# 阿基米德開平方法的探討

楊春福

省立嘉義高級中學學生

阿基米德（西元前287年至212年）在圓之測度的著述中，求圓周率需要開平方時，他用的是下面的不等式：

$$w \pm \frac{p}{2w \pm 1} < \sqrt{w^2 \pm p} < w \pm \frac{p}{2w}$$

本文在探討若取 $w \pm \frac{p}{2w}$ 爲 $\sqrt{w^2 \pm p}$ 之估計值時的性質。

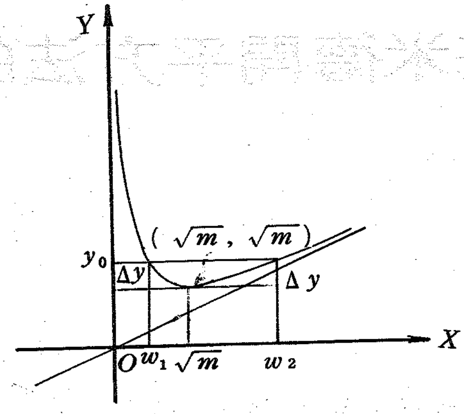
## 一、緣　起

利用阿基米德開平方法求 $\sqrt{7}$，令 $w = 2.8$，得 $w - \frac{p}{2w} = 2.65$ 又令 $w = 2.5$，得 $w + \frac{p}{2w} = 2.65$，兩種取法的估計值相等，其間是否有特殊的關係呢？

## 二、探　討

$x$ 軸表 $w$ 之值，$Y$ 軸表估計值 $w \pm \frac{p}{2w}$ 可得方程式 $y = \frac{x}{2} + \frac{m}{2x}$，$m$ 表正確値的平方。

設取 $x$ 值爲 $w_1$，$w_2$ 時，可得相同的估計值 $y_0$，則 $w_1^2 + p_1 = w_2^2 - p_2$ 且




$$w_1+\frac{p_1}{2w_1}=w_2-\frac{p_2}{2w_2}\cdots\cdots※$$

由※二式可得 $w_1w_2=m=w_1^2+p_1=w_2^2-p_2$ 且 $\dfrac{p_1}{w_1}=\dfrac{p_2}{w_2}$

$$誤差\ \Delta y=w_1+\frac{p_1}{2w_1}-\sqrt{w_1^2+p_1}=\frac{\dfrac{p_1^2}{4w_1^2}}{w_1+\dfrac{p_1}{2w_1}+\sqrt{w_1^2+p}}<\frac{p_1^2}{8w_1^3}$$

而取 $w_2$ 之估計值與正確值誤差亦 $\Delta y\leqslant\dfrac{p_1^2}{8w_1^3}=\dfrac{p_2^2}{8w_2^2}\cdot w_1=\dfrac{p_2^2}{8(w_1w_2)w_2}$

$$=\frac{p_2^2}{8w_2(w_2^2-p_2)}\ \left[利用\frac{p_1}{w_1}=\frac{p_2}{w_2},\ w_1w_2=w_2^2-p_2\right]$$

## 三、結　　論

由圖形知：當估計值相等時，$|w_1-\sqrt{m}|<|w_2-\sqrt{m}|$ 也就是說當 $|w_1-\sqrt{m}|=|w_2-\sqrt{m}|$ 時，所得的估計值，以取 $w_1$ 較接近 $\sqrt{m}$。