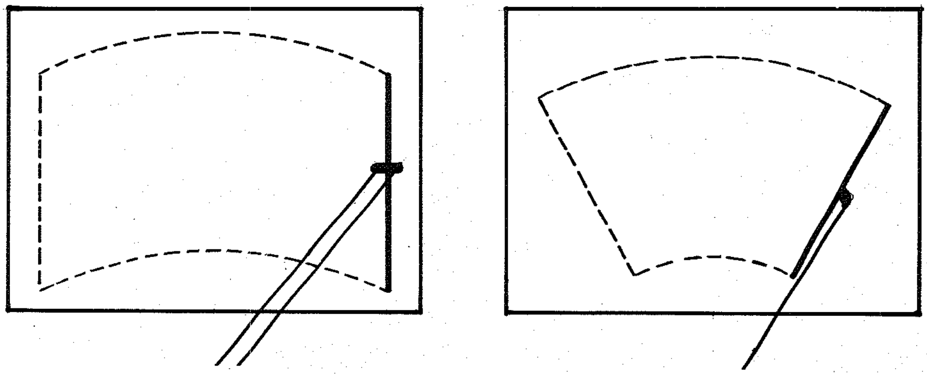
談雨刷話數學

鄭再添

台北縣立永和國中

一、前　　言

在國中新教材數學選修科上册（七十五年八月試用本）中，第三章第一節講述「平行四邊形」時，特別舉了一個應用的實例——公共汽車的雨刷（課本第 66 頁）。課文中提到：公共汽車的雨刷利用平行四邊形的原理來設計，可以使得雨刷永遠保持鉛直方向（參見圖 1(a)），因此刷過的面積比傳統的雨刷（見圖 1(b)）刷過的面積要大，司機在下雨時能看得更清楚。這是一個應用數學原理改善生活的難得的好例證。但是對於改良的效果及獲得改良的原因何在？文內則未曾提及。本文試圖就此提出幾點討論，希望能提供給教師們做為教學上的補充參考。



(a)　　(b)

圖 1

二、本　　文：

(甲)　改良的雨刷所刷過的面積眞比傳統式的要大嗎？如果是，它到底大了多少？原因何在？這是很値得深思的。為了便於討論，我們首先假定：兩者所刷過的幅角相同時

（設爲θ角），試比較兩者刷過的面積——

設支柄長l_1，刷子長l_2，且視爲支點在刷子的中央位置。則如圖(2)所示，只須利用簡單的“出入相補”原理，即可得矩形$ABCD$的面積而得改良型雨型所刷過的面積爲$2l_1l_2\sin\frac{\theta}{2}$。

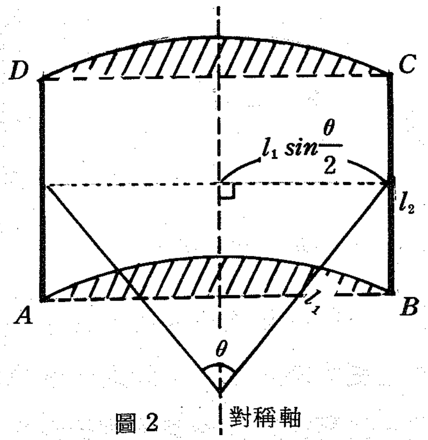


圖 2

至於傳統式雨刷所刷過的區域，若將支柄與刷子視同在一直綫上，則可由扇形面積的求法算出，參見圖(3)：

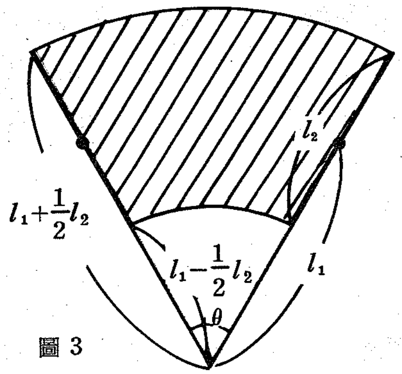


圖 3

$$\begin{aligned}\text{斜綫面積}&=\frac{\theta}{2\pi}(l_1+\frac{1}{2}l_2)^2\pi-\frac{\theta}{2\pi}(l_1-\frac{1}{2}l_2)^2\pi\\&=\frac{\theta}{2}[(l_1+\frac{1}{2}l_2)^2-(l_1-\frac{1}{2}l_2)^2]\\&=\frac{\theta}{2}[2l_1l_2]\\&=\theta l_1l_2\end{aligned}$$

如此說來，若支柄所旋轉的幅角θ相同時，改良型雨刷所刷過的面積$2l_1l_2\sin\frac{\theta}{2}$是否大於傳統型雨刷所刷過的面積$\theta l_1l_2$？仍得視$\theta$值的大小而定！

(乙) 我們考慮兩者相等時的θ值究竟如何？即$2\sin\frac{\theta}{2}=\theta$時$\theta=$？若利用正弦曲綫的插值二次多項式近似函數

$$\frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)\approx\sin x_{\text{(註)}}$$

則得 $2\left[\frac{4}{\pi^2}(\frac{\theta}{2})(\pi-\frac{\theta}{2})\right]\approx\theta$

化簡整理得 $\dfrac{4}{\pi}-\dfrac{2\theta}{\pi^2}\approx 1$

則 $\theta\approx 2\pi-\dfrac{\pi^2}{2}\approx 77°$

或者，利用函數 $y=x$ 及 $y=\sin x$ 的圖形觀察瞭解（參見圖(4)）亦可看出一個大概：

由 $2\sin\dfrac{\theta}{2}=\theta$（即 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\theta}{2}$），令 $x=\dfrac{\theta}{2}$

則成 $\sin x=x$，

圖(4)中函數圖形的交點位 $x=\dfrac{\theta}{2}\approx\pi-\dfrac{\pi^2}{4}$ 處。

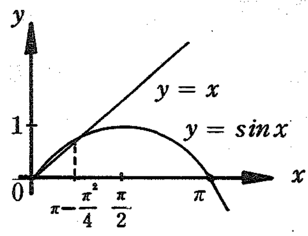
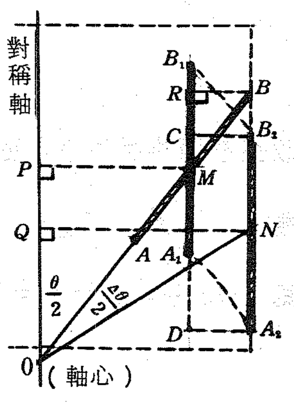


圖 4

以上討論的結果告訴我們，在所轉幅角相同的前提下，當 θ 小於 $77°$ 內，改良型雨刷確有較大的刷過面積；但 θ 值更大時則不然，到達一個限度後情形即將改觀。

這樣的結論顯然不盡合理，但藉此可以察覺雨刷的改良，不盡在於因保持鉛直方向而刷得到左、右下角，即獲得較大的面積！事實上，改良型雨刷擁有比傳統式雨刷更大的轉動幅角，這才是刷出較大面積的主要原因。

㈥　因此我們進一步想知道，改良後的雨刷在轉動幅角上的增大情形如何？假定兩者的 l_1 及 l_2 值都相同，支柄的軸心位置也未改變，僅考慮在同樣寬度的範圍（玻璃窗）內，改良型雨刷可能獲得轉動幅角的改良程度。如圖(5)所示，是爲對稱軸右半部分，$\dfrac{\triangle\theta}{2}$ 表示幅角的增加量：



說明：$\overline{AB}$ 表傳統式刷子位置，

$\overline{A_1B_1}$ 表與傳統式轉同幅角時之改良型刷子位置，

$\overline{A_2B_2}$ 表改良型刷子可完全刷達位置。

圖 5

圖中 $\overline{OM}=\overline{ON}=l_1$，$\overline{AB}=\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=l_2$；$M$ 爲 $\overline{AB}$ 及 $\overline{A_1B_1}$ 中點，N 爲 $\overline{A_2B_2}$ 中點。由此可知

$$\overline{PM}=l_1\sin\frac{\theta}{2}，\overline{QN}=l_1\sin\left(\frac{\theta+\triangle\theta}{2}\right)；$$

而幅角增加量$\frac{\triangle\theta}{2}$所刷出的區域$A_1A_2B_2B_1$可由矩形$A_2B_2CD$的面積求出。

因　$\overline{A_2D}=\overline{BR}=\overline{QN}-\overline{PM}$，

且　$\overline{BR}=\overline{BM}\sin\frac{\theta}{2}$（$\because\angle BMR=\angle AOQ=\frac{\theta}{2}$），

故得　$$l_1\sin\left(\frac{\theta+\triangle\theta}{2}\right)-l_1\sin\frac{\theta}{2}=\frac{l_2}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

即　$$\sin\left(\frac{\theta+\triangle\theta}{2}\right)=\left(1+\frac{l_2}{2l_1}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

所以　$$\triangle\theta=2\sin^{-1}\left[\left(1+\frac{l_2}{2l_1}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]-\theta$$

當l_1, l_2及θ皆爲已知量時，即不難藉由三角函數值表或計算器推算出$\triangle\theta$值。

更值得一提的是，若只想知道$A_1A_2B_2B_1$的面積，則由矩形A_2B_2CD中，$\overline{A_2B_2}=l_2$ $\overline{A_2D}=\overline{BR}=\frac{l_2}{2}\sin\frac{\theta}{2}$可知面積爲$\frac{l_2^2}{2}\sin\frac{\theta}{2}$，與$\triangle\theta$值無關！至此可知，改良型雨刷真正可刷出的面積應爲

$$2l_1l_2\sin\frac{\theta}{2}+l_2^2\sin\frac{\theta}{2}！$$

若仿上再以插值近似函數求取

$$2l_1l_2\sin\frac{\theta}{2}+l_2^2\sin\frac{\theta}{2}=\theta l_1l_2$$

時的θ值，可得　$\theta\approx2\pi-\frac{l_1\pi^2}{2l_1+l_2}$；

設$l_1=l_2$，則　$\theta\approx2\pi-\frac{\pi^2}{3}\approx172°$

當l_2的值越大於l_1時，則θ值勢必越接近$180°$，改良型雨刷在適用的幅角範圍內所刷出的面積，比傳統式雨刷所刷的面積大至此已無疑慮。

三、結　語

綜合以上的討論，我們對雨刷的改良獲得了一些較明確的瞭解：在同樣的活動寬度內，若雨刷的支柄長、刷子長，及軸心位置相同，則改良型雨刷因爲保持鉛直方向移動

的緣故，得以擁有比傳統式雨刷較大的轉動幅角，因此刷過的面積總是較大。

至於事實的眞象如何？筆者對汽車純屬外行，而且市面上的汽車廠牌及車系更是種類繁多，又雨刷型式不一，無法深究。經筆者留意觀察，一般小客車（自用轎車）的雨刷，竟多延襲“傳統式”結構，並未一如課本所提地加以“改良”。而且軸心位置大多選擇玻璃窗的左下角或右下角處裝設。一般雨刷的刷子長都與支柄長相近或稍長，可旋轉的幅角總在100°上下。只有大客車的雨刷才出現較多的“改良型”。

這又是怎麼回事呢？筆者以為，雨刷的效果，不全視其刷其面積的大小而定；有些“死角”地帶雖然面積不大，影響視野的程度卻顯得格外重要。如圖(1)中之(a)、(b)所示，改良型雨刷可以刷到左、右下角部分，傳統式雨刷則否；即使改良型雨刷刷過的面積未必較大，效果仍將較佳！一般小客車的雨刷的軸心多裝在角落，大概就是為了顧及視野的緣故。至於未採用“改良型”結構，除了經濟上的理由外，似乎意味著：在一般轉幅下所產生的面積差額的影響已顯得不那麼重要吧！

當然，眞正的玻璃窗絕不是一個平面，傳統雨刷的支柄及刷子也往往不成一直綫。雨刷的設計與改良所需考慮的問題相當複雜，比如支柄及刷子的長度，支柄與刷子的支點，軸心位置的決定，及刷子所刷出的部分（圖形）等等，絕非在此所能討論。本文純就數學趣味觀點而發，對面積及角度的推算做一番驗證，還請眞正的方家斧正。

註：細節請參見徐氏基金會出版之“數學之內容方法及意義”(一)中第229頁。