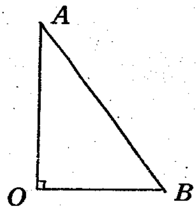
一些定理的推廣

葉東進
國立科學工業園區實驗高級中學

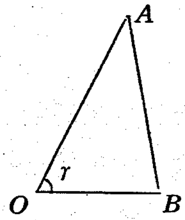
1. 三維空間裡的畢氏定理及餘弦定理

在二維空間（平面）上，畢氏定理及餘弦定理是大家所熟知的：



畢氏定理：三角形 AOB 中，若線段 AO 垂直線段 BO，則

$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2$$



餘弦定理：三角形 AOB 中，若線段 AO 與線段 BO 的夾角爲 γ，則

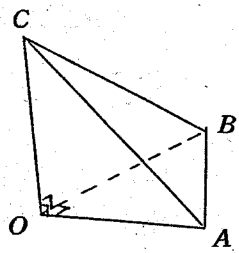
$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2-2\,\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cos\gamma$$

顯然，上述餘弦定理是畢氏定理的一般化結果。

現在考慮三維空間的一個三角錐 $OABC$，若平面 AOB，平面 BOC 與平面 COA 兩兩垂直，則

$$\triangle ABC^2=\triangle AOB^2+\triangle BOC^2+\triangle COA^2$$

（註：$\triangle ABC$ 表三角形 ABC 的面積，餘同）



證明：因爲平面 AOB，平面 BOC 與平面 COA 兩兩垂直，故可取一正交坐標系使射線 OA，射線 OB，射線 OC 分別爲正 x 軸，正 y 軸，正 z 軸。

令線段 OA，OB，OC 之長分別爲 a，b，c，

則四個點 O，A，B，C 在此坐標系統之坐標分別爲 $(0,0,0)$，$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 因此，平面 ABC 之方程式爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

而點O至平面ABC之垂直距離則爲

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\left(\text{或是}\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right)$$

隨之，三角錐$OABC$的體積爲

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\times\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

但是另方面，三角錐$OABC$的體積亦爲

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=\frac{1}{6}abc$$

所以

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\times\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\frac{1}{6}abc$$

故
$$\triangle ABC^2=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2+\left(\frac{ca}{2}\right)^2$$
$$=\triangle AOB^2+\triangle BOC^2+\triangle COA^2$$

上述結果即爲三維空間裡的畢氏定理。

其次，當三角錐$OABC$中的平面COA與平面AOB的夾角爲α，平面AOB與平面BOC的夾角爲β，平面BOC與平面COA之夾角爲γ時，則有

$$\triangle ABC^2=\triangle AOB^2+\triangle BOC^2+\triangle COA^2$$
$$-2(\triangle COA\cdot\triangle AOB\cos\alpha+\triangle AOB\cdot\triangle BOC\cos\beta$$
$$+\triangle BOC\cdot\triangle COA\cos\gamma)$$

證明：令平面ABC與平面BOC，平面COA與平面AOB之夾角分別爲θ,ϕ,ψ，則不論θ,ϕ,ψ之爲銳角或鈍角，由投影的結果可以得到：

$$\triangle ABC=\triangle BOC\cos\theta+\triangle COA\cos\phi+\triangle AOB\cos\psi \quad\cdots\cdots(1)$$

同理可得：

$\triangle AOB = \triangle ABC \cos\phi + \triangle BOC \cos\beta + \triangle COA \cos\alpha$ ……(2)

$\triangle BOC = \triangle ABC \cos\theta + \triangle COA \cos\gamma + \triangle AOB \cos\beta$ ……(3)

$\triangle COA = \triangle ABC \cos\phi + \triangle AOB \cos\alpha + \triangle BOC \cos\gamma$ ……(4)

由 (1)×△ABC −(2)×△AOB −(3)×△BOC −(4)×△COA得：

$$\begin{aligned}&\triangle ABC^2 - \triangle AOB^2 - \triangle BOC^2 - \triangle COA^2\\ &= \triangle ABC \cdot \triangle BOC \cos\theta + \triangle ABC \cdot \triangle COA \cos\phi + \triangle ABC \cdot \triangle AOB \cos\phi\\ &\quad - \triangle AOB \cdot \triangle ABC \cos\phi - \triangle AOB \cdot \triangle BOC \cos\beta - \triangle AOB \cdot \triangle COA \cos\alpha\\ &\quad - \triangle BOC \cdot \triangle ABC \cos\theta - \triangle BOC \cdot \triangle COA \cos\gamma - \triangle BOB \cdot \triangle AOB \cos\beta\\ &\quad - \triangle COA \cdot \triangle ABC \cos\phi - \triangle COA \cdot \triangle AOB \cos\alpha - \triangle COA \cdot \triangle BOC \cos\gamma\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}\triangle ABC^2 &= \triangle AOB^2 + \triangle BOC^2 + \triangle COA^2\\ &\quad -2(\triangle COA \cdot \triangle AOB \cos\alpha + \triangle AOB \cdot \triangle BOC \cos\beta\\ &\quad + \triangle BOC \cdot \triangle COA \cos\gamma)\end{aligned}$$

上述結果即爲三維空間裡的餘弦定理。可以看出此定理是三維空間裡的畢氏定理的一般化結果（即$\alpha = \beta = \gamma = 90°$時，餘弦定理就是畢氏定理。）

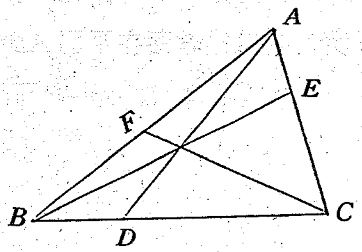
2. 三維空間裡的西瓦定理及孟氏定理

平面幾何裡的兩個有名的定理：

西瓦(Ceva)定理：設D, E, F分別是△ABC的邊BC, CA, AB 上的分點，滿足

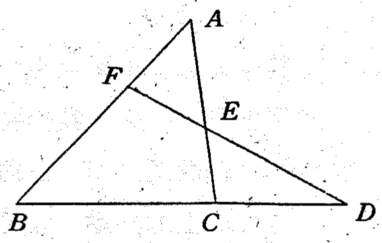
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = a,\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = b,\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = c,$$

則線段AD, BE, CF 共點的充分必要條件是$abc = 1$。



孟氏(Menelaus)定理：設D, E, F分別是△ABC的邊BC, CA, AB 上的分點，滿足

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = a,\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = b,\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = c$$



D, E, F三點共線的充分必要條件是$abc = 1$。

關於這兩個定理，我們都可在三維空間裡找到它們的推廣，但是有必要先提到向量幾何裡的一個非常基本而有用的結果：

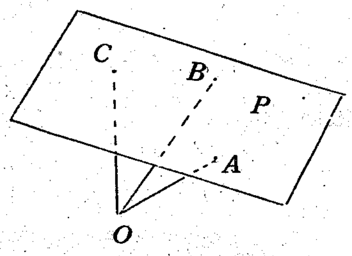
平面上，設$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$是不平行的兩個已知非零向量，則對任予點p，恒唯一對應一組有序實數對(x, y)使$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$。特別是，點$p$落在直線$AB$上的充分必要條件是$x + y = 1$。

數對(x, y)其實便是點p在坐標系統$(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$上的坐標，因而$x+y=1$便是直線$AB$在該系統上的方程式。

現在考慮三維空間裡的三個不共線的點A, B, C。

設$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$與$\overrightarrow{OC}$是不共面的三個已知非零向量，則對任予點P，恒唯一對應有序實數組(x, y, z)使$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$。

特別是，點P落在平面ABC的充分必要條件是$x + y + z = 1$。



實數組(x, y, z)其實便是點P在坐標系統$(0; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$上的坐標，因而$x + y + z = 1$便是平面$ABC$在該系統上的方程式。

底下將要證明的是特別情形：點P落在平面ABC的充分必要條件是$x + y + z = 0$。

證明：由於點P落在平面ABC的充分必要條件是存在實數對(α, β)使$\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$，此時$\overrightarrow{OP}$可以表爲：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\\ &= \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{OC} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})\\ &= \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

取　$x = \alpha$，$y = \beta$，$z = 1 - \alpha - \beta$，即得

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

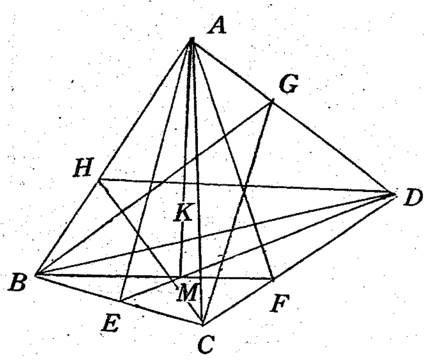
其中$x + y + z = 1$。

利用上面的結果，我們要證明空間裡的西瓦定理及孟氏定理。

空間裡的西瓦定理：三角錐$ABCD$中，設E、F、G、H分別是BC, CD, DA, AB上的分點，滿足

$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=a$，$\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=b$，$\dfrac{\overline{DG}}{\overline{GA}}=c$，$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=d$，

則平面ABF，平面BCG，平面ADE 及平面CDH 交於一點的充分必要條件是 $abcd=1$。



證明：由於平面ABF，平面BCG，平面ADE 必會相交於一點，令爲K，並令

$$\overrightarrow{DK}=x\,\overrightarrow{DA}+y\,\overrightarrow{DB}+z\,\overrightarrow{DC}\cdots\cdots(*)$$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{DK}=\frac{c+1}{c}x\,\overrightarrow{DG}+y\,\overrightarrow{DB}+z\,\overrightarrow{DC}$$

$$(=x\,\overrightarrow{DA}+y\,\overrightarrow{DB}+(b+1)\,z\,\overrightarrow{DF}$$

因爲B、C、G、K四點共面，且A、B、F、K四點共面由前述向量幾何之基本結果知有：

$$\frac{c+1}{c}x+y+z=1\cdots\cdots(1)$$

$$x+y+(b+1)\,z=1\cdots\cdots(2)$$

另外，由$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MK}$ （M是DE與BF 的交點，且A、K、M三點共線）

$$=\lambda\,\overrightarrow{DE}+\mu\,\overrightarrow{AK}$$

$$=\lambda\,\overrightarrow{DE}+\mu\,(\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{DA})$$

$$\Rightarrow(1-\mu)\,\overrightarrow{DK}=-\mu\,\overrightarrow{DA}+\lambda\,\overrightarrow{DE}$$

$$=-\mu\,\overrightarrow{DA}+\lambda\left(\frac{1}{a+1}\,\overrightarrow{DB}+\frac{a}{a+1}\overrightarrow{DC}\right)$$

$$\Rightarrow\qquad \overrightarrow{DK}=\frac{-\mu}{1-\mu}\overrightarrow{DA}+\frac{\lambda}{(a+1)(1-\mu)}\overrightarrow{DB}$$

$$+\frac{\lambda a}{(a+1)(1-\mu)}\,\overrightarrow{DC}$$

上式與式（$*$） 比較，即得

$$z=ay\cdots\cdots(3)$$

解(1)，(2)與(3)之聯立式得

$$\begin{cases} x=\dfrac{abc}{abc+ab+a+1} \\ y=\dfrac{1}{abc+ab+a+1} \\ z=\dfrac{a}{abc+ab+a+1} \end{cases}$$

但是，平面 ABF ，平面 BCG ，平面 ADE 及平面 CDH 交於一點的充分必要條件是平面 CDH 也通過點 K，此時由 $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$ 所張之平行六面體的體積爲零。即 $\left|\overrightarrow{DK}\wedge\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DH}\right|=0$。

考慮以（D；$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$）爲系統，則 $\overrightarrow{DK}$，$\overrightarrow{DC}$ 與 $\overrightarrow{DH}$ 對此系統之坐標分別

爲 $\left(\dfrac{abc}{abc+ab+a+1},\dfrac{1}{abc+ab+a+1},\dfrac{a}{abc+ab+a+1}\right)$，$(0,0,1)$

與 $\left(\dfrac{1}{d+1},\dfrac{d}{d+1},0\right)$

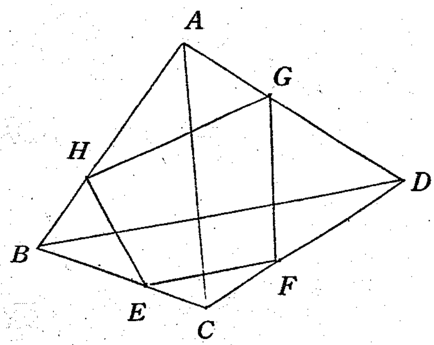
因而 $$\left|\overrightarrow{DK}\wedge\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DH}\right|=0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} abc & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & d & 0 \end{vmatrix}=0\text{，　即 } abcd=1$$

空間裡的孟氏定理：三角錐 $ABCD$ 中，設 E、F、G、H 分別是邊 BC, CD, DA, AB 上的分點，滿足

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=a,\ \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=b,\ \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}=c,\ \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=d$$

則 E、F、G、H 四點共面的充分必要條件是 $abcd=1$。



證明：
$$\overrightarrow{DH}=\frac{1}{d+1}\overrightarrow{DA}+\frac{d}{d+1}\overrightarrow{DB}$$

$$=\frac{1}{d+1}\left(\frac{c+1}{c}\overrightarrow{DG}\right)+\frac{d}{d+1}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)$$

另外，
$$\overrightarrow{DC}=(b+1)\overrightarrow{DF},$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}&=(a+1)\overrightarrow{CE}\\&=(a+1)(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC})\\&=(a+1)\overrightarrow{DE}-(a+1)(b+1)\overrightarrow{DF}\end{aligned}$$

所以

$$\overrightarrow{DH}=\frac{c+1}{c(d+1)}\overrightarrow{DG}+\frac{d}{d+1}(b+1)\overrightarrow{DF}+\frac{d}{d+1}(a+1)\overrightarrow{DE}-\frac{d(a+1)(b+1)}{d+1}$$

又E、F、G、H四點共面的充分必要條件是

$$\frac{c+1}{c(d+1)}+\frac{d}{d+1}(b+1)+\frac{d}{d+1}(a+1)-\frac{d(a+1)(b+1)}{d+1}=1$$

即　$abcd=1$

3. 舒瓦茲不等式的推廣

我們知道，在二維空間裡，任意兩個實數對(a_1,a_2)與(b_1,b_2)會滿足

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

上面的不等式即爲有名的舒瓦茲（Schwarz）不等式。

現在考慮在三維空間裡，任意三個有序實數組(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)與(c_1,c_2,c_3)，它們是否滿足

$$(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3\,?$$

答案是不一定，但是當$a_i,b_i,c_i\ (i=1,2,3)$均爲非負的實數時，不等式就會成立。底下要給出它的證明。

對於任意三個非負的實數A、B、C恒有

$$\frac{A+B+C}{3}\geq\sqrt[3]{ABC}$$

也就是
$$\frac{1}{3}(A+B+C)\geq A^{\frac{1}{3}}B^{\frac{1}{3}}C^{\frac{1}{3}}$$

今取 $X=a_1^3+a_2^3+a_3^3$

$Y=a_1^3+b_2^3+b_3^3$（假設 a_i, b_i, c_i 均不全爲零，$i=1,2,3$）

$Z=c_1^3+c_2^3+c_3^3$

且令 $x_i=\dfrac{a_i^3}{x},\ y_i=\dfrac{b_i^3}{y},\ z_i=\dfrac{c_i^3}{z}$（$i=1,2,3$）

則由

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)\geq x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}z_1^{\frac{1}{3}}\\[2ex] \dfrac{1}{3}(x_2+y_2+z_2)\geq x_2^{\frac{1}{3}}y_2^{\frac{1}{3}}z_2^{\frac{1}{3}}\\[2ex] \dfrac{1}{3}(x_3+y_3+z_3)\geq x_3^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{1}{3}}z_3^{\frac{1}{3}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)+(z_1+z_2+z_3)]$$

$$\geq\frac{a_1}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{b_1}{y^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{c_1}{z^{\frac{1}{3}}}+\frac{a_2}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{b_2}{y^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{c^2}{z^{\frac{1}{3}}}+\frac{a_3}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{b_3}{y^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{c_3}{z^{\frac{1}{3}}}$$

但是 $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=z_1+z_2+z_3=1$

$$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}\geq a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3$$

即 $(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3$

實際上，這個不等式可以推廣到一般的 n 維空間裡，也就是說下面的定理是成立的：

定理：設 $x_{ij}\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$，則恒有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{n}\right)\geq\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{ij}\right)\right]^{n}$$

證明：取

$$\boldsymbol{x}_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{n}\quad,\ i=1,2,\cdots,n$$

令 $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}^{n}}{\boldsymbol{x}_i}$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$

由算術幾何平均不等式，我們有：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i1} \geq \prod_{i=1}^{n} (a_{i1})^{\frac{1}{n}} \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i2} \geq \prod_{i=1}^{n} (a_{i2})^{\frac{1}{n}} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{in} \geq \prod_{i=1}^{n} (a_{in})^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

以上諸式相加得：

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}\right) \geq \prod_{i=1}^{n} (a_{i1})^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n} (a_{i2})^{\frac{1}{n}} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} (a_{in})^{\frac{1}{n}}$$

但是

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{個}}) = 1$$

而

$$\prod_{i=1}^{n} (a_{i1})^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n} (a_{i2})^{\frac{1}{n}} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} (a_{in})^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i1} + \prod_{i=1}^{n} x_{i2} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} x_{in}\right) \Big/ (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}\right) \Big/ \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

故

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{n}\right) \geq \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\right]^{n}$$