

人造衛星的軌道及計算法

何耀坤

臺南市私立光華女中

自從人造衛星發射以後，世界各國人對太空的關心高昂，在我國也有許多人盼望親眼能看到人造衛星。我們作天體觀測時偶而會看到如人造衛星的不明飛體，又曾經接到報告說，有人每年看到人造衛星兩三次，又說它飛過離北極星一公尺地方等語使我驚訝。他們因為缺乏球面天文學概念，對天體位置和方向不能表達正確。人造衛星的觀測在現階段已經不需要業餘天文人士的協助，但是可以培養許多觀測者。在高中或大學相關天體科學方面，建議加強球面天文學知識，並喚起對人造衛星有數理認識和觀測興趣。

一、人造衛星的原理

人造衛星為何能在空中運行而不落下呢？如圖 1，假設從地球上的高塔拋出物體，只放下手時物體會落在地上 A 點。若向橫方向拋去會落在 B 點，更增加速度時落點漸漸變遠方。若拋物速度每秒接近 8 公里時，物體必會落到迴轉地球一半地點 C，這就是大陸間洲際飛彈的原理。拋物更加速時物體不能落地而繞地球周圍，並會回到 A 點上空，就是人造衛星。人造衛星只受地球引力而運行，若不飛離無限遠方必在橢圓軌道上運行。大陸間洲際飛彈也會繞橢圓軌道，但是

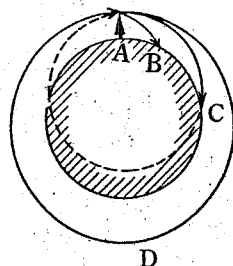


圖 1

其一部分會向地面衝突。人造衛星的橢圓軌道，最初速度愈快，橢圓愈扁平。若射出速度增至每秒 11 公里時，軌道會變成拋物線，更加速時軌道會成為雙曲線，物體會飛離無限遠方，不能成為人造衛星。在此我們要注意兩點事，第一是如圖 1，將物體從高處向橫拋出時，因為人造衛星軌道是封閉的橢圓軌道，所以必回到發射點上空。若從地上射出必會和地上衝擊。因此必將人造衛星送到遠離地面的地方，然後向橫彈出，其軌跡

稱彈道。如用火箭垂直射上空，然後用誘導裝置將最後段火箭向橫每秒 8 公里之速度拋出人造衛星。第二是，人造衛星軌道是橢圓，因為地球由西向東自轉，所以人造衛星繞一周後不會回到發射地點，而通過偏西 25° （經度）地點。

二、人造衛星的刻卜勒(Kepler)運動

所謂人造衛星是受地球重力影響而繞周期軌道的人造物體，其作用主力是地球引力。因為人造衛星每秒以 8 公里之速移動，所以月球和太陽引力不必考慮。那麼地球引力如何作用於人造衛星呢？地球大致可說是球狀，中心構成物質較重，表面附近較輕，對中心而言其密度是對稱，所以離中心有一定距離的物體都具有相同密度。人造衛星沿地球上空運行，在力學上地球和其全質量有相同之點，因為地球作用於衛星的引力，可謂地球全質量集中於其中心。

在某一點受萬有引力的物體都受刻卜勒三法則支配，作所謂刻卜勒運動。若將刻卜勒第一法則適用於人造衛星，即是「人造衛星的軌道是以地球中心為一焦點的橢圓」。如上述，作用於外部之力可說是地球全質量集中於 F（圖 2），設人造衛星為 S，而 F 點受萬有引力時，從 A 點出發的衛星經一定時間會返回原點

。在圖 2 中 A 為近地點，B 為遠地點，A F 為近地點距離，B F 為遠地點距離。設地球中心和衛星之距離為動徑（ r ），橢圓的長軸為 $2a$ （ a 稱半長軸），軌道離心率為 e ，衛星運行反時針方向運行時 r 和 a 的角度為 θ 時，

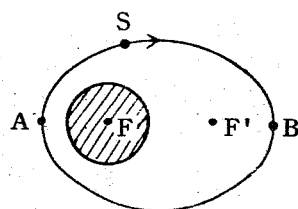


圖 2

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

刻卜勒第二法則置換於人造衛星而言，軌道速度在近地點最大，在遠地點最小。這時地球中心和衛星所連的動徑，在單位時間內移動所成的面積，在任何位置都相等。如圖 3，扇形 O A B 和 O C D 面積相等。例如 1957 年 B（日本第二號人造衛星），離心率為 0.1，其軌道半長徑為 1 時，如圖 4， $AO = 1$ ， $FO = 0.1$ ，所以 $AF = 0.9$ ， $FB = 1.1$

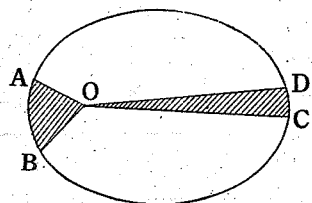


圖 3

$$\therefore \frac{\text{近地點速度}}{\text{遠地點速度}} = \frac{FB}{FA} = \frac{1.1}{0.9} = 1.22$$

刻卜勒第三法則...「周期的平方和軌道半長徑之立

方成正比」。設人造衛星半長徑為 a ，周期為 T ；若半長徑 a' 時的周期為 T' ；半長徑為 a'' 時的周期為 T'' ，那麼可成立下式。

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a''^3}{T''^2} = \dots\dots\dots$$

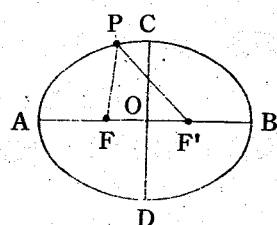


圖 4

根據上式，若半長徑相同的軌道，無論其離心率取何值，周期應相同，所以知周期就可求算半長徑，表 1 表示這關係。

表中周期取一日（24小時）的整數分之一，因為這樣作，人造衛星的預報較容易，將來射出如此周期的衛星成功可能性也大。圖 5 是將其一部分用圖表畫出來。

表一 周期和半長徑之關係

n	周 期	半 長 徑 a	平均地上高度
17	84.7 分	6393 km	0 km
16	90.0	6656	260
15	96.0	6948	550
14	102.9	7276	880
13	110.8	7644	1200
12	120.0	8063	1700
11	130.9	8545	2100
10	144.0	9105	2700
9	160.0	9767	3400
8	180.0	10565	4200
7	205.7	11550	5200
6	240.0	12800	6400
5	288.0	14450	8000
4	360.0	16770	10400
3	480.0	20320	14000
2	720.0	26620	20000
1	1440.0	42260	36000

假設人造衛星軌道是完全的圓形，離心率 $e = 0$ ， $r = a$ 繞軌道所需速度可從地球中心的距離 a 和其重力加速 g 之積的平方根 $\sqrt{ag}$ 計算出來。 g 值由軌道高度會變化，

所以在地球表面的重力加速度為 g_0 ，因為 $a = (\text{地球半徑 } R + \text{高度 } h)$ ，所以 $g = R^2 \cdot g_0 \div a$ 。若用此式，圓軌道速度 $V_c = R \sqrt{g_0/a}$ 。這圓形軌道的周期 T ，可從 $2\pi a/V_c$ 求算出。國際天文聯合會 (IAU) 將地球質量和萬有引力常數之相乘積 K 定為地心重力常數， $K = 3.98603 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{秒}^2$ 。若用之，上記的圓形軌道速度 V_c 可用 $\sqrt{K/a}$ ， $T = 2\pi \sqrt{a^3/K}$ 計算出來。所以能知軌道高度 h ，其他都能算出來。

根據以上可知，人造衛星的速度是軌道高度 h 之函數， h 愈大，速度會小。若計算橢圓軌道速度，將 $\sqrt{K/a}$ 置換為 $\sqrt{K(2/r - 1/a)}$ 就可算出。

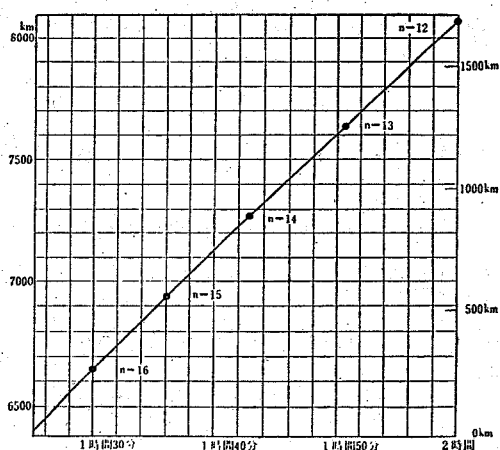


圖 5 周期和半長徑之關係

三、真近點離角和平均近點離角

能知人造衛星的軌道半長徑和離心率，其軌道的大小和形狀就可決定，根據刻卜勒第二和第三法則可知周期和運行速度。那麼如何發現人造衛星在任何時間的位置呢？圖 6 中 O 為地球中心， A 為近地點， B 為遠地點， P 為人造衛星， P 在橢圓軌道 APB 上運行， OP 是動徑 (r)。 OA 是近地點距離 $a(1-e)$ ， OB 是遠地點距離 $a(1+e)$ ， $\angle AOP$ 稱真近點離角 (v)。若離心率為 O 時動徑 (a) 不變化，但真近點離角常以同速增加。設人造衛星的公轉周期為 T ，衛星通過近地點 A 的時刻為 t_0 ，那麼在時刻 t 的真近點離角如下式。

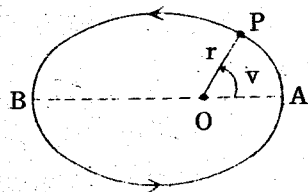


圖 6

$$v = \frac{360^\circ}{T} (t - t_0) \dots \dots \dots (1)$$

如果軌道為橢圓時動徑會變，在近地點 A 時動徑和近地點距離相等，經時間會變大，達遠地點時動徑最大，以後開始減少，經公轉周期 T 時衛星再回到近地點 A (如圖 7)。衛星在近地點附近時速度會快，在遠日點時真近點離角的增加速度變慢。若將運行速度平均，從近地點出發經一周期 T ，以一樣速度從 0° 至 360° 間的增加量稱平均近點

離角 (M)。設近地點通過時刻為 t_0 ，在任意時刻 t 的平均近點離角如下式。

$$M = \frac{360^\circ}{T} (t - t_0) \dots\dots\dots(2)$$

若離心率為 0 (圓軌道) 時，平均近點離角和真近點離角一致。非圓軌道時兩者以近地點和遠地點變相同大小，兩者的差稱中心差 (ΔM)。

$$v - M = \Delta M \dots\dots\dots(3)$$

圖 8 是中心差的圖表，將平均近點離角加中心差等於真近點離角。假設其軌道已知半長徑 a ，離心率為 e 時求算從人造衛星通過近地點，對所經過時間 $t - t_0$ 的動徑 r 和真近點離角 v 的方法如下。

- (1) 先求對軌道半長徑 a 的公轉周期 T ，從圖 5 或表 1 可求出。
- (2) 使用周期 T ，由(2)式計算平均近點離角 M ，若用圖 9，求 M 比較簡單。
- (3) 用 M ，從圖 8 求中心差 ΔM ，加上 M 求出真近點離角 v 。
- (4) 用 M 從圖 7 求 r/a ，然後乘 a ，求動徑 r 。

按大多情形，周期 T 比半長徑 a 容易知道，可用圖 5，從 T 求 a ，然後用(2)(3)(4)順序計算。

【計算例】 1967 年 α —人造衛星一號的軌道，半長徑 $a = 6950$ 公

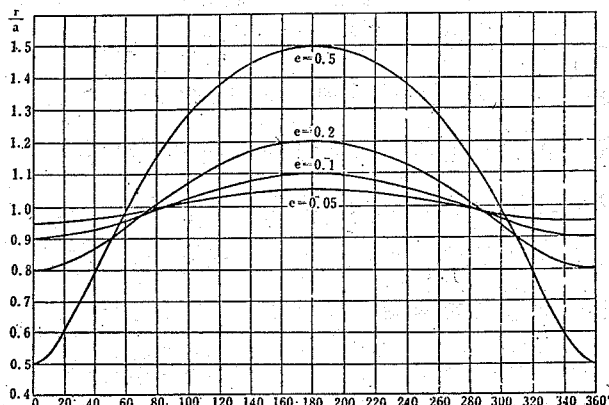


圖 7 r/a 和平均近點離角之關係

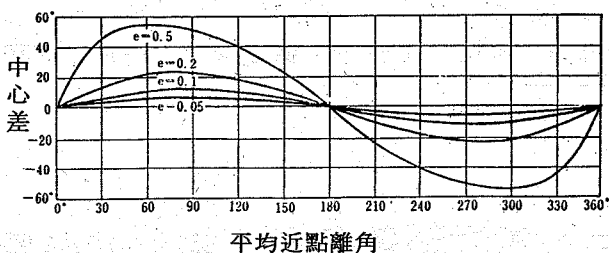
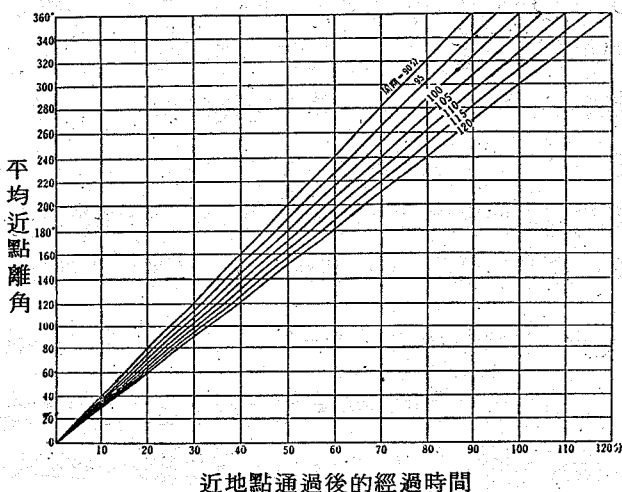


圖 8 中心差



近地點通過後的經過時間

圖 9 平均近點離角

里，離心率 $e=0.05$ ，其通過近地點後 75 分鐘時，試求出其近點離角和動徑之長。

【解答】(1)從圖 5， $T=96.2$ 分。(2)從圖 9 求 $M=280^\circ$ 。(3)從圖 8 求 $\Delta M=-6^\circ$ ，所以 $v=M+\Delta M=280^\circ-6^\circ=274^\circ$ 。(4)從圖 7， $r/a=0.990$ 所以 $r/a \times a=0.990 \times 6950$ 公里 $=6880$ 公里，答：真近點離角 274° ，動徑之長度為 6880 公里。

四、人造衛星的軌道要素

根據上述二三若知軌道半長徑，離心率和近地點通過後的經由時間，就可知軌道內的人造衛星位置。下述軌道對地球的位置決定法。於圖 10 中， O 為地球中心， P 為地球北極， Q 為南極。直線 PQ 為地軸，對 PQ 的垂直平面稱赤道面。赤道面以春分點為方向基準，可測定赤道面內的回轉角度， OA 方向是春分點。為表示對 OA 方向，從 O 發出的任意直線方向，以從 OA 到該直線的自轉方向角度稱赤經。在圖 10 中人造衛星軌道為 CFE 在軌道面上，近地點和遠地點也在軌道面上。人造衛星軌道和赤道面有昇交點 (C) 和降交點。昇交點的赤經 $\angle AOC$ (Ω) 和軌道面對赤道面的傾斜稱軌道傾斜角 (i)，一切可決定。軌道傾斜角在圖 11 中，衛星和地球自轉同方向時比 90° 小，稱順行，和地球自轉相反時稱逆行 (比 90° 大)。若逆行時 i 超 180° 時昇交點就變降交點，降交點變昇交點。

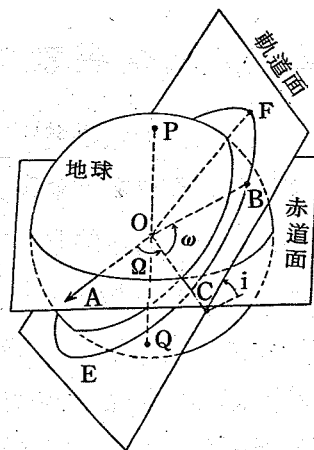
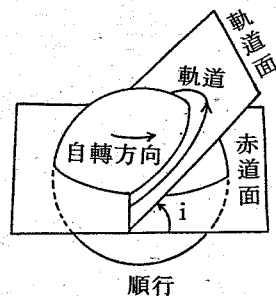


圖 10

若在軌道面內無法決定近地點位置時，軌道方向也無法決定。所以圖 10 中 B 為近地點， $\angle COB$ 稱近地點引數 (ω)，這樣才能完全決定人造衛星的軌道位置。軌道的大小和形狀若知半長徑和離心率可決定，但是人造衛星在軌道上的那一點不清楚。因此要有規定的時刻 (稱元期) 的平均近點離角，近地點引數和昇交點赤經加起來的 (稱於元期的平均經度以 ϵ 表示) 為人造衛星的元期標準。如果是圓形軌道時，於圖 10 中 F 為於元期的人造衛星位置時， $\angle AOC + \angle COF$ 和 ϵ 可一致。

總而言之，要決定人造衛星的軌道和上面的人造衛星



順行

圖 11-1

位置，必需下列六項要素。

(1) 決定軌道面的位置的：①昇交點的赤經 Ω ，②軌道面的對赤道的傾斜角 i 。

(2) 在軌道面內的軌道位置之決定：近地點引數 ω 。

(3) 決定軌道形狀和大小的：①軌道的半長徑 a ，②離心率 e 。

(4) 決定軌道上人造衛星之位置：於元期的平均經度

ε 。

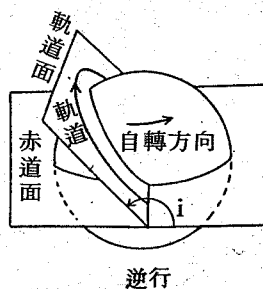


圖 11-2

有了上列六個要素，對任何時刻的人造衛星位置都由刻卜勒三法則可計算，這六個稱軌道要素。

五、人造衛星軌道要素的變化

人造衛星能嚴格遵守刻卜勒法則運行，必要下列三個條件。①地球要完全球狀對稱，②衛星完全沒有空氣阻力，③月球和太陽的引力不作用。這樣軌道要素永久不變，隨時能計算人造衛星的未來位置。可是這三條件都無法滿足，因為軌道要素經時間漸漸會變化，其中月球和太陽引力影響最少。至於空氣的抵抗會使人造衛星的半長徑變小，縮短公轉周期，離心率也愈變小。地球形狀也非完全球狀對稱，因在赤道部分膨大，所以衛星軌道的昇交點會漸漸向西移動， Ω 值漸漸減少，其減少速度和傾斜角 i 及周期 T 有關。傾斜角愈小或周期愈小，其速度愈快。

設周期 90 分左右，傾斜角很小時，其 Ω 的減少速度每天約 8.5° 。圖 13 是將昇交點的後退速度畫成圖表，這是根據下式計算的。

$$-\frac{d\Omega}{dt} = \frac{6\pi}{T} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \Upsilon^2 \cos i$$

上式中 T .. 人造衛星周期， a .. 軌道半長徑， r_0 .. 地球的半徑， $\Upsilon^2 = \frac{C-A}{2mr_0^2} = 0.0005325$

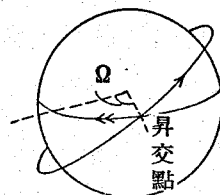


圖 12 昇交點後退
(昇交點向二重矢頭方向移動)

例如周期 96 分，軌道傾斜 65 度時，從圖 13 可知其昇交點的後退速度一日有 3.1° 。近地點引數 ω 在軌道傾斜小時，會向隨時間有增加的方向變化。軌道傾斜 i 變成 0 時，近地點引數 ω 之增加速度變成昇交點赤經 Ω 之減少速度之兩倍。因此昇交點向西移動

，近地點以相等速度向東移動。軌道傾斜 i 變大時近地點的衛星運動很複雜，而且有空氣的阻力影響。人造衛星接近落下時期，離心率變小。根據以上，對人造衛星軌道要素應了解下列三點。

(1) 離心率因受空氣阻力，遠地點距離會很快變小，離心率變小，但是近地點從地表很高時離心率會變大，最後還是變小。如日本的 1957 年 β 第二號衛星離心率為 0.1（可看為 0），近地點位置不定，近地點引數可看做 0。

(2) 人造衛星的軌道傾斜角 i 大致上可看為不變化，若 $i > 90^\circ$ 時是逆行衛星，是稀有。因為發射人造衛星要利用地球自轉速度，一般要向東發射。

(3) 昇交點赤經如圖 13 之速度減少。大致上來說，人造衛星軌道是圓形，軌道要素中會變化的只有 Ω 和 a 而已。 a 和周期 T 相關，所以只有 T 和 Ω 會變化。 a 或 T 的變化主因是超高空的空氣阻力， Ω 之減少由於地球的赤道部分膨大。

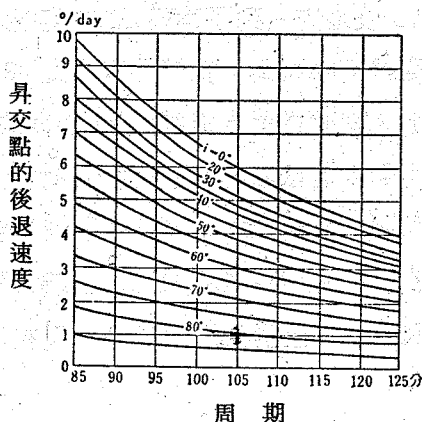


圖 13 昇交點的後退速度

六、人造衛星的速度和軌道

發射人造衛星的國家由其地理位置，要考慮衛星的目的是用途以及火箭性能。為達成理想的軌道，首先發射在赤道上空和地球自轉相同的角速度運行，其軌道是接近真圓的橢圓，稱地球同期軌道或靜止型軌道。高度為赤道上空約 35810 公里，等於地球半徑的 6.6 倍，速度每秒 3.08 公里。在赤道上空有衛星時，隨緯度高漸漸遠離而難觀測，如天線的仰角接近水平，送受信困難。位置於高緯度的蘇俄為了解決這困難，將赤道面和軌道面的傾斜角使 65° ，在南緯 65° ，近地點高度約 600 公里，北緯約 65° ，遠地點高度約 4 萬公里的超橢圓軌道，周期約 12 小時，所以其三分之二以上時間衛星能在北半球上空。若在軌道上不同地方設兩個通信衛星時，蘇俄在其領土內能建立長距離通信體系。

發射地點和方向對軌道有很大影響，普通發射方向和地球自轉同方向，若向相反方向發射時，必需要增加火箭的燃料。飛行中的衛星會受地心引力作用，例如美國從甘乃迪角將衛星向正東發射時，因受地心引力漸漸南下赤道方向，橫過赤道而繼續南下至南

緯 28.5 度地方。到了南緯 28.5 度後北上再橫過赤道至北緯 28.5 度地方。地球在自轉，若衛星不改軌道，就飛行對赤道 28.5 度傾斜角的軌道。如果將衛星軌道投影在世界地圖上，就成為對赤道傾斜 28.5 度的波線。

人類自地球發射到宇宙空間軌道上的人造天體，有人造衛星，月球探測機，太陽和行星探測機。到 1979 年為止，世界各國發射的人造天體在地球軌道上的，有人造衛星 2308 個，月球探測機 69 個，繞太陽的人造行星 7 個，行星探測機 44 個，合計 2428 個。其中一半已從軌道上消失，現在仍留在軌道上還有 1071 個，其中一半是蘇俄發射的。

主要參考書

1. 人工衛星的觀測法：關口直甫（恒星社）。
2. 飛翔體：井戶剛（日本經濟新聞社）。
3. 現代のロケット：井戶剛（岩崎書店）。
4. SSTの科學：井戶剛（日本放送出版協會）。
5. 空港の科學：井戶剛（日本放送出版協會）。