

# 代數的診斷教學

王秀密 整理

國立臺灣師範大學數學系研究助理

## 一、進行診斷教學的時機

在前幾次的演講單元當中，我們已經了解到學生在各單元上的學習困難。當老師的自然會問：「我們要如何來幫助學生呢？」根據學生的學習困難，我們設計了一些有效的教學教案。先在此強調，這只是一個例子而已。在設計教學教案的過程最須注重的一點是——我們要把學生在那一個單元所共同容易犯錯的題目類型給歸類出來，並找到犯這些錯誤的原因。在一般的教學過程中，我們有二次機會可以作診斷教學。第一次是在剛開始教該單元的時候，我們可以設計一些避免學生犯錯的教學。第二次是在進行其他新單元教學時，我們還有機會做一次補救，訂正學生以前所學習的錯誤觀念。

## 二、學生的學習困難（此處以英國學生為例）

(1) 把文字符號視為單字開頭的字母。例如： $5y + 2$ ，由面談中得知學生把 $5y$ 的 $y$ 看成 *yachts*, *yoghurts* 或 *yams* 等等。

(2) 認為不同的文字符號一定代表不同的數。

例如： $L + M + N = L + P + N$  在什麼情形下可能成立？(A)恒成立(B)恒不成立(C)有時成立。

| 答案    | 13 歲 | 15 歲 |
|-------|------|------|
| 答有時成立 | 11 % | 27 % |
| 答恒不成立 | 56 % | 50 % |

(3) 學生看到“+”號的反應就是必須做些運算（do something）。許多學生的

觀念以為數學就是要求出答案，而且認為答案必須是一個數或單項式。

例1 化簡  $2a + 5b$

|            |      |      |
|------------|------|------|
| 答案         | 13 歲 | 15 歲 |
| $2a + 5b$  | 29 % | 51 % |
| $7ab, 8ab$ | 45 % | 34 % |

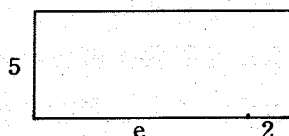
例2 化簡  $2a + 5b + a$

|              |      |      |
|--------------|------|------|
| 答案           | 13 歲 | 15 歲 |
| $3a + 5b$    | 40 % | 66 % |
| $7aab, 8aab$ | 26 % | 17 % |

在許多學生的觀念裏，加法意味著把東西放在一起再數一數。所以化簡  $2a + 5b$ ，就把  $2 + 5 = 7$ ，然後再把  $a, b$  放在一起，於是得到  $7ab$  等等的答案。

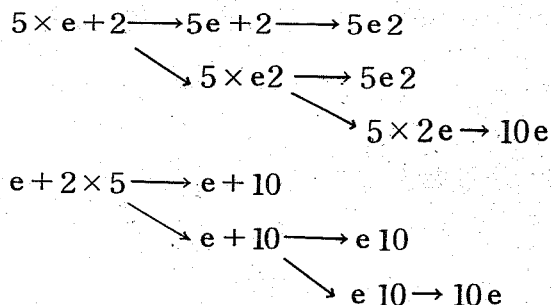
(4) 學生以為括號是可以省略的。認為有無括號所得到的答案都一樣。

例如：求下面這個長方形的面積。



|                           |      |      |
|---------------------------|------|------|
| 答案                        | 13 歲 | 15 歲 |
| 正確                        | 7 %  | 16 % |
| $5e2, 10e$<br>$e10, e+10$ | 42 % | 40 % |

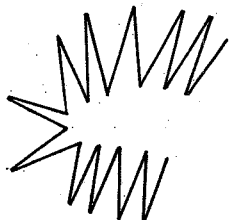
根據面談得知  $5e2, 10e, e10, e+10$  是由下面的過程得到的。



學生認為：總之就是從左邊算到右邊，不管你怎麼算，都是可以得到相同的答案。

(5) 學生在做數學時著重在答案而非方法。

例如：下面這個多邊形只畫出一部分，其他的部分沒有畫出來。如果這個多邊形總共有



$n$  邊，每邊邊長是 2，則這個  $n$  邊多邊形的周長為何？

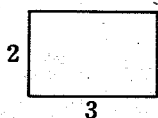
|                 |      |      |
|-----------------|------|------|
| 答案              | 13 歲 | 15 歲 |
| 正確              | 24 % | 41 % |
| 32, 34 ..... 46 | 25 % | 17 % |
| 28              | 11 % | 9 %  |

根據面談得知得到答案為 32, 34, ..... 46 的學生，都是自己把沒有完成的邊數補上去，而根據他們自己所畫的邊數而算出來。而得到答案為 28 的學生則是根據  $n$  在英文字母順序為第 14 個，所以  $14 \times 2 = 28$  算出來的。學生做題目時注意的是得到一個數字的答案，而不是仔細地思考解題的方法。

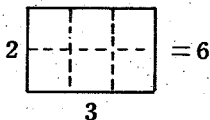
(6) 英國學生做題目較喜歡使用自己的方法。但自己的方法比較沒有一般性。當遇到較困難的題目時就無法推廣。

例如：求下面長方形的面積。

1.



學生方法：畫出格子，數格子。



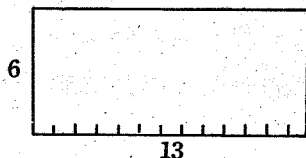
學生解此題尚無問題。

2.



求面積。

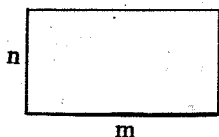
學生方法：



$13 + 13 + 13 + \dots$

解此題只要學生小心計算，可能還是會算對。

3.



但是碰到這種題目，學生就無從算起了。

以上六點是英國中學生初學代數時常見的學習困難。

### 三、處理方法

根據學生的六個學習困難，我們提出了一些處理的目標。

| <u>學習困難</u>         | <u>處理目標</u>            |
|---------------------|------------------------|
| (一) 把文字符號視為單字字首     | ↔ 把文字符號視為變數            |
| (二) 不同的文字符號一定代表不同的數 | ↔ 不同的文字符號可以代表相同的數      |
| (三) 看到 " + " 就合併計算  | ↔ " + " 有不只一種的涵義       |
| (四) 括號可省略           | ↔ 括號不可省，利用計算機得獲得不同的答案。 |
| (五) 注重答案而非方法        | ↔ 應注意思考方法而非答案          |
| (六) 喜歡使用自己的方法       | ↔ 鼓勵他們將自己的方法數學化，以利推廣   |

### 四、教學單元(包括教案方針及內容)

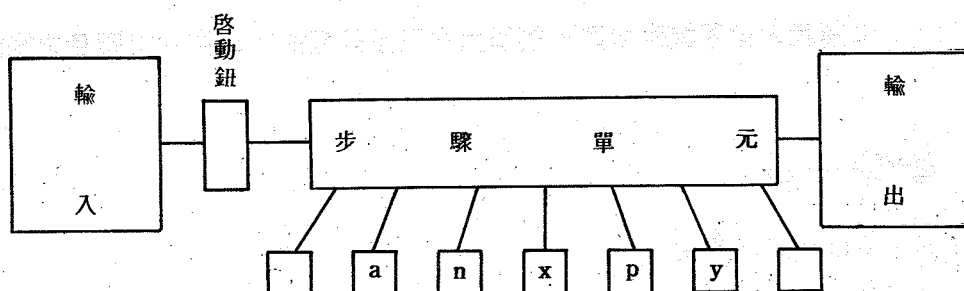
(一) 設計教案必須注重下列四個原則。

- (1) 配合實際情況。
- (2) 希望能教一般規則，用來解決各種不同情況的問題。
- (3) 要注意符號的正確記法，使用括號的必要性。希望能做到把文字符號視為變數，並把重點放在解決的方法上，而非答案。

(4) 在施行教學教案的過程中，要由學生主動參與。讓學生自己選擇文字符號，自己嘗試寫規則。再經由熱烈的討論，增強他們的概念。另外可利用不同的情景，多舉例子來加強學生的印象及區分能力。

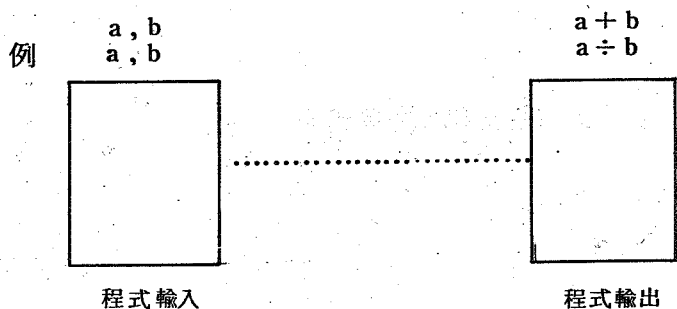
(二) 診斷教案實例

- (1) 數學機器模型



\*製造此機器模型掛圖，掛在黑板上當作學習情景。

方法：為數學機器，盡可能設計不同的程式，輸入後，讓機器處理給定的題目。



第一組：加法

$$a = 2.7 \quad b = 5.82 \quad a + b = 8.52$$

$$a = 5.82 \quad b = 2.7 \quad a + b = 8.52$$

第二組：除法（用電子計算機計算）

$$a = 4 \quad b = 10 \quad a \div b = 0.4$$

$$a = 10 \quad b = 4 \quad a \div b = 2.5$$

由上面可知，加法可調換，除法不可調換。

(2) 教案實例：

例1. 把2.7和5.82加起來。

例2. 4除以10。

例3. 一架火箭每秒走93公里，則17.5秒它可走多少公里？

例4. 把8加上一任意給的數。

例5. 把所給的數二倍。

例6. 把所給的數乘上它本身。

例7. 把所給的任二數乘起來。

例8. 求出長方形的面積。

例9. 求出正方形的面積。

把上面九個例題輸入數學機器模型，讓學生自己設計程式，以體會出題目之間的差異。

## 五、學習引導

請為下面三個問題設計程式

(一) 求三角形的周長。

學生設計的程式

(1)  $a + a + a$

(2)  $p + q + r$

老師利用此機會引導學生討論這兩種程式的差異。

(二) 求長方形的周長。

學生設計的程式

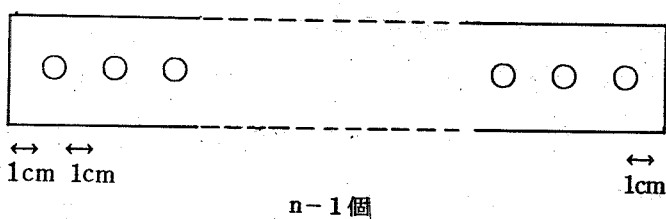
(1)  $a + b + a + b$

(2)  $(2 \times a) + (2 \times b) \rightarrow 2a + 2b$

(3)  $2 \times (a + b) \rightarrow 2(a + b)$

學生自行體會出： $a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$ 的等式關係。

(三) 有一金屬長  $n$  公分，在這個金屬上每隔一公分打一個洞，但二端不打洞，問共打幾個洞？



學生設計的程式：

(1)  $n - 1$

(2)  $1 - n$

老師引導學生辨認  $n - 1$  與  $1 - n$  的差異。

## 六、教學效果

此教案執行時間共六節，每節一小時。部分實驗教學結果如下：

一年級 ( 12 歲 )

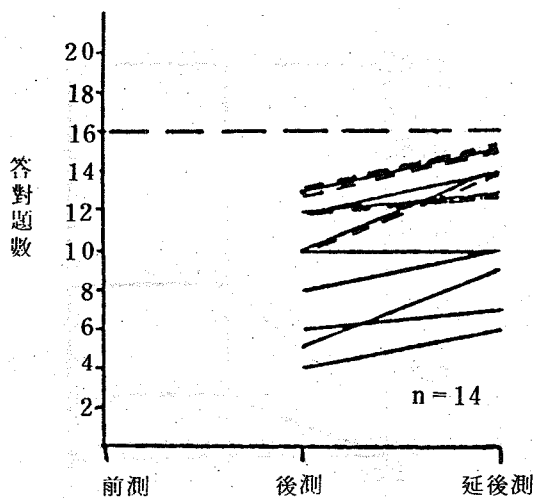


圖 a

二年級 ( 13 歲 )

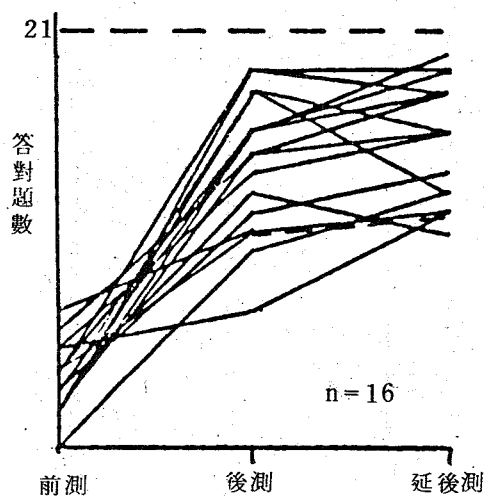


圖 b

三年級 ( 14 歲 )

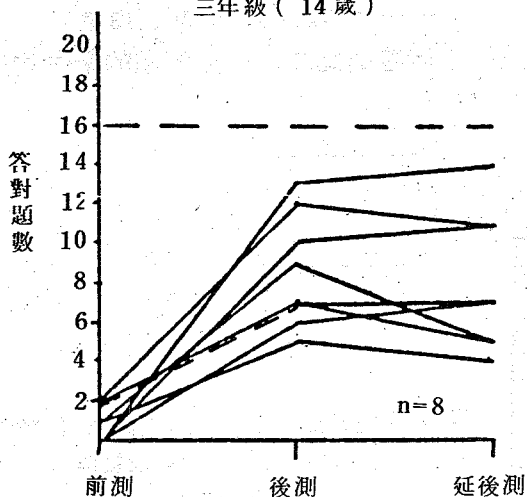


圖 c

四年級 ( 15 歲 )

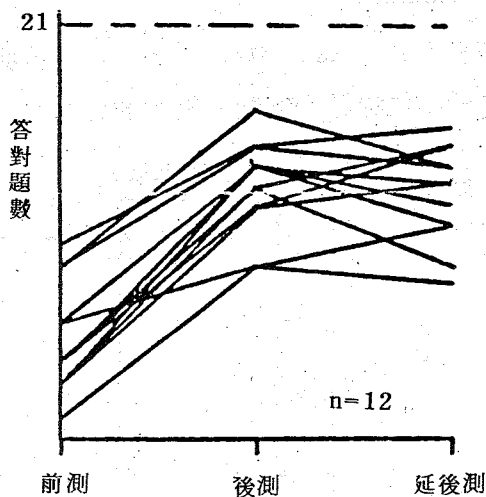
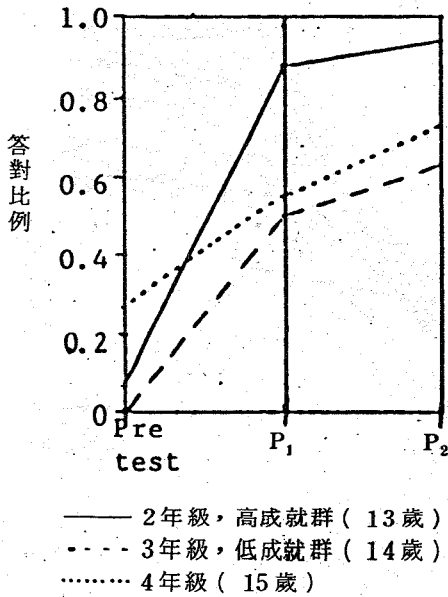


圖 d

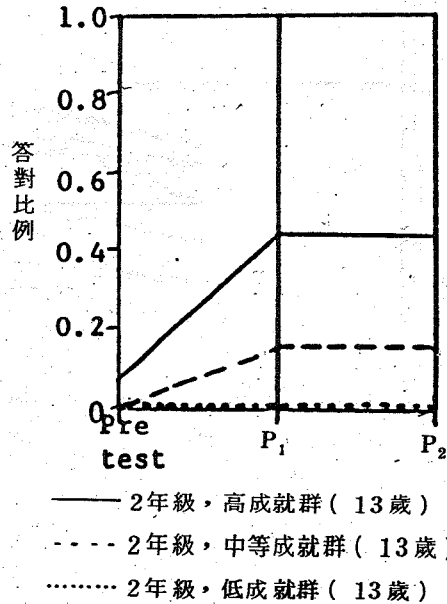
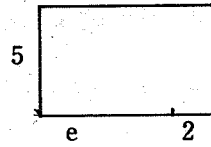
一、二、三、四年級分別有 14, 16, 8, 12 人參加前測、後測、延後測，其答對題數如上圖 a、b、c、d。

一些個別題目，實驗教學後的學生表現。

題目： $n$  邊多邊形每邊長 2 公分，  
則它的周長為何？

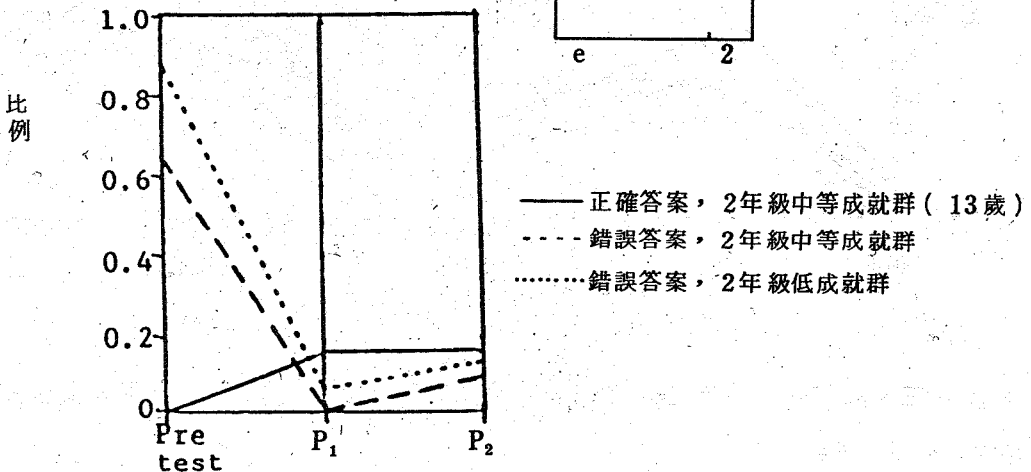
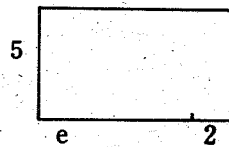


題目：求下面這個圖形的面積。



在前測 (Pretest)、後測 (P<sub>1</sub>)、延後測 (P<sub>2</sub>) 時答對此二形式化問題的學生比例：  
在二個不同的題目之間，組群的比較。

題目：求右邊長方形的面積。

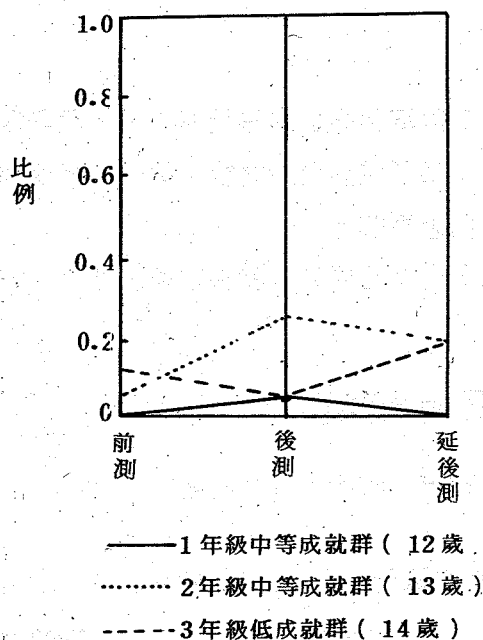
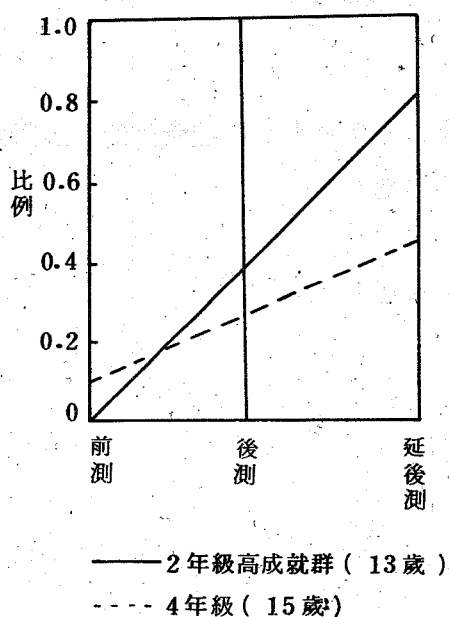




在前測 ( Pretest )、後測 (  $P_1$  )、延後測 (  $P_2$  )時答對及答錯此一形式化問題的學生比例：  
由上面的圖表可以看出正確答案的比例提昇的比較少，而錯誤答案的比例却降低的很大。

題目： $L+M+N=L+P+N$  有沒有可能成立？

(A)恒成立(B)恒不成立(C)有時成立



利用“把文字符號看成一般變數”觀念解題在前測、後測、延後測時答對的學生比例：  
不同的“認知成熟度”組群之間的比較。

參閱資料：algebra : Children's strategies and errors .

author : Lesley R. Booth.