相對論淺說

吳大猷
中央研究院

要了解相對論（今天祇是指狹義相對論言），當然需要若干物理學的基礎知識，不是一兩個小時所能講得清楚的，但我想試作一個有條理的介紹，說明相對論的由來和它的意義。

一、物理學：概念、定律、不變性

A、物理學

在物理學中，我們研探的對象是物理現象。所謂物理現象，乃包括許多自然現象如行星的運行，光的傳播，一杯熱水的冷却，原子的輻射。由現象的觀察，我們形成若干概念，如物體的大小、重量，時間的長短、光、暗、冷熱；更由一些概念，導出其它的概念，如由時間和長度，可引致速率的概念；由速度的改變，引致加速度的概念等。由觀察進而作度量，實驗；由許多實驗，度量的結果，經“內插”（ interpolation ），“外推”（ extrapolation ）及“概括”（ generalization ）等步驟，可得一些各概念間的經驗性的關係。這些關係，稱爲定律。定律的例子，如行星運行的刻卜勒三定律，氣體的PV＝RT定律，電磁現象的安培定律，法拉第定律等。物理學家的次一步乃將定律表以數學形式。由這些定律，按演繹法導出其它的各概念間的新關係，與自然現象或實驗度量的結果作驗證，如二者不符，則顯示該定律的缺乏普遍性，祇有在有限領域內或情形下有效。

設由多種的現象的觀察度量，已獲得許多個經驗性定律。物理學家的次一目標，乃進一步的求各定律間的關係，或說是企圖以較少數的概念關係，來敍述較多的現象。這步的工作，稱爲“理論的建立”。所謂“理論”，乃係物理學家（由現象，定律的啓示）作某些假設（ hypothesis ）關於某概念間的關係（有時亦引入新的概念）；由這些假

設，經演繹導引出其它的結果（即其它的概念關係），和已知的經驗結果驗證，（在重要情形下，和新設計的實驗驗證）。這樣的驗證，將繼續與新的發現和更多的新設計的實驗進行，如在任何階段，理論導致的結論與實驗結果不符，則必須棄去或修改理論（假設）作新理論，重複上述的驗證工作。

簡單的說，物理學是不斷的擴展我們觀察的現象的領域，不斷的發現定律，不斷的企圖尋求更“簡單的”，更“美麗的”，更“普遍性的”理論，來涵蓋更多的定律。物理學的發展，是沒有止境的。

B、時、空的概念

人類最原始的概念，是物體的大小（長度）和時間的長短。在物理學中，最基本的概念亦是“時”和“空”。人們依日常的經驗，都很自然的有“時”和“空”的觀念，似不再需要定義解釋的；人們直覺的以爲時和空是兩個各自獨立不相干的概念。按牛頓的經典巨著中講力學定律的註釋說，“時”是不斷的，與任何事物無關的，均勻的流的。這個“時”既與外界無關，自然是和長度（“空”）無關，和觀察者亦無關的。這樣的“時”，是絕對的，萬有的。

其實牛頓的敍述，不甚好懂。因爲“時”既是與任何事物無關的流去，則“均勻”是對何而說呢？但牛頓的“時”，經過二百多年，似乎未有哲學家或物理學家提出過嚴重的疑議；可能是亦未有人想出更好的“時”的概念，一直到愛因斯坦（1905 年）指出在物理學中，“絕對的時”是沒有意義的。

“空”（space）是指通常的三維空間言，在三維空間作物體大小，或兩點間的距離的度量，我們由於平常的經驗，幾乎直覺的以爲這空間的幾何性質，是遵守歐几利德幾何的。雖則在十九世紀初，數學家即創立了“非歐氏幾何”，但這祇可視爲數學中的抽象幾何，和物理學處理自然現象是無關的。歐氏幾何是二千幾年來所熟知的；它在物理中的地位，是無人質疑的——一直到愛因斯坦（1914 年）創立廣義相對論中的“萬有引力”新理論。

在目前這“引言”中，我們祇要指出雖然相對論的原理本身的敍述很簡單（祇需幾句話），但他是牽涉及基本概念如“時”，“空”等的深入檢討修改。以狹義相對論言，相對論原理不是愛因斯坦首創的；他的重大貢獻，是在這些基本概念的意義的檢討修改。

C、定律與不變性

定律是“觀察者”對“被觀察者”（現象）所作的觀察度量結果的描述，故在物理學中，一定律的最低要求，是它的普遍性，換言之，定律應對“觀察者”有若干獨立性。如對同一個現象，兩個觀察者所得的定律不同，則他們的“定律”都沒有“普遍性”。這樣視觀察者而異的“定律”，是沒有大意義，不配稱爲定律的。

這點極爲重要，宜申述一下。譬如我們用一個直角坐標OXYZ來描述一個物理現象（結果是一些“定律”）。如我們將這坐標系作下述的改變：

(1) 將OXYZ坐標系（三軸作平行的）移動，使原點O移至另一點O′；

(2) 將OXYZ坐標系以O原點作中心；轉至另一方向。“顯然的”將坐標系作這些改變，不應會影響所得的“定律”的。

(3) 又如我們改變觀察一個現象（例如行星的運動，或一個單擺的運動）的時刻，亦不應影響所得的“定律”的。

由這些例子，我們引入一個極重要的觀念——“不變性”（invariance），即是一個定律，在某些觀察情形的改變下，有不變性。上述的三個情形，是

(1) 在坐標作平移下：

$$x' = x + a,\quad y' = y + b,\quad z' = z + c,$$

(2) 在坐標系作轉動下：

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \qquad \sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

(3) 在時 t 作平移下

$$t \to t + d,\qquad d = \text{常數},$$

物理定律有不變性。

到此，我們要問：如觀察者和被觀察者（即被觀察的物理現象）間有相對的運動，是否影響所得之定律？我們可以用另一個形式，問同一問題：由兩個有相對運動的觀察者觀察同一物理現象所得的“定律”，是否相同（或；是否有相同的數學形式）？

這個問題的答案，殊不是“顯然的”。回答這個問題，正是相對論所研討的主題；如相對運動是等速的，則這是狹義相對論的主題。

二、咖里利奧變換；不變性；相對原理

為簡便之故，我們取一維空間的運動。在坐標OX，一物體之運動方程式為

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x)$$

茲有另一觀察者 S'，（其坐標系 $O'X'$）以等速 v 沿 OX 方向運動。設在 $t=0$ 時，O' 與O吻合，故如一“事項”對兩觀察者的“空—時”坐標為 (x, t)，(x', t')，則其關係為下“變換式”

$$x=x'+vt',$$

$$t=t'$$

按牛頓的觀點，兩觀察者的時 t，t' 是同一“絕對時”。由此二式，即可得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}+v\frac{dt'}{dt}=\frac{dx'}{dt'}+v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dt'^2}$$

故對觀察者 S'，運動方式

$$\frac{d^2x'}{dt'^2}=F(x')$$

之形式，與對坐標 OX 相同也。上面變換式，稱為Galilean咖里利奧變換；我們得見第二運動定律（即運動方程式）在咖里利奧變換下有不變性。

上述結果，可表以下式：

『力學定律，在所有以等速作相對運動的坐標系中皆相同。』這結果稱為『咖里利奧相對原理』。

最淺明的例子，是取一以等速運行的車子，車內懸一單擺。一個在車內的觀察者，其所得的單擺定律為

$$T=2\pi\sqrt{L/g}$$

T為週期，L為擺長，g為地心吸力加速常數。此式與車行速率 v 無關。另一在地上（不隨車行）的觀察者，亦得同此的定律 $T=2\pi\sqrt{L/g}$。

此結果亦可表作下式：如將車窗均關閉不能外視，則車內的人不能由單擺的觀察，鑑別其所在之車是靜止的或是在作任何等速的運行中。上速的『咖里利奧相對原理』，亦可表以下式：一個封閉的系統中的觀察者，不能藉純在系統中的任何力學性實驗，鑑

別該系統之是否靜止，或在作任何等速運動中。

由上述，得見：在力學上，所謂“靜止”和“作等速運動”，是沒有分別的。所有以等速作相對運動的系統，皆是“相當”的。

一個牛頓運動定律適用的系統，稱爲“慣性系統”。所有以等速對一個慣性系統作相對運動的系統，皆係慣性系統。一個旋轉（如走馬燈）的系統，則非慣性系統。

我們已見牛頓力學定律，在伽里利奧變換下有不變性了（亦卽謂遵守伽里利奧相對性原理），我們自然的卽要問：力學以外的其它物理定律，是否亦遵守這相對性原理？這問題，亦可以特例表出：在伽里利奧坐標變換下，電磁定律是否不變其形式？因所有的電磁場定律（如庫倫定律，安培定律，法拉第定律等）都綜合於馬克斯威爾電磁場方程式，故上述的問題，亦可以下式表示出：馬克斯威爾電磁場方程式，在伽里利奧變換（$x = x' + vt'$，$t = t'$）下，是否有不變性？

後一問題的答覆，不難獲得。在三維空間作伽里利奧變換：

$$x = x' + vt，y = y'，z = z'，v = 常數，$$

同時E，H，D，B等電、磁場向量，亦作相當的變換成E'，H'，D'，B'，則很易見馬克斯威爾方程式沒有不變性。由此便可得一結論，在另一以等速作相對（於電磁現象）運動的系統，其所得的電磁定律將有一不同的形式。

按此結論，我們將可能藉純在一個封閉的系統（卽不能與外通訊息的系統）內的電磁性實驗，來鑑別該系統之是否“靜止”或“在作等速運行”。

但這個問題中的“靜止”和“作等速運行”，是相對甚麼而言呢？這並不是一個淺易的問題，但卻是須先確切答覆的問題。

在古典電磁學中，電場，磁場和電磁波，都假想是存在於一個遍漫空間滲透物體的“介質”，稱爲“以太”（Ether）的。故上文的“靜止”，和“作等速運動”，是對這假想的“以太”而言。

我們由馬克斯威爾方程式，看出它對伽里利奧變換無不變性。既如是，則我們應該可以在一個運動中的坐標系統，作電磁實驗來鑑別該坐標系的“運動”了。

A. A. Michelson （美國實驗物理學家）於1881 年卽作了一個這樣的實驗；後在1887 年和Morley氏更準確的重作這個實驗。實驗的原理約略如下。

我們知道地球是繞日運行（速率v是每秒 30 公里）的。我們在地球（卽我們的實驗室）上作一個光的實驗（光係電磁波），看看是否能鑑定我們的系統（卽地球），對“以太”（傳播光的介體）的運動，（換言之，看看電磁現象的描述（卽定律），是否

和坐標系的“運動”有關)。圖中之“光干涉儀” OM_2 沿地球運行方向,OM_1與之垂直。

S 爲光源,$OM_1 = OM_2 = L$。光線 A(由 O 至 M_1' 反射至 O')

所需的時間 $= t_1 = \dfrac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

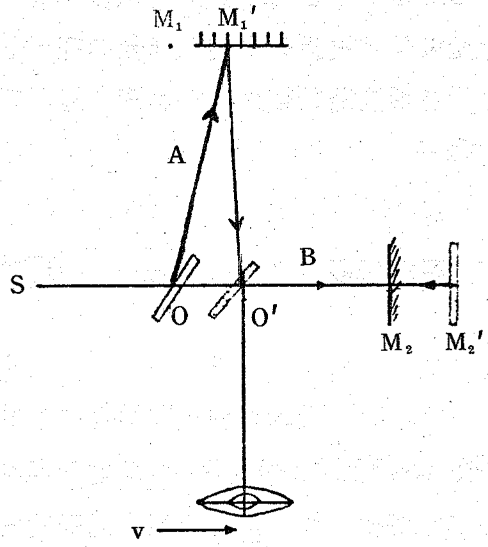
光線 B(由 O 至 M_2' 反射至 O')

所需的時間 $= t_2$

$$= \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v}$$

故

$$t_1 - t_2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{L}{c}$$



如將整個干涉儀在水平面旋轉 $\pi / 2$,則 OM_1 與 v 平行而 OM_2 與 v 垂直,而 A,B 兩光線束的時差,將爲上值的反值,故兩光束的相角差,經這旋轉的數變爲

$$\theta = 2(t_1 - t_2)\nu, \quad \nu = \text{光的頻率}$$

在實驗中,$L = 100$ 公分,波長 $\lambda = 6000\,\text{Å}$,$\nu = \frac{1}{2} \times 10^{15}$ / 秒　故 $\theta \approx 1/3$ 相當於此相角改變所產生的干涉條紋的改變,是應可觀察得到的。但實驗的結果是負性的,即旋轉干涉儀 90 度,干涉條紋並無改變。

這負性的結果,可有下舉之解釋:

(1) 我們假設光的介質以太,是隨著地球的運行而被帶著運行的。如是則光是不受地球的運行的影響的。

(2) Fitz-Gerald(愛爾蘭物理學家)(在致物理學家 Oliver Lodge 函中)提出一個假設,謂凡物體皆在其運動的方向,縮短 $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍。按此假設,則上述之 t_2 即與 t_1 相等了。

上述 Michelson-Morley 氏實驗外,1902-3 年 Trouton 和 Noble 二人作了用電磁(而不用光)的實驗,企圖測視地球運行(對以太)的影響,亦獲負性的結果,與 Michelson 的同。

但此外另有其他的實驗結果,是不能用上述(1)的假定解釋的,(如 Fizeau(1851

年），Bradley（1727 年）（恆星光的偏差）等），而似顯示以太有時被物體帶著走，有時光波又會被折射介體“部分的拖帶著”。

總括各種實驗的結果，顯示對“電磁定律和系統的運動的關係”問題，沒有一般可適用的假設。

三、羅侖茲（Lorentz）變換

上文已述馬克斯威爾電磁場方程式對咖里利奧變換，沒有“不變性”；又已述Michelson-Morley二氏的實驗，顯示坐標系的運動（地球的運行）不影響電磁實驗的結果。故早在 1895 至 1899 年，荷蘭物理學家 H.A. Lorentz 研討下述的純數學性的問題：在何坐標變換（較咖里利奧變換為廣義的）下，馬克斯威爾方程式有不變性？

羅侖茲先獲得一個準確至 $(v/c)^2$ 項的變換式，v 乃兩個坐標系的相對等速度。到 1903 年，他獲得下變換式

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x'+vt'),\qquad ct=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta x'+ct')$$

$$y=y',\quad z=z',\quad \beta=v/c$$

在此變換下，馬克斯威爾方程式有不變性。此變換稱為羅侖茲變換。

如何的證明馬克斯威爾方程式在羅侖茲變換下有不變性，不是淺易的問題。我們需要一些向量張量分析。簡略的說，要點如下：

(1)　以三維空間的坐標 x，y，z 和時 t，定義一個四維空間，一個點的坐標 x_1，x_2，x_3，x_4 為

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=ict$$

c 乃光速（在眞空之值）。

(2)　羅侖茲變換可視為此四維空間的坐標變換

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{bmatrix}1&0&0&-i\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\i\beta&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1'\\ x_2'\\ x_3'\\ x_4'\end{bmatrix}$$

(3)　4—向量，張量

此變換如表以下式

$$x_u = \sum_{\nu=1}^{4} a_{u\nu} x_\nu' , \quad u, \nu = 1, 2, 3, 4 ,$$

則得見

$$\sum_{\lambda=1}^{4} a_{u\lambda} a_{\nu\lambda} = \delta_{u\nu}$$

$$\sum_{u=1}^{4} a_{u\lambda} a_{u\nu} = \delta_{\lambda\nu}$$

這二式正與三維空間直角坐標變換條件相似；事實上羅侖茲變換符合下關係

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 ,$$

這和三維空間直角坐標變換的 $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ 相似。

（x_1，x_2，x_3，x_4）構成四維空間的一向量（稱 4 一向量）。我們以 $x_u = \sum a_{u\nu} x_\nu'$ 變換來定義其它的 4 一向量。

由兩個 4 一向量（x_1，x_2，x_3，x_4），（y_1，y_2，y_3，y_4）可求它們的乘積的變換：

$$x_u y_\nu = \left(\sum_{\alpha=1}^{4} a_{u\alpha} x'_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^{4} a_{\nu\beta} y'_\beta \right)$$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta a_{u\alpha} a_{\nu\beta} \left(x_\alpha' y'_\beta \right)$$

如 $A_{u\nu}$（十六個量）的變換爲

$$A_{u\nu} = \sum_\alpha \sum_\beta a_{u\alpha} a_{\nu\beta} A'_{\alpha\beta}$$

則 $A_{u\nu}$ 稱爲一個張量。注意！張量性係由變換式定義來的。

如一個物理定律，可表作向量或張量式，如

$$A_u = B_u , \qquad u = 1, 2, 3, 4$$

$$T_{u\nu} = S_{u\nu} , \qquad u, \nu = 1, 2, 3, 4$$

此表示：A與B之相等（或T與S兩張量之相等），將在任何羅侖茲變換下有不變性，因上述方程式的兩方，皆作同一的變換也。此點極重要，但極淺顯。在三維空間，如有兩個向量相等，則此相等性，與坐標系的任何轉動無關。在相對論中，我們祇須將三維空間推廣至四維空間而已。（但我們務須注意 $x_1 = x$，$x_2 = y$，$x_3 = z$，$x_4 = ict$，此第四維坐標乃虛數！）

嚴格言之，在物理學中，向量（張量）的眞實重要性，要到考慮坐標的轉動變換時，才出現的！如一個物理定律可表成一個向量（或張量）方程式，而向量（及張量）乃

由坐標的變換定義的，則此向量（或張量）形式，即保證了該物理定律對該變換的“不變性”。如在三維空間，垂直變換代表坐標系的轉動，則保證該物理定律對坐標轉動有不變性。如在四維空間，羅侖茲變換代表在等速相對運動的坐標系的變換，則該定律在各以等速作相對運動的坐標系中均有相同形式。

如我們要求一物理定律遵守相對性原理，則我們祇需證明該物理定律可寫作一4一向量或張量的方程式。

至此我們可見在淺的物理學階段中引入向量概念，是如何的“割雞用牛刀”了！

(4) 我們需要將E，H，D，B，電荷密度 ρ，電流密度 j 等，定義成適當的4一向量，例如將向量勢A（A_x，A_y，A_z） 和純量勢 ϕ 定義爲一4一向量。

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\phi/c)$$

爲何 A_x，A_y，A_z，ϕ 可以如是的構成一個4一向量，是有道理的。又如何的將電，磁場E，H，D，B構成4一向量，都不是在這裏可講得清楚的。讀者可以參閱著者的『理論物理第四册，相對論』，聯經出版事業公司。

定義了適當的向量，張量後，即很容易的見到馬克斯威爾方程式，連同所謂『羅侖茲力』的式子，連續方程式，羅侖茲條件等，都可寫成張量方程式。有如前述，這即證明全部的電磁學定律一包括電動力學一在羅侖茲變換下有不變性。

在本節首的羅侖茲變換式中，有 t' 出現。羅侖茲所得的變換，乃係一個數學問題的解；求由 x，y，z，t 到 x'，y'，z'，t' 的變換，使馬克斯威爾方程式有不變性。t'係一“形式的”坐標，它的物理意義是毫不清楚的。羅侖茲變換，確是有包涵了相對論的內容的數學形式，但並未給予我們物理的意義和相對論的了解。

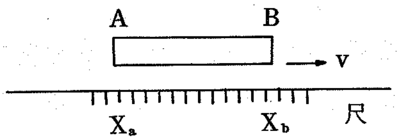
愛因斯坦（Albert Einstein, 1879-1956）的貢獻，是由時、空概念的意義的分析，完成了“相對論”。

四、愛因斯坦對物理學中“時”，“空”概念的分析

在第一節(B)中，我們曾指出牛頓的物理學（力學）中的“時”和“空”，是兩個各自獨立的概念。按此，如說在兩個不同地點A，B“同時”發生兩事項，是有意義的，因爲時 t 是“絕對的”，“萬有的”。又如說一物體的長度是L，意思是說它是一把標準“剛尺”的L個單位，它是和“時”無關的。

但我們試看下一問題：如一物體（例如一輛車）在運動中，如何量它在運動中的長

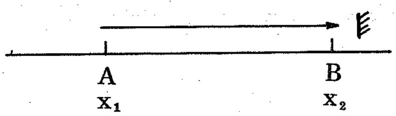
度？顯然的答案，是在物體旁置一標準尺，記錄下物體兩端A，B在尺上的位置X_a，X_b，如圖



顯然的，我們不能先看一端，再來看另一端，因爲物體是在動的；我們說：必須“同時”記錄兩端！

但問題是：在兩不同地點，如何的定義“同時”呢？所以我們務須將不同地點的“時”如何測定，確切的定義下來，換言之，將兩不同地點的“時鐘”校對好。

時鐘的校對，可採下步驟：



設A，B（相對靜止的）的位置爲X_1，X_2，故距離爲X_2-X_1，在A，B各有一鐘。當A的鐘在t_{a1}時，向B放射一光訊（或電磁波）；訊號達B時，設B的鐘所示時爲t_b。訊號抵B，即爲一鏡反射回A。設此反射的訊號抵A時，A鐘所示的時爲t_{a2}。如使

$$t_b = 1/2\,(t_{a2} + t_{a1}),$$

我們說A，B兩處的鐘是“校對”了（synchronized）。

上述的“校對”法，是基於一極重要的事實，即任何訊息的傳遞，皆不能有無限大的速率；例如，我們所知的最大的傳播速率是光速，c約爲3×10^8公尺／秒。爲方便計，我們即以光（亦即電磁波）訊號爲“校對”各地時鐘的工具。

上述的“校對”法，隱含了一個基本假設，即光之由A到B，及由B反回A，作兩相反方向的傳播的速率相同。這是一個很“自然的”假設，因爲我們沒有理由以爲它們不同；我們要記著，這仍是一個假設。

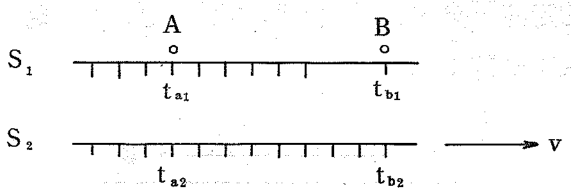
我們可以想像，一個觀察者（一個“慣性坐標系”，見第二節）在他的坐標系的各地，都置有如上述的校對了的鐘。兩地A，B發生的兩事項，在該地的時t_a，t_b，乃是該兩地的鐘所示的時。如$t_a=t_b$，則在A，B兩地發生的兩事項，謂爲“同時”的。

故本節第一圖中所謂“同時”量物體兩端A，B的位置，乃係謂在x_1，x_2兩地的

時鐘的時 t_a ，t_b 相等。這樣乃完全確定了量一個運動中的物體的長度的意義了。

我們現在忽然的發現，量“長度”和“時”有關；換言之，時和空，不再是彼此獨立無關的了。

愛因斯坦指出，在物理學裡，每一個概念，都應有它的確切度量上的意義。這和玄學上若干觀念不同。例如時間 t ，每一個觀察者（慣性系）在各地都有依照他觀點所校對的鐘；對他來說，如兩地A，B的鐘所記錄當地的事項的時 t_a ，t_b 相同，則兩事項是“同時”的。如有兩個觀察者以等速作相對運動，則他們各有對他們自己校對了的鐘。兩件事項在兩地發生；如對慣性系 S_1 說是“同時”，則對慣性系 S_2 便不是“同時”了。（這點可由下圖見之，兩地A，B兩事項，S_1 在A，B點的時爲 t_{a1} ，t_{b1} 。如



$t_{a1} = t_{b1}$ ，則從 S_1 觀點，A，B爲“同時”的。S_2 爲另一慣性系，在 S_2 中A，B之時爲 t_{a2} ，t_{b2} 。但 S_2 的鐘乃從 S_2 的觀點校對的。故 t_{a2} 與 t_{b2} 不同。）

按牛頓的“絕對時”觀念，“同時”觀念，是有絕對性意義的；但按上述分析，則“同時”觀念是沒有絕對性意義的。

如我們再回到本節首段的量一物體的長度的問題，即可見下述的情形：因記錄物體兩端A，B（在尺上）的位置是在兩地的鐘同時 $t_a = t_b$ 進行的，又因爲每一觀察者（慣性系）都有從他觀點校對的各地的鐘，又因爲在兩地的事項的“同時”與否在不同的慣性系而不同，故同一物體的長度，由不同的慣性系量得的結果亦不同！

五、愛因斯坦的相對性原理（1905年）

所謂“相對性原理”，第二節已述力學定律，在所有以等速作相對運動的系統（慣性系）皆有相同形式。

將這個原理，由力學推廣至電磁學定律，是很“自然”的事，在愛因斯坦（1905年）之前，已有其他物理學家（如Poincare　）提出過的，故“相對論”不是首由愛因斯坦提出的。愛因斯坦的大貢獻，是重新深入的分析“長度”，“時間”的概念（見上

節），由這些"時"、"空"的新定義，和相對性原理，他很容易的導出羅倫茲變換公式，和給予式中的兩個"時" t，t' 的物理意義，使羅倫茲變換不再是一個形式性的數學變換，而是相對論的數學表示式。羅倫茲變換是羅氏發現的，故仍以羅倫茲名，但相對論則以愛因斯坦名之，是有道理的。

愛因斯坦表述"相對性原理"如下：

1. 物理定律，在所有以等速度作相對運動之系統，皆有相同的形式。

2. 在所有以等速度作相對運動之坐標系中，光之速度皆爲同一值 c。

所謂"物理定律"，乃不是第二節之咖里利奧相對論之限於力學定律，而係包括所有的物理定律（如電磁定律即一例）。最簡單的電磁現象，爲光之輻射，其定律爲

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

此式描述光以半徑爲 ct 之球面向各方輻射。如另一坐標系以等速度 v 與上坐標系作相對運行，按原理1，在此坐標系的描述乃

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (c't')^2$$

c' 可能係另一恆數。惟按原理2，則

$$c' = c$$

故原理2是不能視爲包涵在原理1內的。

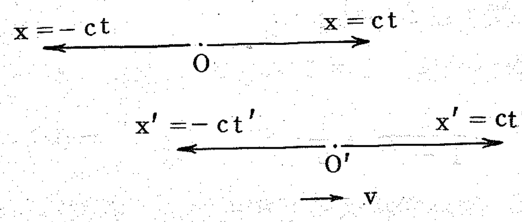
我們尚憶在第四節"鐘之校對"法隱含了一假設，即光的速率（在眞空中）在各方向皆相同。現乃見該假設是原理2的一特別情形，是一個"基本性"的假設。

(a) 羅倫茲變換——愛因斯坦的理論

茲取二慣性系 S 及 S'，二者沿 OX，$O'X'$ 線，以等速 v 作相對運動。當 O，O' 重疊時，取其爲兩個系的時的起點，即 $t = t' = 0$。在此時由共同之原點 O，O' 發射出光。在兩個系中，光的傳播方程式如下：

$$\begin{aligned} &S\ 系：x - ct = 0, \qquad x + ct = 0, \\ &S'\ 系：x' - ct' = 0, \qquad x' + ct' = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

t，t' 乃在 S，S' 中各自校對好的（在各處的）鐘的時。



我們假設：對同一現象，S，S′所作的描述，有一與一的對應關係。這要求的最簡單表示，乃二描述間有線性的關係，即

$$x' - ct' = \lambda (x - ct),$$

$$x' + ct' = \mu (x + ct), \quad \lambda, \mu = 常數。$$

如使

$$a = 1/2 (\lambda + \mu), \qquad b = 1/2 (\lambda - \mu)$$

則得

$$\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= - bx + act \end{aligned} \tag{2}$$

或

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 - (b / a)^2} \left[\frac{1}{a} x' + \frac{b}{a^2} ct' \right], \\ ct &= \frac{1}{1 - (b / a)^2} \left[\frac{b}{a^2} x' + \frac{1}{a} ct' \right]。 \end{aligned} \tag{3}$$

O′ 點之 $x' = 0$，故

$$x = \frac{b}{a} ct$$

由S看，O′之速度爲 v，故

$$\begin{aligned} x &= vt \\ \therefore \frac{b}{a} &= \frac{v}{c} (\geq \beta) \end{aligned} \tag{4}$$

茲取 S′ 中靜止的長度 $\triangle x'$。由式(2)，可得

$$\triangle x' = a \triangle x - bc \triangle t$$

$\triangle x$ 乃在S量得的長度，但量此長度 $\triangle x$，必須“同時”的量其兩端，即 $\triangle t = 0$。如 $\triangle x'$ 乃 S′ 的長度單位（$\triangle x' = 1$），則

$$\triangle x = \frac{1}{a} \cdot 1 \tag{5}$$

此乃謂 S′ 中一單位長度，在S中爲 $1 / a$。

同理，在S中一單位長度 $\triangle x = 1$，在 S′ 的長度 $\triangle x'$ 乃由式(3)，(4)，

$$1 = \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot \frac{1}{a} \triangle x' \quad (\triangle t' = 0) \tag{6}$$

惟按相對原理，S與S′ 的相對關係係互相對稱的，亦即 $\triangle x = \triangle x'$ 由式(5)，(6)，(4)，

即得

$$a=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

由式(3)，即得

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x'+vt'), \\ ct &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta x'+ct'), \end{aligned} \qquad (7)$$

此正是第三節的羅侖茲變換也。此處與第三節之不同點，乃（x，t），（x′，t′）係同一“事項”（一個點，代表一事項發生的位置和時間）在兩個以等速 v（沿它們的X－軸）作相對運動的系統的坐標，故（x，t），（x′，t′）是有確切的物理意義的，不若 t′ 在羅侖茲氏原來“理論”中之無物理意義的。

六、相對論的一些結論

我們在第二節末講Michelson 實驗時，曾提及 Fitz Gerald 和Lorentz 的一個假設，謂一個物體在運動的方向縮短了 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍，來解釋Michelson 實驗的負性結果。

現在我們可以看看Michelson 實驗，從愛因斯坦的觀點，是如何可以了解的。

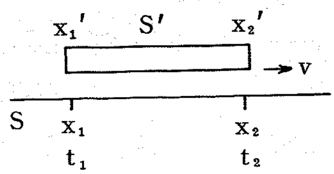
上節已由相對性原理和長度與時間的定義，導出羅侖茲變換：

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x'+vt'),\ ct=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta x'+ct'),\ y=y',$$

$$z=z'$$

A、FitzGerald的“**縮短**”

設一物體，它在靜止時的長度爲 L。（物體對無相對運動的觀察者S′所量得的長度）此物體以等速 v 對另一觀察者 S 作相對運動。



在 S′，物體的長度爲 $X_2'-X_1'=L$。

在S，物體的長度爲 x_2-x_1，惟量 x_1，x_2 兩位置務須"同時"，即 $t_1=t_2$。由上變換式，

$$x_2-x_1=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[x_2'-x_1'+v(t_2'-t_1')\right],$$

$$0=\left[\beta(x_2'-x_1')+c(t_2'-t_1')\right]$$

由此二式，即得

$$\begin{aligned} x_2-x_1&=\sqrt{1-\beta^2}\,(x_2'-x_1')\\ &=\sqrt{1-\beta^2}\,L。\end{aligned}$$

此式謂一物體的長度L，對一個以等速v作相對運動的觀察者，其長度"縮短"爲 $\sqrt{1-\beta^2}\,L$。

但此關係，按相對性原理，係"相對"的；換言之，一個在S系統爲靜止的物體的長度 $x_2-x_1=L$，由 S' 的觀點，它的長度 $x_2'-x_1'$ 亦"縮短"爲 $\sqrt{1-\beta^2}\,L$。這可證明如下。

由 $S(x,t)$ 轉換至 $S'(x',t')$ 的方程式，可由上變換式將速度v改爲 $-v$ 即得

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x-vt),\quad ct'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(-\beta x+ct),\quad y'=y,\quad z'=z$$

故 $x_2'-x_1'$（在 $t_2'=t_1'$）（同上法計算）爲

$$\begin{aligned} x_2\ -x_1'&=\sqrt{1-\beta^2}\,(x_2-x_1)\\ &=\sqrt{1-\beta^2}\,L。\end{aligned}$$

故所謂"縮短"，並非物體眞的縮短了，而係由量一個運動中的物體的長度的定義（兩端同時量）的結果。故S視 S' 的尺短了；S' 亦視S的尺短了。

習題：茲有一車，以等速v在地面運行。一在地面的人，量得車長爲L。問在車上的人量得車長爲何？（二人所用的尺，在相對靜止時是相同的。）

B、時間的伸長

設一車 S' 以等速在地面上運行。車上某一座位在 t_1'，t_2' 時有兩事項發生（如下坐和起立），二者的時間距爲 $t_2'-t_1'=T'$ 此兩事項，在地面上的觀察者言，乃在兩地點 x_1，x_2 發生，它們的時間距乃 t_2-t_1，t_1，t_2 乃在 x_1，x_2 兩地的時鐘的時。

由前羅侖茲變換式，$x_1{}'=x_2{}'$ ，$t_2{}'-t_1{}'=T'$ ，$t_2-t_1=T$，

$$t_2-t_1=\frac{t_2{}'-t_1{}'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$T=\frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_2-x_1=\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}(t_2{}'-t_1{}')=v(t_2-t_1)$$

第一式謂一段時間T'， 對一以等速 v 作相對運動的觀察者，乃伸長爲$T'/\sqrt{1-\beta^2}$。第二式謂S' 的某一固定點，由 S 觀點，乃以速度 v 運動，如題的假定也。

如S' 系中有一週期性的現象，其週期爲T' ，按上述結果，從 S 觀點，則其週期爲$T=T'/\sqrt{1-\beta^2}$。 由週期T與頻率ν的關係$\nu=1/T$，故S' 系的頻率ν'，在S則爲$\nu=\sqrt{1-\beta^2}\ \nu'$ 。

按相對性原理，上述的關係有對稱性；兩觀察者S，S' 是有完全相等地位的。

C、“同時”和“先，後”

在上述的S' 中的$x_1{}'$位置$t_1{}'$時發生一事項，在另一位置$x_2{}'$，$t_2{}'$ 時發生另一事項。從S' 觀點，如$t_1{}'=t_2{}'$，則兩事項謂爲“同時”的。由羅侖茲變換，從S觀點，此二事項(x_1,t_1)，(x_2,t_2)的時的間距t_2-t_1爲

$$t_2-t_1=\frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}(x_2-x_1)$$

因

$$x_2-x_1=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_2{}'-x_1{}')\neq 0,$$

故在S，該兩事項是非“同時”的，換言之，“同時”的觀念，是沒有絕對性的。這是和用牛頓的“絕對時”不同處。

由上二式，即得

$$t_2-t_1=\frac{\beta}{c(1-\beta^2)}(x_2{}'-x_1{}')$$

$$=\frac{v}{c^2(1-\beta^2)}(x_2{}'-x_1{}'),$$

故在 x_1'，x_2' 兩地，從 S' 觀點的兩“同時”事項，在 S 中不僅是不同時的，且先後次序亦按相對運動的方向而異。取 $x_2'-x_1'>0$，如速度 $v>0$，則 $t_2-t_1>0$，即 x_2' 的事項在 x_1' 事項之後；如 $v<0$，則 $t_2-t_1<0$，故 x_2' 的事項在 x_1' 事項之先了。

上述的兩事項 $A(x_1',t_1')$，$B(x_2',t_2')$，$t_2'=t_1'$，在 S' 是同時的。一般言之：使 $t_2'-t_1'>0$（在 S' 中，B在A事項之後發生）。在S中，該兩項 $A(x_1,t_1)$，$B(x_2,t_2)$ 的關係爲

$$t_2-t_1=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t_2'-t_1'+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')\right],\ t_2'-t_1'>0$$

使 $x_2'-x_1'>0$。如 $v>0$，則 $t_2-t_1>0$，換言之，A，B事項的次序，在S，S' 皆相同。如 $v<0$（S' 系沿 $-x$ 方向對S作相對運行）且上式右項有負值，則 $t_2-t_1<0$，換言之，在S系中，B事項乃在A之前了。

（民國七十六年五月二日在建國高中的講稿）

科教簡訊

臺灣省教育廳決定出刊高中科學輔導通訊

請教師踴躍投稿

一、稿件內容：

1. 有關科學教育法令與動態。
2. 教學疑難問題之解說。
3. 教學心得與經驗及科學新知之介紹。
4. 教學改進之研究報告。
5. 其他有關提昇科教之專論。

二、來稿請用稿紙書寫，如有附圖請用黑色筆描繪詳實。

三、稿件請逕寄「板橋市文化路一段廿五號省立板橋高中設備組收」。