

解方程式的學習困難

張素銘 整理

國立臺灣師範大學數學系研究助理

研究解方程式的了解，可分成幾個部分來看，例如解 $2x + 8 = 4x + 2$ 這樣簡單的方程式，研究者需要探討的問題有：

- (1) 文字符號的了解——檢驗學生對文字符號，像 x 的看法。
- (2) 記號的了解——像等號“ $=$ ”，加號“ $+$ ”的了解。
- (3) 學生自己的解題方法。
- (4) 平衡的觀念。
- (5) 逆運算的觀念。

重點尤其是放在學生在做算術運算時，是否知道式子中的記號代表什麼意義，這和他們是否懂得如何解方程式很相關。我們除了對中學生做研究以外，同樣的也對那些即將出去教書的老師做研究，以了解他們的解題狀況如何？結果發現，對平衡和逆運算觀念較好的老師或學生，對於教或學解方程式也會比較好。

因此，我們知道學生對於解方程式的主要關鍵在於平衡和逆運算，爲了了解學生對於平衡概念的了解狀況，我們做了一個試驗：

師： $10 + 6 = \square$

生：16

師：寫成 $8 + 8$ 可不可以？

生：可以，但不是真的對。

由以上的試驗得知，學生認爲“ $=$ ”的右邊一定就是最後的答案。在上述的面測後，爲了進一步再檢驗學生對於平衡的感覺，繼續面談如下：

師：你說 $10 + 6 = 16$ ，那麼 $3(10 + 6) = ?$

生： $16 + 32$

師：可不可以有其他答案？

生：可以，例如將 32 改寫爲 $20 + 12$ 或 $10 + 22$

上述學生的回答，其實只是仿前面一題將 16 改寫成 $8 + 8$ ，依樣畫葫蘆而已。我們發現學生並非真的了解平衡的概念，也就是說沒有兩邊同時做運算的觀念。在上例中，

左邊乘 3 而學生沒有在右邊直接乘 3 的觀念，反而利用其它運算湊得相同的答案。

接著，我們測驗學生關於逆運算概念的了解狀況，設計了這樣一個活動：

師： $\square + 6 \square = \square$ ，？號要填什麼？

生：減 6

學生的想法是 $\square + 6$ 要得到 $\square$ ，所以一定要減 6，繼續追蹤發現，有些學生可以接受減是加的逆運算；另外一種學生的答案雖然也是減 6，卻不是從逆運算中求得的，而是實際將 $\square$ 代入一個數計算，例如代 $\square = 2$ ， $2 + 6 \square = 8 \square = 2$ ，所以？為減 6。

在面測的過程中，又問這些學生另外一個問題，以檢驗他們乘法的逆運算觀念。

師： $\square \times 6 \square = \square$ ，問？是什麼？

生：減 10

師：為什麼？

生： $\square = 2$ ， $2 \times 6 \square = 2$ ， $12 \square = 2$ ，？為 -10

師：我的意思是不管 $\square$ 是什麼數， $\square \times 6 \square = \square$ 都成立，問？是什麼？

生：……………

學生想了很久，還是沒有辦法求出正確答案，換句話說，這樣的學生沒有除法是乘法的逆運算的觀念及應用能力。

在我們的實驗中得到一個結論，即在算術中對於符號兩邊做平衡運算以及逆運算有概念的學生，在學方程式時學得比較好；而原來在算術上對於兩邊做平衡運算及逆運算沒有學好的學生，在學方程式時就學不好。我們了解他們的學習困難後，在教方程式時，就特別強調這兩種概念，等他們補救上來後，解方程式也就學好了。因此，我們得到一個結論：要學生學好方程式一定要保證學生已經學好平衡和逆運算兩種概念，如果學生在學解方程式時，並未學好這兩種概念，其補救方法就是在教解方程式前，先加強增進這兩種概念了解的教學。

接著的實驗是要看學生對於列方程式求解的了解情況。

師：我在心裡想好一個數，把它加上 17 等於 31，問我想的數是什麼？

這裡我們不以方程式的問法來問。有的學生也不以方程式 $x + 17 = 31$ 求解，而是以如下的過程求解。

生： $17 + 3 = 20 + 10 = 30 + 1 = 31$

$$3 + 10 + 1 = 14$$

所以你想的數是 14

對於解方程式的概念不好的學生，是不是都不會解方程式呢？其實也不盡然，學生也許有自己的解題方法，例如 $x + 2 = 5$ ，學生知道 $3 + 2 = 5$ ，所以 x 就等於 3。另外一種學生利用試誤法，分別代入幾個數做試驗，但是，這祇能解決簡單的問題，例如 $3x + 1 = 7$ 這種方程式。當遇到像 $3x + 1 = 8$ 這樣的問題時，學生如果繼續用試誤法求解，便會發現沒有答案，因為學生不把分數看成數，對於像 $\frac{2x}{3} - 4 = \frac{5 + 3x}{2}$ 較難的問題時，那就更不用說了。

基於以上的一些問題，老師在教學生如何解方程式的過程中，應該了解學生是如何解題的，並問學生為什麼要用這個方法，再告訴他較好的方法，讓學生知道自已的方法不好，而後他才知道為什麼要學老師的方法。

以下數據是對瑞典 16 歲學生所做的一個評量結果：

答對率(%)	
1. $\frac{30}{x} = 6$	82
2. $\frac{14}{x+2} = 2$	58
3. $\frac{4}{x} = 3$	48

第 3 題結構比第 2 題簡易，但答對率反而低，這是因為 1，2 題，試誤法還派得上用場，對於第 3 題，有很多學生回答說沒有答案，因為如果在 1，2 題中是用試誤法解題的，到了第 3 題時，便無法再使用試誤法了。因此，在探討影響方程式難易的因素時，老師應該知道學生可能用來解題的方法，並預測他們的方法可能遇到的困難，在適當的時候教他們一般且較好的解法。

探討學生學習方程式的困難時，我們檢驗出代數學習時，有一個隱藏性的原因，可能造成學習困難，就是學生在做算術運算時，對於算術中的那些關係式並不是真的懂，也就是說學生不會解方程式，除了代數的問題外，也可能是算術上的困難，例如不懂分數的加減法，將這些困難帶到學方程式上，當然就學不好方程式了。因此，我們可以由此得到一點結論，學代數的可能學習困難就是發生在對於算術式子的不了解，光從代數上是看不出來的，可能又能追蹤到小學的數學教學上去了。