談帶分數記號與大數分節

林福來

國立臺灣師範大學數學系

這裡要談的是關於兩個數學記號的小問題，帶分數記號與大數分節的約定問題。75年6月假中央大學舉行的國科會數學教育合作研究計畫年度成果報告中，曾經討論過帶分數記號是否值得保留，以及大數分節應否更改以配合國人的進位習慣等問題。在此對此二問題舊調重彈，意在提供課程發展者思考與判斷的素材。

設想引進帶分數記號$2\frac{1}{3}$的理由，顯然是爲了書寫上的簡便。$2\frac{1}{3}$既將$2+\frac{1}{3}$中的加號“＋”省略不記，達到簡便的目的，同時又保留整數2與分數$\frac{1}{3}$的原始風貌，使我們很容易將我們對2與$\frac{1}{3}$的數值感受，轉移至$2\frac{1}{3}$。

不過，這簡便的記號，却也帶來若干學習上的困擾，簡述於下：

一、增多教材單元——帶分數

有了帶分數記號，自然就得介紹帶分數的意義，帶分數的四則運算。如果增加一點教材，可以使學習更順暢，那自然很值得。可是帶分數這單元，本身就又增加許多學習困難。例如，介紹帶分數記號的意義，把它當成新的概念，使有別於自然數與分數來教，就想當於隱隱約約地告訴學習者，2與$\frac{1}{3}$，一個是整數，一個是分數，那是兩個不同的系統，不同系統的元素相加，不能眞的混合，就直接“擺在一起”，所以產生$2\frac{1}{3}$這記號。一旦學習者建立此心像，一、兩年後學習文字符號時，有的人會據此心像，“不同系統的元素相加，就擺在一起”，來推論$2+a=2a$與$x+y=xy$應是合理的演算。關於此類文字符號的錯誤演算，我們有些實證的數據，下面再回頭來談。

關於帶分數的四則運算，許多學生學過後，並不見得有多少了解。例如，下面這題帶分數除法意義的檢驗題（參閱楊壬孝，民76）。

選擇題：$3\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{5} = ?$

	12歲	13歲	14歲
(1) $(3 \div 2) + (\frac{1}{3} \div \frac{1}{5})$	20%	28%	23%
(2) $(3\frac{1}{3} \div 2) + (3\frac{1}{3} \div \frac{1}{5})$	17%	18%	14%
(3) $(3\frac{1}{3} \div 2) + \frac{1}{5}$	6%	9%	7%
(4) $(3 \div 2\frac{1}{5}) + (\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{5})$	44%	35%	45%

正確答案(4)，選對的學生，臺北小學六年級（N＝214），台北國一（N＝220）與臺北國二（N＝228），分別是 44%，35%與 45%。選(1)的百分率是錯誤選項中最高的，選項(1)說明帶分數相除時，整數除以整數，分數除以分數，兩個不同系統的元素各自運算後，再相加。

不過相同的題目，改成要學生計算答案，結果同一群樣本，國小六，國一與國二學生，算出正確答案的百分率分別是（76%，80%，70%）。

這兩題答對率的大差異，提示我們學生會計算，並非眞了解運算的意義，多半是記憶運算的法則。換句話說，有了帶分數記號，似乎很自然需要教它的四則運算。而四則運算的教學，從楊壬孝（民76）的測驗結果，大致上可看出主要是教計算法則而已。學生則增多了一些需要死背的規則。

根據楊壬孝（民76）的調查，臺北市學生的帶分數四則計算題，國小六年級、國一、國二學生的答對率集中在70%～90%。這種計算能力夠不夠好，很難絕對地下判斷。不過跟英國學生比較，倒是好非常多，同樣題目差異一般在 30%以上。（參閱Hart，1980）。

先學會計算，增强學習信心後，再求了解是一種學習方式，反過來，也可先求了解，再據此了解學計算。這兩種方式，孰優孰劣，不是我們要討論的重點。我們要提醒的是，“學會計算再求了解”的重點是，後來還是需要求了解，可是從“$3\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{5} = ?$”這道除法意義的選擇題的測驗結果看，國一、國二學生很可能並沒“了解”。這是增多帶分數的四則運算之教材單元後，學生的學習困難。

二、文字符號運算的錯誤類型——帶分數模式

調查國中學生對文字符號概念了解的情況時（參閱林福來等，民73），發現一些文字符號運算的錯誤類型，形式上跟帶分數記號很相近，例如，$2+n=2n$ 與 $x+y=xy$，學生的想法基本上都是不同系統的元素，不能混合，所以相加時，直接去加號擺在一起，這樣的錯誤類型，我們稱它爲帶分數模式。

民國73年的調查（林福來等，民73），發現有帶分數模式行爲的國中生很普遍，如下表一所示：

表一　特定答案百分率（民73年，林福來等）

題 目 與 答 案	國一（N=191）	國二（N=190）	國三（N=182）
4加 $3n=7n$	48%	29%	22%
4加 $n+5=9n$ 或 $4n+5$	41%	24%	17%

上表中的百分率是臺北地區學生紙筆測驗卷上可觀察得到的資料。當學生形式上表現出帶分數模式行爲時，其內在的想法是否根源於帶分數記號呢？73年的調查中，有位國中老師提供如下的一份學生詢問資料：

學生："請問老師，

$$2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$$

$$2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$$

……

$$2+\frac{1}{n}=2\frac{1}{n}$$

……

這些都對，所以 $2+n=2n$，這爲什麼不對？"

這個案當然不足以代表所有表現帶分數模式行爲的學生，不過至少顯示有學生在挑戰中、小學數學教材內記號的不一致性了。

檢查中、小學數學教材，不難發現帶分數記號 $2\frac{1}{3}$ 是唯一一個省略"＋"號的記號

。這“唯一”需不需要存在呢？值得談談。

關於帶分數記號影響帶分數模式行爲有多大的問題，正進行中的“國中生文字符號概念的了解”研究，或將會有進一步的發現。（郭汾派等，民76～）

三、帶分數的計算困擾

帶分數相加（相減）運算，可化成假分數再加（減）或整數部分加（減）整數部分，分數部分加（減）分數部分，這兩種運算方式，除了相減時分數部分不夠減需從整數借1的情形，或許添加新的計算困難，否則是不會比整數或分數各自的加、減運算困難的。

帶分數的乘法，情況就不同了。如果$2\times 2\frac{1}{3}$的計算過程中，將帶分數記號還原如下：

$$2\times 2\frac{1}{3}=2\times(2+\frac{1}{3})=4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$$

那麼，遇到$3\times 2\frac{1}{3}$的情形，就得

$$3\times 2\frac{1}{3}=3\times(2+\frac{1}{3})=6+\frac{3}{3}=6+1=7$$

出錯機會不大。或者將帶分數化成假分數再相乘，雖手續稍繁，基本上不比眞分數相乘增多出錯機會。不過，一般教學時常常教學生走捷徑，運算如下：

$$2\times 2\frac{1}{3}=\underset{\substack{\uparrow\\ 2\times 2}}{4}\ \underset{\substack{\uparrow\\ 2\times\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

這樣的運算出錯機會就大了，例如：

$$2\times 2\frac{1}{3}=4\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{2\times 1}{2\times 3}}}{\frac{2}{6}}\cdots\cdots(a)$$

及

$$3\times 2\frac{1}{3}=6\frac{\cancel{3}\ 1}{\cancel{3}\ 1}=6\cdots\cdots(b)$$

(a)這種錯誤，主要是分數乘整數的差錯，不算是帶分數記號引起的，但像(b)這樣的錯誤，就是爲了講求運算快速，計算時 $2\frac{1}{3}$所代表的 $2+\frac{1}{3}$ 中的“＋”在運算中完全被忽略所造成的。

上述捷徑式的計算過程，往往被學生進一步推廣至兩個帶分數相乘的運算，即兩帶分數相乘，整數乘整數，分數乘分數。例如，周武男（民76）的調查中，就發現國中生有這樣的運算，

$$2\times 2\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{2}=8\frac{1}{4}$$

並且這種錯誤出現的百分率，隨著年齡增加而增加。國三比國二多，國二又比國一多。這現象或許可解釋爲，學過帶分數的時間愈久，忘記其意義的學生愈多。如果此趨勢繼續發展，那麼在大學生的考卷上發現此類錯誤也就不足爲奇了。

綜觀帶分數相乘所造成的錯誤，根源都是計算過程中，沒有顧及被省掉的“＋”號所致。

帶分數相除，前面已舉過例子，指出“整數除以整數，分數除以分數”這種錯誤的運算律，被 20%～28%的國小六年級及國一、國二學生所遵行。

總之，帶分數教材就像任何其他數學單元一樣，有它本身的學習困難；特別地，帶分數記號又造成文字符號學習的困難。

我們該如何因應？兩種對策：

第一種對策是不變。既然我們學的數學基本上是西方的，西方數學介紹了帶分數記號，母體不變，自不應在枝節上亂動，徒生銜接困擾，這是保持不變的理由之一。再者，學生中眞正因帶分數記號帶來學習困難的，總算不是大多數。只要對那些有學習困難者進行診斷教學即可，這是支持不變的第二個理由。

第二種對策是變。要變如何變？變了會不會滋生新的學習困難？

欲改變帶分數記號，原則是能減少不必要的教材及去除因它帶來的學習困難。如果另創新記號來表示 $2+\frac{1}{3}$，那麼類似目前的帶分數教材仍然照舊需要，只是更改成新記號而已，教材還是減少不了。因此，另創新記號並不足取。如果不創新記號，那就有兩種處理方式，一是使用既有的記號，一是不用記號。

使用既有的記號，自然我們會想到假分數，即將 $2+\frac{1}{3}$表成$\frac{7}{3}$。學習到了某一程度，比如說高中階段，這種假分數的表示法其實已經是實際課堂上早已使用的了。解 $3x=7$，到了高中，甚至在國中階段，$x=\frac{7}{3}$或 $x=2\frac{1}{3}$，兩種寫法在數學教室內，同時

都會被接受的。另外，從數學結構的觀點看，也很支持$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$的表示法。在高中數學裡，從整數系推廣到有理數系時，有理數系的元素，定義是形如$\frac{q}{p}$的數，p、q都是整數且$p\neq 0$。整數、分數都是有理數。更高等的代數裡，又進一步描述有理數系是一個“體”(field)。“體”這結構的直觀意義，就是“體”內的任意兩個元素都可以合法地進行加、減、乘、除四則運算(除數自然不能是0)，其結果還是一個“體”內的元素。令$\mathcal{R}$代表有理數體，則$\frac{2}{1}=2\in\mathcal{R}$，$\frac{1}{3}\in\mathcal{R}$，由“體”的特性知$2+\frac{1}{3}$也可表成$\frac{q}{p}$的形式，亦即$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$。

到了高中階段，學生對分數的了解較深刻，較有能力感受$\frac{7}{3}$的數值大小，$2+\frac{1}{3}$以$\frac{7}{3}$來表示同樣具有簡便且不失數值感的好處。可是對於小學五、六年級或國一學生，他們對$\frac{7}{3}$的數值感受如何呢？

楊壬孝(民76)的調查，對於在數線上標出$1\frac{1}{5}$與$\frac{9}{5}$這兩個數，國小五、六年級及國一學生的答對率分別如下表二所示：

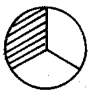
表二　答對率(%)　(楊，民76)

題目＼年級	國小五(N=220)	國小六(N=214)	國中一(N=220)
在給定的數線上標出$1\frac{1}{5}$	35	66	88
標出$\frac{9}{5}$	21	58	81

表二顯示假分數比帶分數難了解，且年紀愈小愈感困難。從分數的學習過程中，學生感受及思考分數的方式，大致上有下列四種(Booth，1987)：

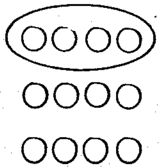
(a) 一個整體(連續量)等分後的若干部分。

例如，右圖中，斜線部分占$\frac{1}{3}$。



(b) 把一集合的元素(離散量)等分組後的若干組。

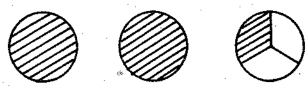
例如，下圖中，圈出的珠子是整個集合的$\frac{1}{3}$。

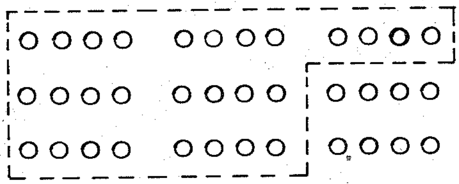


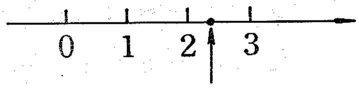
(c) 數線上的一數值。

(d) 兩數相除的結果。

根據這四種方式，學生正確地感受$\frac{7}{3}$，分別的表現（ representation ）將是：

(a′) 

(b′) 

(c′) 

(d′)　$7 \div 3 = 2 \cdots\cdots$ 餘 1 ，或以小數表示$\frac{7}{3} = 2.333\cdots$。

這四種思考$\frac{7}{3}$的過程之表現，都經過一道將$\frac{7}{3}$換成$2+\frac{1}{3}$的程序。這番換算，對於高中以上的學生或許不覺得是負担，可是對初學分數的小學高年級學生而言，則無疑增加其思考的難度，楊壬孝（民76）的數據或可說明此點。對於這些初學分數的學生，將$2+\frac{1}{3}$表成$\frac{7}{3}$的記法，一部分學生將失去$2+\frac{1}{3}$的數値感受，一部分學生則增加了思考的難度。因此，在此階段，介紹$\frac{7}{3}$來表示$2+\frac{1}{3}$是否恰當，需要編教材者費心求證了。

除了假分數外，現有的記號已沒有適合代表$2+\frac{1}{3}$的了。因此，另一種可能就是去除$2\frac{1}{3}$這記號，保留$2+\frac{1}{3}$的原始風貌。亦即，不要求初學者進一步簡化$2+\frac{1}{3}$，等到適當階段再介紹（或要求）$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$。

若在小學高年級時保留$2+\frac{1}{3}$，不再要求化簡，則$2-\frac{1}{3}$可表成$2-\frac{1}{3}=1+1-\frac{1}{3}=1+\frac{2}{3}$。帶分數記號取消之後，伴隨帶分數記號而增加的四則運算，將隨之而變，例如：

$$(3+\frac{1}{5})+(2+\frac{1}{4})=(3+2)+(\frac{1}{5}+\frac{1}{4})=5+\frac{9}{20}$$

$$(3+\frac{1}{5})-(2+\frac{1}{4})=(3-2)+(\frac{1}{5}-\frac{1}{4})=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

$$(3+\frac{1}{5})\times(2+\frac{1}{4})=3\times(2+\frac{1}{4})+\frac{1}{5}\times(2+\frac{1}{4})=6+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{20}$$

$$= 7 + \frac{4}{20} = 7 + \frac{1}{5}$$

$$(3+\frac{1}{5}) \div (2+\frac{1}{4}) = [3 \div (2+\frac{1}{4})] + [\frac{1}{5} \div (2+\frac{1}{4})] = \cdots$$

從上面的例子，可以看出加、減可以在初學階段就開始學習。乘法需要等到學生成熟度可接受分配律時才學，或者，保留乘法等到學生較成熟，對於 $2+\frac{1}{3}$ 與 $\frac{7}{3}$ 已可同樣地感受其數值大小時，才開始學。除法則一定需等到接受了 $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 時才學。

最近（1987，11 月）在英國劍橋參加的一次數學教育專題演講，話題涉及分數的教材。此地著名的數學教育家 Shuard 女士與 Bishop 先生，都提醒大家思考一個問題："爲何要教小學生分數的乘、除運算？"。我們知道小學生、國中生中絕大部分都不會了解分數乘、除運算的意義，我們只是教他們死背兩條演算法則而已。從學生的觀點看，教一些他們無法了解的教材，有違數學教育的原則。傳統介紹分數四則運算的理由，不外是整數有四則運算，所以分數也要教四則運算。這理由純粹是站在數學內容的角度來談教材，不是從學習者的角度來談。而後者才是今日數學教育界所普遍强調的精神。

如果分數的乘、除運算的教學，已被挑戰，那現存帶分數的乘、除運算，是否適合少年時期學習，就更值得挑戰了。

現在轉到大數撇節的問題。這是王九逵先生在 75 年 6 月的數學教育研究年度成果發表會中提出的。

$$\begin{array}{ccccc} 12, & 834, & 569, & 000 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{billion} & \text{million} & \text{thousand} & \end{array}$$

像上面這個大數的分節方式，在英文裡恰好配合她們的單位，自右至左在分號之左的數字其單位分別是千（thousand），百萬（million）及十億（billion）。這樣的分節，完全跟英文中的單位配合，所以閱讀方便，數值感也就較强烈。

西方數學將大數分節，旣是配合她們的數量單位，方便閱讀而決定三位一撇。我們的大數數量單位京、兆、億、萬之間都是四位一進的。引進西方數學之時，沒有將此不合國情的西方大數分節方式更改，以配合我國進位習慣，是件不可思議的"整套移植"。試看

(a) 12,834,569,000

億　　萬千

(b) 128,3456,9000

億　　萬

(a)這種分節，閱讀時，像我個人還需一位一位往上數，個、十、百、千、萬、十萬、百萬、千萬、億、十億，到百億爲止，然後才開始念得出此數。(b)的分節方式就完全不同了，經由視覺，即可閱讀此數。

設想，如果我國早期的數學持續地比西方發達，現在她們都承用我國的數學爲教材，而我們大數分節的方式，很難想像會採用(a)而不採用(b)，那麼在此情況下，除非英文另創大數單位配合我們的分節方式(b)，否則(b)這種分節法，難道有可能倖存於西方的數學中嗎？

參考資料

1. 林福來、林光賢、郭汾派（民73），國中生比與比例及文字符號的概念發展，國科會專題研究計畫年度報告，師大數學系。
2. 周武男（民76），國中生實測概念的發展，國科會專題研究計畫年度報告，高雄師範學院數學系。
3. 楊壬孝（民76），國中、小學生分數概念的發展，國科會專題研究計畫年度報告，師大數學系。
4. Booth, L.R.（1987），分數的學習困難，師大數學系專題演講彙編，科教月刊，100，7-15。
5. 郭汾派，林光賢（民76），國中生文字符號的概念發展，國科會專題研究計畫，師大數學系，政大應數系。