七 七 巧 會

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

一、前　　言

在科教月刊第85期(師大科教中心，民國74年12月) P.29～41 的「規律的尋求(四)」中，我討論了一則與整數除法有關的謎題。由於這道題目中，只有一個數字7出現，所以題名叫做「孤獨的七」。刊出後，好些朋友都向我表示喜歡這樣的題目。他們除了自己動手解這道題之外，有些中小學的數學老師將此題拿給他們的學生做(小學生應在五年級以上才行)，有些則拿給自己的小孩做。他們認爲，解這類題目並不需要什麼特殊的數學知識，常人只要肯動腦筋、有耐性，就可享受到數學解題的樂趣。因此，希望我有機會多提供一些適合的題材。

最近在Dorkie的「基礎數學的一百大題」一書(100 Great Problems of Elementary Mathematics, by Heinrich Dorkie; Dover Publication, 1965; P.11。此書德文版原名是Triumph der Mathematik，意爲數學之勝利)中，找到一題與上述「孤獨的七」很相似的題目，也是整數除法的，整題只有七個數字，都是七，所以題名是「七七巧會」，如下頁。

此題是由英國數學家E.H.Berwick提供的，1906年刊登於The School World。我自己試做了這道題目後，覺得這題雖然外表上比「孤獨的七」複雜許多(除數多了三位)，但事實上並不比較難多少：用到的解題技巧幾乎是一樣的。唯一需要多一點的，大概是耐心吧！好，願意享受自己解題樂趣的讀者，最好就此打住，不要再往下看，自己動動腦吧！

```
              □□7□□
        ┌──────────────
□□□□7□ │□□7□□□□□□□
         □□□□□□
         ──────
         □□□□□7□
         □□□□□□□
         ───────
           □7□□□□
           □7□□□□
           ──────
           □□□□□□□
           □□□□7□□
           ───────
              □□□□□□
              □□□□□□
              ──────
                   —
```

二、初步的推論

讓我們在題目的一些空格中填入一些數字（下文會說明爲什麼填上這些數字），不能填上適合數字的空格中，我們也填上一些英文或希臘文的字母來代表。同時，我們也標明了題目各行的「號碼」，以便討論時引用：

$\boxed{\varepsilon}\boxed{\lambda}7\boxed{\mu}\boxed{\nu}$ ……………第0行

$\boxed{1}\boxed{\alpha}\boxed{\beta}\boxed{\gamma}7\boxed{\delta}\,\big)\,\boxed{A}\boxed{B}7\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}\boxed{T}\boxed{Q}\boxed{W}\boxed{z}$ ……………第1行

$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{\Delta}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}$ 第2行

$\boxed{1}\boxed{F}\boxed{G}\boxed{H}\boxed{I}7\boxed{J}$ ……………………第3行

$\boxed{1}\boxed{f}\boxed{g}\boxed{h}\boxed{i}\boxed{\theta}\boxed{j}$ ……………………第4行

$\boxed{K}7\boxed{M}\boxed{N}\boxed{P}\boxed{Q}$ ……………………第5行

$\boxed{k}7\boxed{m}\boxed{n}\boxed{p}\boxed{q}$ ……………………第6行

$\boxed{1}\boxed{S}\boxed{T}\boxed{U}\boxed{\phi}\boxed{V}\boxed{W}$ ……………………第7行

$\boxed{1}\boxed{s}\boxed{t}\boxed{u}7\boxed{v}\boxed{w}$ ……………………第8行

$\boxed{X}\boxed{Y}\boxed{Z}\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z}$ ……………第9行

$\boxed{X}\boxed{Y}\boxed{Z}\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z}$ …………第10行

—

下面，我們先來解釋填到空格中的五個數字：①除數的最左一位（即十萬位）的數字爲什麼是1呢？因爲由商數百位的7與第6行（7乘上除數的積），知道，此數字若大於2，第6行就應該是七位數了（$200000\times7=1400000$）；②由此可以推論，若第3行的最左一位數字是2，則表示此行上面的除法沒除乾淨（即餘數仍然大於200000，而此數大於除數）；③第4行的最左一位數因此不能大於1，即只能爲0或1，但若爲0則不會出現空格，故爲1；④與上述的②與④同理，第7行與第8行的最左邊一位數字都應該是1。

由於7乘上除數小於1000000，而$142870\times7=1000090$，故除數應該小於142779（除數的十位數已知爲7）。又因爲$142779\times7=1285011$，故第8行從左邊算來的第2位數字s，只能爲0、1或2。但是，s上面（第7行）的數字S，是7減去7的差額，故只能爲0或9（9爲退位時候的情形）。若$S=9$而$s\le2$，則相減後不能爲0或1（1爲退位到下面去的情形），故由題目的外形可推知，$S=s=0$。

現在讓我們看第5行、第6行與第7行最左邊的二位數字。因爲 $S=0$，故知 $K=k+1$。再因 $K\leq 9$，而知 $8\geq k\geq 7$，即7乘上除數的積（即第6行的數字）不能超過879999。由於 $125770\times 7=880390$，故知除數一定小於125679。由此可知除數左邊算來第2位的數字 α，只能是0、1或2。

讓我們先刪除 $\alpha=0$ 的可能性，如下：因爲 $109979\times 9=970011$，仍然是個六位數，而由題目外形知道，第8行與第6行均爲除數乘上某個一位數的積，是七位數，故知 $\alpha=0$ 是不可能的。

三、進一步確定除數的上下限

下面，我們進一步刪除 $\alpha=1$ 的可能性。假定除數從左邊算來第二位數的 α 是1，則7乘上除數的積（等於題目中的第六行），其左邊算來第二位數是7的唯一可能是 β（除數從左算來第三位數）等於0或1；因爲只有如此，這位數乘上7才不會進位，而影響了前一位數（第6行的左邊第二位是7）。但 $\beta=0$ 是不行的，因爲 $9\times 110979=998811$ 是個六位數，與第4行、第8行爲7位數的現象矛盾。

若 $\alpha=1$，$\beta=1$，請看第8行。因爲 $8\times 111979=895832$，爲六位數，故知 $\mu=9$。但是 $9\times 111\boxed{\gamma}7\boxed{\delta}$ 的積，從後面算來第3位數字是7，試算的結果只有兩種可能性，即 $\gamma=0$ 或 $\gamma=9$，如下圖所示（若 $\gamma=0$ 時 $\delta\geq 8$；若 $\gamma=9$ 時 $\delta\leq 7$）：

□□ ………………………… $\delta\times 9$

63 ………………………… 7×9

□□ ………………………… $\gamma\times 9$

999 ………………………… 111×9

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{t}\boxed{u}7\boxed{v}\boxed{w}$ ………………………… 第8行

由於 $9\times 111079=999771$ 爲六位數，不合，故知 $\gamma\neq 0$。若 $\gamma=9$ 時，我們試算 $7\times 11197\boxed{\delta}=783$□□□，也與第6行的結果不合（第6行從左邊算來的第二位數字非爲7不可），故 $\gamma=9$ 也不行。因此，$\alpha\neq 1$。故 $\alpha=2$。

由 $12\boxed{\beta}\boxed{\gamma}7\boxed{\delta}\times 7$ 的結果，知道第6行的 $k=8$，因此第5行 $K=9$。下面看看 β 的可能性。由於下列的計算：

$$124000 \times 7 = 868000 < 87\square\square\square\square$$
$$126000 \times 7 = 882000 > 87\square\square\square\square$$

知道β只可能等於4或5。由上面的下式與第8行比較，知道$\mu > 9$。但是$124000 \times 9 = 116000$大於第8行的數，故知$\mu < 9$，即$\mu = 8$。

現在計算知道$124979 \times 8 = 999832 < 1000000$，與第8行比較知道不合，故$\beta = 4$不行。因此$\beta = 5$，再度檢查$125\boxed{\gamma}7\boxed{\delta} \times 8$的結果，與第8行比較，知道$\alpha$只在等於4或9時，從右邊算來的第三位數才能是7（即符合第8行的要求），如下圖所示（$\gamma = 4$時，$\delta \le 4$，$\alpha = 9$時，$\delta \ge 5$）。

$\square\square$ ……………………………… $\delta \times 8$
56 ……………………………… 7×8
$\square\square$ ……………………………… $\gamma \times 8$
1000 ……………………………… 125×8

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{t}\boxed{u}7\boxed{v}\boxed{w}$ ……………………………… 第8行

但是，當$\gamma = 9$時，$125970 \times 7 = 881790$，與第6行的數目不合。故$\gamma \neq 9$，即γ非等於4不可，由此可知，δ也只能爲0、1、2、3或4。

四、總結初期的結果

由試算知道，不管$\delta = 0$、1、2、3或4，我們都有$12547\boxed{\delta} \times 8 = 10037\square\square$，即第8行的$t = 0$，$u = 3$。同理，$12547\boxed{\delta} \times 7 = 878\square\square\square$，即第6行的$m = 8$，$k = 8$，$K = 9$。

由於第9行的$X \ge 1$，而其上（第8行）的$t = 0$，故第7行的$T \ge 1$。又由T上面的$m = 8$，而其上的$M \le 9$（且$S = s = 0$），知道，$T \le 1$。故知$m = 9$，$T = 1$。由此可以推得$X = T - t = 1 - 0 = 1$。因此，第9行與第10行的數字，就是除數自己，即爲$12547\boxed{\delta}$，而商的最後一位數字$V = 1$。讓我們把以上得到的各結果，放回到原來的除式中，如下頁所示。

$\boxed{\varepsilon}\boxed{\lambda}7\boxed{8}\boxed{1}$ ……………………第0行

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}7\boxed{\delta}\,\big)\,\boxed{A}\boxed{B}7\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}\boxed{J}\boxed{Q}\boxed{W}\boxed{\delta}$ ……………………第1行

$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{\Delta}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}$ ……………………第2行

(δ只能為0、1、2、3或4。)

$\boxed{1}\boxed{F}\boxed{G}\boxed{H}\boxed{I}7\boxed{J}$ ……………………第3行

$\boxed{1}\boxed{f}\boxed{g}\boxed{h}\boxed{i}\boxed{\theta}\boxed{j}$ ……………………第4行

$\boxed{9}7\boxed{9}\boxed{N}\boxed{P}\boxed{Q}$ ……………………第5行

$\boxed{8}7\boxed{8}\boxed{n}\boxed{p}\boxed{q}$ ……………………第6行

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{U}\boxed{\phi}\boxed{V}\boxed{W}$ ……………………第7行

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{3}7\boxed{v}\boxed{w}$ ……………………第8行

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{\delta}$ ……………………第9行

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{\delta}$ ……………………第10行

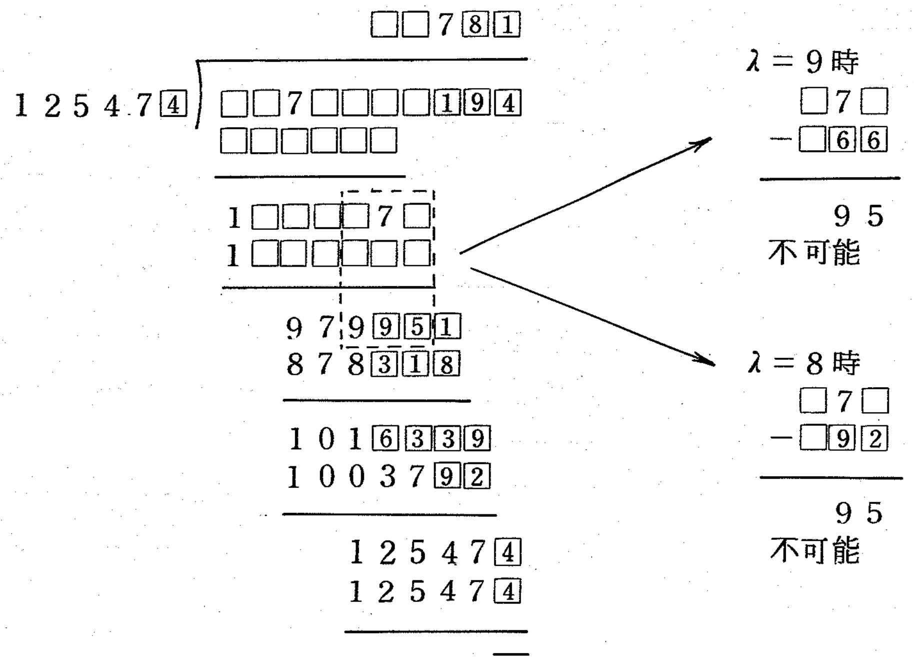
—

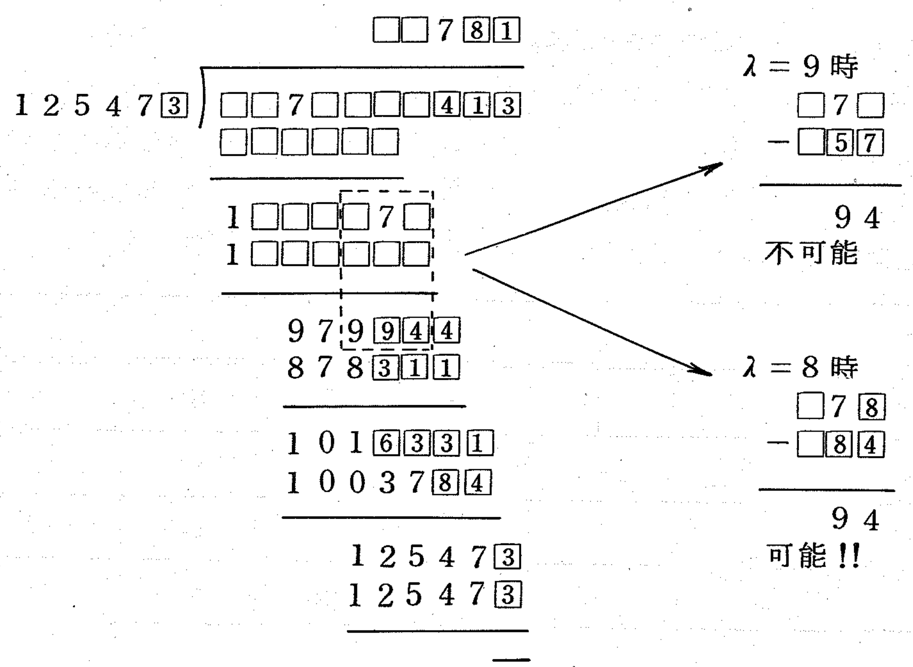
從此處起，我們已然無法再由單純的推論，來進一步確定其他未知的數字。所以，只有利用羅列的方式，來看那些情形是可行的，那些不可行。各種可能情形的羅列，當然是由商數中的最末尾數字 $\delta = 0$、1、2、3或4開始，以及推到後面時商數的第二位數字 $\lambda = 8$ 或9，所以共有10種情形。在我們正式羅列，一一作嘗試錯誤檢驗前，讓我們把一些資料計算如下，以便後面使用（由第9行與第10行往上推算）。

行數	δ	0	1	2	3	4
第8行	$\boxed{v}\boxed{w}$	60	68	76	84	92
第6行	$\boxed{n}\boxed{p}\boxed{q}$	290	297	304	311	318
第4行 $\lambda = 8$	$\boxed{\theta}\boxed{j}$	60	68	76	84	92
第4行 $\lambda = 9$	$\boxed{\theta}\boxed{j}$	30	39	48	57	66

五、羅列後嘗試錯誤

現在讓我們用嘗試錯誤的方式實驗，看那個情形是不行的，那個情形是可以的。我決定以 $\delta=4$ 開始，不行再試 $\delta=3$，……。計算當然是往上推的，不行的時候，資料自動會顯示出來，如下：





實際的嘗試錯誤，應該試其他剩下的六種情形，即$\delta = 2$、1、0時，$\lambda = 9$與8的情形。如果你試過，就知道這些都是會產生矛盾的不可能的情形（這裡不列出這些情形了）。換句話說，唯一可能的情形就是$\delta = 3$，$\lambda = 8$ 的情形。下面，我們把已得的所有資料放入下面的除式中

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & \square\boxed{8}\,7\,8\,1 \\
\cline{2-2}
125473 \big) & \square\square 7\square\square\square\boxed{8}\,4\,1\,3 \\
 & \square\square\square\square\square\square \\
\cline{2-2}
 & 1\,\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{7}\,7\,\boxed{8} \\
 & 1\,\boxed{0}\boxed{0}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{4} \\
\cline{2-2}
 & \quad 979944 \\
 & \quad 878311 \\
\cline{2-2}
 & \quad 1016331 \\
 & \quad 1003784 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 125473 \\
 & \qquad 125473 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -
\end{array}
$$

六、最後的檢驗

現在剩下商的最高一位數字未定，而此數字只可能是1、2、3、4、5、6或7（因為$8 \times 125473 > 1000000$）。把這些可能情形乘出來試算如下（乘上除數後加上第三行的頭六位數，看結果的前面第三位數是否為7：

$$\begin{array}{r} 125473\times 1=125473\\ +)\ 110177\\ \hline 23\underline{\underline{5}}650\end{array}$$

↑

不對

$$\begin{array}{r} 125473\times 2=250946\\ +)\ 110177\\ \hline 36\underline{\underline{1}}023\end{array}$$

↑

不對

$$\begin{array}{r} 125473\times 3=376419\\ +)\ 110177\\ \hline 48\underline{\underline{6}}596\end{array}$$

↑

不對

$$\begin{array}{r} 125473\times 4=501892\\ +)\ 110177\\ \hline 61\underline{\underline{2}}069\end{array}$$

↑

不對

$$\begin{array}{r} 125473\times 5=627365\\ +)\ 110177\\ \hline 73\underline{\underline{7}}542\end{array}$$

↑

對

$$\begin{array}{r} 125473\times 6=752838\\ +)\ 110177\\ \hline 86\underline{\underline{3}}015\end{array}$$

↑

不對

$$\begin{array}{r} 125473\times 7=878311\\ +)\ 110177\\ \hline 98\underline{\underline{8}}488\end{array}$$

↑

不對

由上面的計算知道，商的最高一位是 5，於是我們得到最後的一項資料，可以完成七七巧會的除式如下：

```
              58781
       ──────────────
125473 ) 7375428413
         627365
         ──────
         1101778
         1003784
         ───────
           979944
           878311
           ──────
           1016331
           1003784
           ───────
             125473
             125473
             ──────
                  —
```

七、結　　語

P.R.Halmos（美國數學家）在他所寫的一篇文章「數學之心」（The Heart of Mathematics，見The American Mathematical Monthly，87，1980，P.519～524）中說：「每一種有意義的生活的主要部分，就是去解決所碰到的問題」（The major part of every meaningful life is the solutim of problems）。因此他相信，數學題目以及解題就是數學之心。

1980 年之後的數學教育的潮流，有兩條主流是非常清楚的：一條是如何把微電腦的使用與數學的教學結合起來，另一條則是數學解題（參看美國全國數學教師協會於1980年 4 月出版的「數學教育行動綱領」——NCTM，Agenda For Action）。重視數學解題的意思在於認定，數學教育的目的不在教學生學到許多的數學知識，而是透過解數學題目的過程，學會如何善用他已學到的數學知識。因爲學到可能只是記住，連了解都達不到，更不用說活用了。

解題活動通常需要適當的題目：若題目太簡單了，學生常常只是作一些例行公式的反應；若題目太難了，則學生無從着手，他們自然做不出來。有時候老師可以提示，或要學生以小組（三人一組最佳）合作的方式解題，所謂三個臭皮匠，經過適當的腦力激盪後，常勝過一個諸葛亮。當然，老師最重要的是要有耐心，慢慢等學生自己做出題目來。