阿基米德爲什麼會這樣子想？

葉東進

國立科學園區實驗高級中學

一、

高中理科數學下册的教本中有如下的一段敍文：

「阿基米德求圓周率需要開平方時，並不是利用前節所提的傳統開平方法，他用的是下面的不等式：

$$w+\frac{p}{2w+1}<\sqrt{w^2+p}<w+\frac{p}{2w}$$

及

$$w-\frac{p}{2w-1}<\sqrt{w^2-p}<w-\frac{p}{2w}$$

在這兩組不等式中，w、p 都是正數；而在第二組不等式中，當然要求 $w^2>p$；此外對 w、p 之間的大小關係要作少許限制，不等式才會成立。

我們把結果歸納如下：

(1) $\sqrt{w^2+p}<w+\frac{p}{2w}$ 及 $\sqrt{w^2-p}<w-\frac{p}{2w}$ 恒成立。

(2) $p<2w+1$ 時，$w+\frac{p}{2w+1}<\sqrt{w^2+p}$ 恒成立。

$p<2w-1$ 時，$w-\frac{p}{2w-1}<\sqrt{w^2-p}$ 恒成立。

(1)式的證明很簡單，只要將兩邊平方比較大小即得。再看(2)式，若取正號，則得

$$\left(w+\frac{p}{2w+1}\right)^2=w^2+\frac{2w}{2w+1}p+\frac{p^2}{(2w+1)^2}$$

$$=w^2+p-\left(\frac{p}{2w+1}-\frac{p^2}{(2w+1)^2}\right)$$

$$=w^2+p-\frac{p}{2w+1}\left(1-\frac{p}{2w+1}\right)$$

$$<w^2+p$$

兩邊開平方即得所要的結果。

取負號時的證法與正號的情形相似。」

二、

教師在課堂上能否把如上的敍文照本宣科帶過便算交代了事？課本是死的，教師是活的，更重要的是學生也是活的，因此教與學兩方面恐怕沒這麼簡單，正如楊維哲先生說的，不是難在邏輯上的爲什麼，是難在心理上的爲什麼，所以有幾件事是不能不交代清楚的。

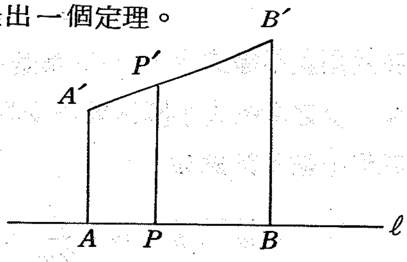
(一)　爲什麼(2)式中，w、p 之間的大小關係事先知道要如此限制？

(二)　根本的問題是這兩組不等式是怎麼想到的？

其實(一)的答案就隱藏在(二)的答案裡。在說明之前，先提出一個定理。

定理：設線段 $\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{PP'}$ 均垂直於直線 ℓ（圖一），若 $\overline{AP}:\overline{PB}=r:s$（其中 r，s 均爲正實數），則

$$\overline{PP'}=\frac{s\overline{AA'}+r\overline{BB'}}{r+s}$$



圖一

證明：由梯形 $AA'P'P$ 的面積加上梯形 $PP'B'B$ 的面積等於梯形 $AA'B'B$ 的面積得

$$\frac{(\overline{AA'}+\overline{PP'})r}{2}+\frac{(\overline{PP'}+\overline{BB'})s}{2}=\frac{(\overline{AA'}+\overline{BB'})(r+s)}{2}$$

$$\therefore\ \overline{PP'}=\frac{s\overline{AA'}+r\overline{BB'}}{r+s}$$

三、

我們在估計一個正數 x 的平方根 $\sqrt{x}$ 時，x 不會是 w^2 這樣的型式，當然也不會是 $(w+1)^2$ 或是 $(w-1)^2$ 的型式，否則 $\sqrt{x}$ 就直接是 w 或是 $w+1$ 或是 $w-1$，又何必談估計，因此所估計的通常是下面的兩種情況：

（甲） x 滿足 $w^2 < x = w^2 + p < (w+1)^2$

此時 $\sqrt{w^2} < \sqrt{w^2+p} < \sqrt{(w+1)^2}$

即 $0 < p < 2w+1$

考慮曲線 $y=\sqrt{x}$。

取點 $A=(w^2, 0)$，$P=(w^2+p, 0)$，$B=((w+1)^2, 0)$

過 A，B 所作 x 軸的垂直線分別交曲線 $y=\sqrt{x}$ 於點 A'，B'。

又過 P 作 x 軸的垂線分別交線段 $A'B'$，曲線 $y=\sqrt{x}$ 及在 A' 的切線 ℓ 於點 P'，Q 及 P''（圖二）。

因為 $\overline{AP} : \overline{PB} = p : 2w+1-p$

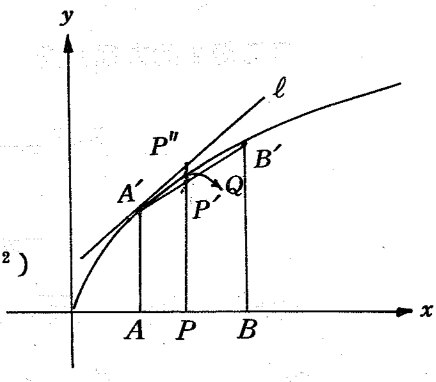
由前面定理知有

$$\overline{PP'} = \frac{(2w+1-p)\overline{AA'} + p\overline{BB'}}{p+2w+1-p}$$

$$= \frac{(2w+1-p)w + p(w+1)}{2w+1}$$

$$= \frac{w(2w+1)+p}{2w+1}$$

$$= w + \frac{p}{2w+1}$$



圖二

而切線 ℓ 的方程式是 $y = w + \frac{1}{2w}(x - w^2)$

$$\therefore \overline{PP''} = w + \frac{1}{2w}(w^2+p-w^2)$$

$$= w + \frac{p}{2w}$$

但是 $\overline{PP'} < \overline{PQ} < \overline{PP''}$，且 $\overline{PQ} = \sqrt{w^2+p}$

故 $$w + \frac{p}{2w+1} < \sqrt{w^2+p} < w + \frac{p}{2w}$$

（乙） x 滿足 $(w-1)^2 < x = w^2 - p < w^2$

此時 $\sqrt{(w-1)^2} < \sqrt{w^2-p} < \sqrt{w^2}$

即 $0 < p < 2w-1$

仍然考慮曲線 $y=\sqrt{x}$。

取點 $A=((w-1)^2, 0)$，$P=(w^2-p, 0)$，

$B=(w^2, 0)$

過 A，B 所作 x 軸的垂直線分別交曲線 $y=\sqrt{x}$ 於點 A'，B'。

又過 P 作 x 軸的垂線分別交線段 $A'B'$，曲線 $y=\sqrt{x}$ 及在 B' 的切線 ℓ 於點 P'，Q 及 P''（圖三）。

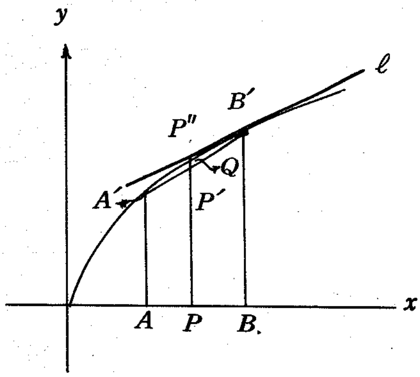
因為 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2w-1-p : p$

$$\therefore \quad \overline{PP'} = \frac{p\overline{AA'} + (2w-1-p)\overline{BB'}}{2w-1-p+p}$$

$$= \frac{p(w-1)+(2w-1-p)w}{2w-1}$$

$$= \frac{w(2w-1)-p}{2w-1}$$

$$= w - \frac{p}{2w-1}$$



圖三

而切線 ℓ 的方程式是 $y = w + \frac{1}{2w}(x-w^2)$

$$\therefore \quad \overline{PP''} = w + \frac{1}{2w}(w^2-p-w^2)$$

$$= w - \frac{p}{2w}$$

但是 $\overline{PP'} < \overline{PQ} < \overline{PP''}$，且 $\overline{PQ} = \sqrt{w^2-p}$

故 $$w - \frac{p}{2w-1} < \sqrt{w^2-p} < w - \frac{p}{2w}$$

四、

我們缺乏證據能夠說阿基米德就是根據上面的想法而獲得了那兩組不等式，但是想法中所呈現出的直覺與自然，至少可以相當地回答心理上的為什麼，因此它是課堂上值得向學生推介的一份補充素材。