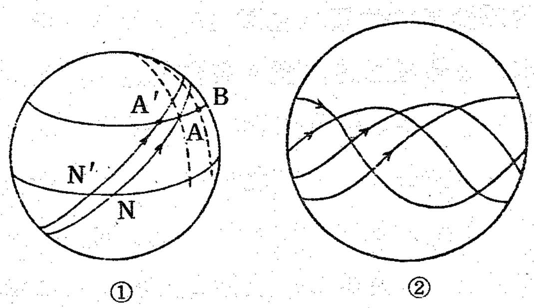

圖 14

所以將人造衛星經路畫在地球上，如圖 14 之②，每繞地球一周，偏西 25°（圖15）。

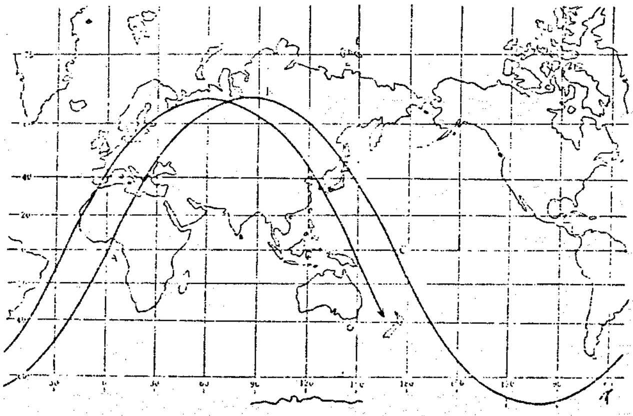

圖 15

五、短時間內的人造衛星位置預測法

人造衞星發射後，在國際電訊會發表其軌道傾斜角（i）值，周期（T），何時何分會通過那些地方上空。爲知當天在臺灣地區能否觀測到，用下列方法我們可預測在 24 小時內該衞星的位置。在圖 15 ，將A，B，C曲線形狀剪出作軌道模型，放在世界地圖上求人造衞星通過位置。製作軌道模型用立體投影法，將圖 14 之①北半球部分在圓內立體投影。圖 16 是其立體投影圖，赤道在圓LMN ，北極在Z，人造衞星軌道在圓弧MPN 投影。要畫圓弧MPN ，使用透視描畫紙放在立體方格紙（圖8）上，在直線LZ 上從L計測，和軌道傾斜角（i）相離之點爲P，然後將通過MPN 的圓弧從圖 8 的圓弧群中選出，而用鉛筆畫MPN 。M爲昇交點，N爲降交點，連結M和N的線通過 Z 。

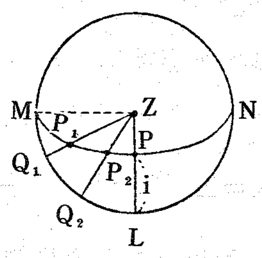

圖 16

若人造衞星周期爲T分，衞星從M至N需T/2分，MN 之大圓之長爲 180° ，那麼在一分鐘內衞星在弧上移動如下。

$$180° \times \frac{2}{T} = \frac{360°}{T} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

例如周期 96 分時，衞星一分鐘以 3.75° 在大圓上移動。衞星出昇交點M後經 10

分，20分，30分……的位置記在圖16的大圓MPN上，如37°.5，75°，112°.5 ……之點記在MPN 弧上各爲P_1，P_2……。那麼從地上觀測者看來人造衛星如何移動呢？前述人造衛星一周期後，如(4)式經路以K° 偏西，這表示人造衛星飛T分之間，地球以K°對衛星軌道迴轉，那麼一分鐘時地球對衛星軌道迴轉如下式。

$$\frac{K}{T}=\frac{1}{4}+\frac{W}{1440}\sim 0^\circ.25 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

上式中W很小，若在短時間的計算可省略。例如10分鐘爲2°.5，20分鐘爲5°，地球對衛星軌道迴轉。在圖16，若衛星經M後10分鐘，衛星位置在P_1，連結Z和P_1和赤道交點爲Q_1，那麼衛星軌道上的緯度增爲P_1Q_1，經度增爲MQ_1。對地球來說，緯度的增加也是P_1Q_1，但經度之增加是因爲衛星從M到P_1間每分鐘以(6)式之量向地球迴轉，所以等於$MQ_1-0^\circ.25\times 10^\circ$。以同樣方法，人造衛星通過昇交點M後20分鐘時，對地球的緯度增加爲P_2Q_2，所以經度增加是$MQ_2-0^\circ.25\times 20$。

現在用人造衛星（1957 α）爲例，其軌道傾斜角（i）和初期的周期（T）的數値爲 $i=65^\circ$，$T=96$ 分，根據這資料畫如圖17的立體投影圖，其經緯度如表2。表中第一行是衛星通過昇交點後的時間，對這些時間的點P_1，P_2……之緯度（P_1Q_1，P_2Q_2……之長）和經度（弧MP_1，MP_2……之長，在圖16）寫在第二、三行。第四行是將0°.25乘第一行的經過時間，從第三行減第四行，就是第五行。

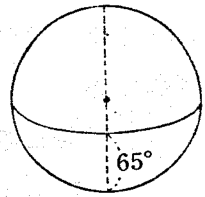

圖 17

表 2

昇交點通過後經過時間	各點的緯度	各點的經度①	0°.25×經過時間②	①−②
0分	0°	0	0	0
5	17.0	7.5	1.3	6.2
10	33.5	18.5	2.5	16.0
15	49.5	32.5	3.8	28.7
20	61.5	50.5	5.0	45.5
25	65.0	97.5	6.3	91.2
30	57.5	134.0	7.5	126.5
35	42.0	154.5	8.8	145.7
40	27.5	166.0	10.0	156.0
45	10.5	175.0	11.3	163.3

完成了表 2 後，將第二行緯度和第五行經度（用東經）之點記在地圖上，連結曲線。然後將這曲線和地圖的赤道之間的半圓型圖形描畫在圖畫紙上並剪起來。剪出來的半圓型紙上將表 2 的 5 分，10 分……對應點記入，這是通過昇交點後的衛星經過時間。

軌道模型紙的使用法，例如有某人造衛星消息說，何時何分通過臺灣地區。那麼在世界地圖上將這軌道模型紙的直線部分放在赤道上，左右移動使模型紙的曲線部分通過臺灣，因爲這模型紙的曲線表示該人造衛星的經路。軌道模型紙的組合有如圖 18，有兩種。例如人造衛星飛行方向自西南向東北是 PQR，自西北向東南時經過 P′Q′R′。如果有消息說某衛星何時何分通過了倫敦，那麼將圖 18 的兩個經路前後延長，採用在那時間通過倫敦的軌道。關於經路上的衛星通過時間，因在軌道模型紙上有時間尺，用此求衛星通過臺灣 10 分後到那位置。

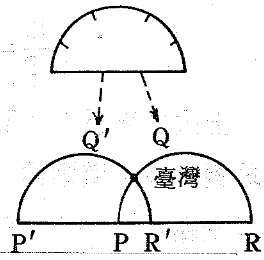

圖 18

這軌道模型紙只表示在地球北半球上的經路，若要連接南半球時，如圖 19 先畫北半球經路 PQR 後，在北半球的昇交點 P（或降交點 R），顚倒連接就可。如果某一衛星經路，想求一周期前（或後）經路時，先在地圖上畫 PQR，後來將昇交點 P，以(4)式的 K° 向西（或東）移動。想求衛星在兩星期前的經路，向西移 2K° 就行。

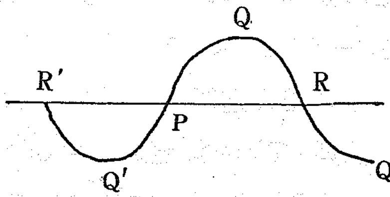

圖 19

主要參考書

1. 星位置のあらわし方：中野三郎（新天文學講座第一卷）
2. 時刻の計り方：關口直甫（恒星社）
3. 人工衛星の觀測法：關口直甫（恒星社）
4. 天文計算入門：長谷川一郎（恒星社）
5. 球面天文學提要：荒木俊馬（恒星社）