函數途上的幾何探險

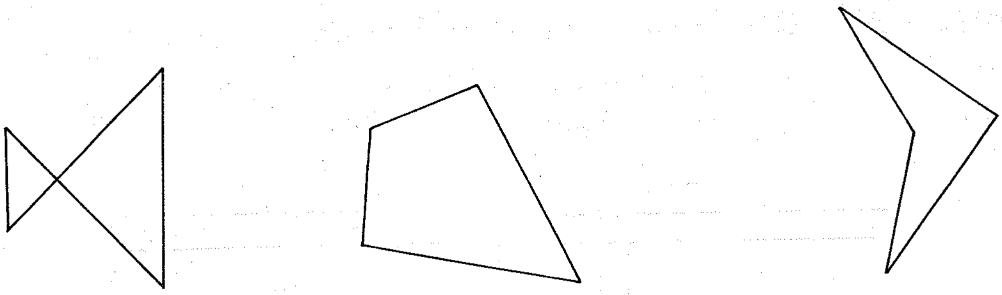
葉東進　節譯

國立科學園區實驗高中

一、前　　言

幾何探險？怎麼回事？

讓我先問你們一個問題：你認爲圖一中的(a)圖算是一個四邊形嗎？



(a)　(b)　(c)

圖一

對圖一而言，我的學生裡，有少部分認爲只有(b)圖才是四邊形，大部分的人認爲(c)圖也可以看作是四邊形，只有極少數的人同意(a)圖也是四邊形。更進一步的問：根據什麼你同意？或你不同意？就沒有學生能夠提出讓人滿意的理由了。

到底“四邊形家族”的成員是什麼個模樣？

爲解答這個問題，我想起了Lagrange 說過的那段話：——在代數與幾何各自沿著它們的途徑發展時，它們的進展不僅緩慢，並且應用也極爲有限；但是當它們相互交流

的時候，彼此從對方吸取新鮮的養份，因而能夠以快速的步伐邁向更為完美的境界。

因此，我們何不在代數的天地裡，依循著函數這條路徑去一探幾何國度裡“四邊形家族”的究竟呢？

二、本　　文

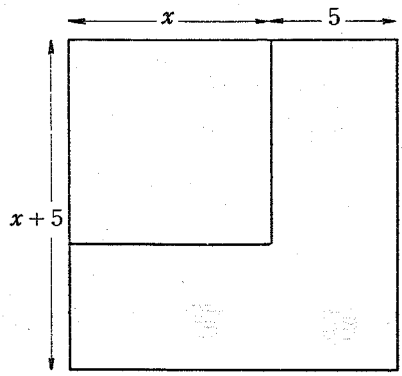
讓我們按下列階段作逐步的探險。

(I) 對一個邊長 x 公分的已知正方形，伸長其相鄰的兩邊各 5 公分而得到一個更大的正方形（圖二）。這兩個正方形的面積的差表為 x 的函數是

$$f(x)=(x+5)^2-x^2$$
$$=10x+25$$

它的一個合理的定義域應該是

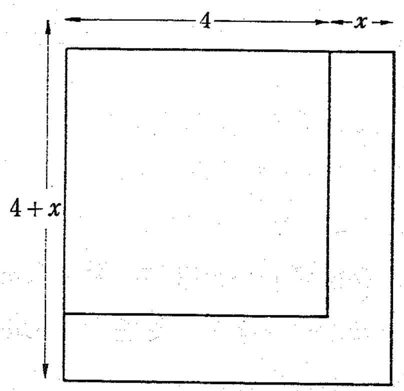
$$\{\,x\in\mathbf{R}\mid x>0\,\}$$



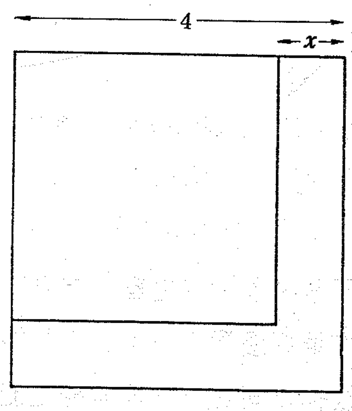
圖二

(II) 如果我們把已知的正方形的邊長取定為一個常數（比如 4 公分），而改變的長度是一個變量 x 公分（圖三），那麼兩個正方形的面積的差表為 x 的函數是

$$f(x)=(4+x)^2-4^2$$
$$=x^2+8x$$



圖三



圖四

這個函數的定義域又是什麼呢？顯然它應該包含 0 以及所有的正數，至於 x 是負數可不可以呢？換句話說，我們把原有的已知正方形的邊長往裡擠推縮減（圖四）直到所得的

正方形的面積為零止。因此給函數 $f(x)=x^2+8x$ 取一個合理的定義域應該是

$$\{x\in \mathbf{R} \mid x>-4\}$$

(III) 現在我們分別按照下面三種情況對已知的正方形作改變：

① 僅對其中一條對角線作伸張或縮減。

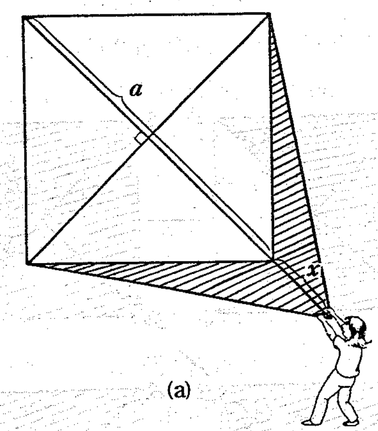
② 對兩條對角線作相同的伸張或縮減。

③ 對兩條對角線分別作不同的伸張或縮減。

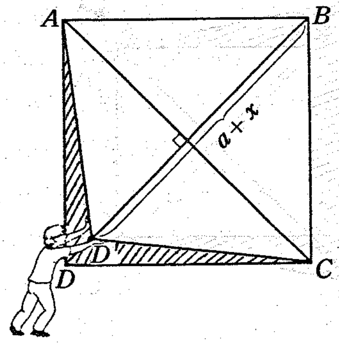
對於情況①（圖五），相應的函數是

$$f(x)=\frac{a(a+x)}{2}-\frac{a^2}{2}=\frac{ax}{2}$$

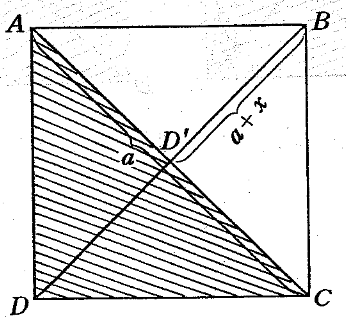
它的定義域是什麼呢？當然，$x\geqslant 0$ 是不成問題的（圖五(a)）；就是 $-\frac{a}{2}<x<0$（圖五(b)）這種情形也是可以的，但是 $x=-\frac{a}{2}$（圖五(c)）時，正方形縮減為一個三角



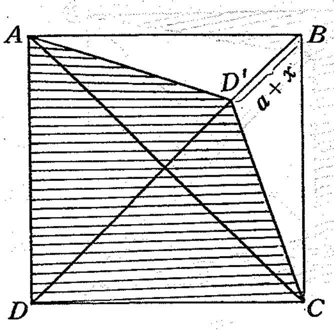
(a)



(b)



(c)



(d)

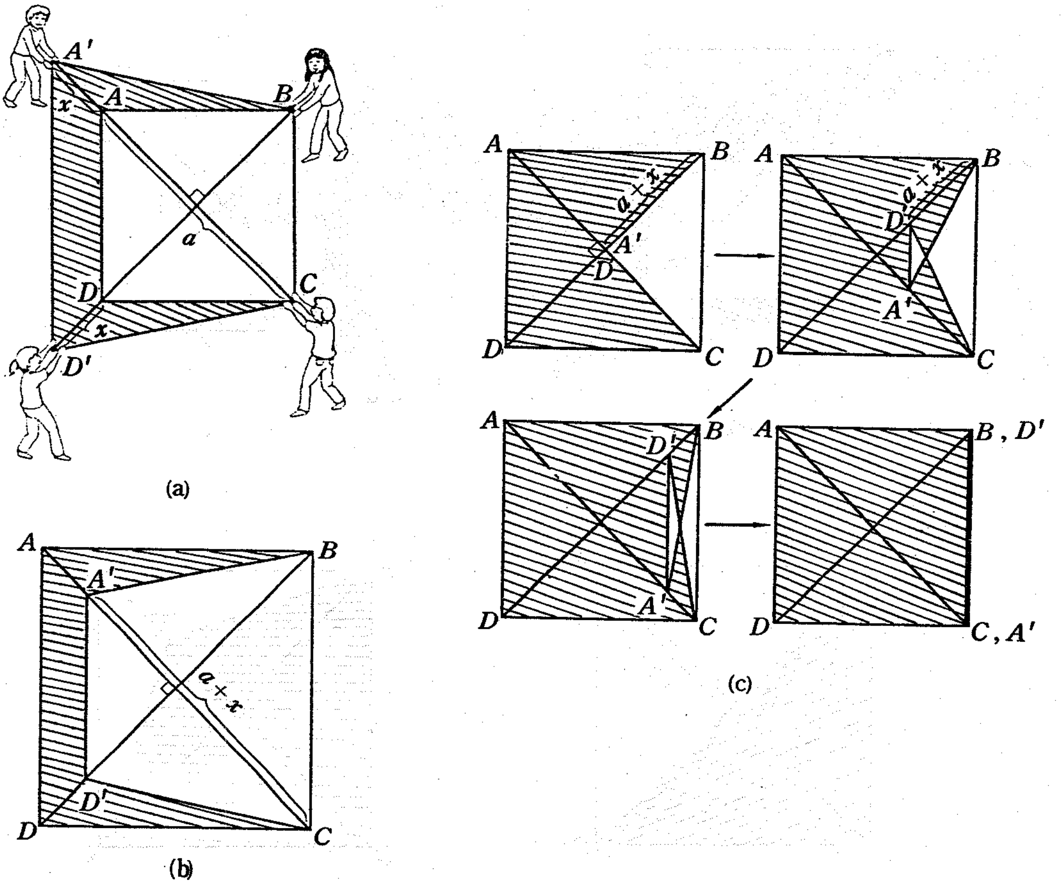
圖五

形，如果你肯把三角形看作是一個極端化了的四邊形又有何不可？現在讓我們繼續推進，作更為深入的探險來看看在 $-a<x<-\frac{a}{2}$ 的情形下，圖形改變的結果，此時，原來已知的正方形 $ABCD$ 已被擠推縮減到像是圖五(d)中那模樣如同三角翼飛機的“四邊形” $ABCD'$ 了。

你已經看到，如果我們依循著函數 $f(x)=\frac{ax}{2}$，其中 $x>-a$ 這條路徑逐步而深入的觀察“四邊形的家族”，那麼像圖一中的(c)圖作為這個家族的一員就是再自然不過的事實了。

現在讓我們從情況②再作一次幾何探險。此時相應的函數是

$$f(x)=\frac{(a+x)^2}{2}-\frac{a^2}{2}=\frac{2ax+x^2}{2}$$



圖六

仍然把注意力放在找 $f(x)$的定義域這件事上。

毫無疑問，$x \geqslant 0$（圖六(a)）或是 $-\frac{a}{2} < x < 0$（圖六(b)）都在定義域內。當 $x=-\frac{a}{2}$時，原來已知的正方形 $ABCD$ 被擠推縮減成爲 $\Delta BCD'$（圖六(c)之左上圖），而我們也願意接受它（指 $\Delta BCD'$）作爲"四邊形家族"的一員。現在，讓我們繼續無畏地沿著函數 $f(x)=\frac{2ax+x^2}{2}$，$x<-\frac{a}{2}$ 往前探究，看看沿途究竟會冒出什麼樣的"四邊形家族"成員來？圖六中的(c)圖顯示了 x 從 $-\frac{a}{2}$ 逼近到 $x=-a$ 的探險進程，而我們也終於在"四邊形家族"中看到了像是圖一(a)圖中的那種傢伙。

因此，我們不得不承認，沿著函數 $f(x)=\frac{2ax+x^2}{2}$ 的路徑，取定的定義域愈廣，也就是說我們探險的範圍愈深入，那麼相對的，我們就看到愈多不同款的四邊形。現在，還有那一個偉大的探險家願意憑著他過人的膽識與高超的智慧越過 $x=-a$ 這道邊界而深入 $x<-a$ 這樣的黑色內陸去一窺數學宇宙的神秘呢？雖然迄至目前爲止，我還沒有帶領你們完成情況③的探險，但是，親愛的朋友，我極願提醒你們：自個兒探險的那股刺激以及嚐到發現的那種興味可會教你終生難忘咧。

本文改寫自下文：

"Geometrical Adventures in Functionland" by RINA HERSHKOWITZ and ABRAHAM ARCAVI, MAY 1987, MATH TEACHER.