

診斷教學的理念

蔡淑貞 整理

國立臺灣師範大學數學系研究助理

上兩次的演講分別討論過學生在分數與四則運算的學習上所可能產生的錯誤與遭遇的困難。了解了這些問題之後，你們可能會問兩個問題：

- (一) 我們怎麼辦呢？
- (二) 這是小學的單元，我將來要教國中，與我無關吧！

壹、兩個問題

現在我們先來談第二個問題。

一、小學的單元，可以不管嗎？

雖然這是小學的單元，但學生在小學的時候不懂，上了國中一樣不懂，絕不會因為換了學校、換了老師而有所改變。所以如果我們認為這些概念很重要，那麼我們得設法教會他們。而且，以前的沒有學會勢必影響到後來新單元的學習，因此這個問題我們不能不管。

二、要管，怎麼管？

現在我們來談第一個問題：我們怎麼辦？面對這件事，我們有好幾種作法，但這些作法的可行性如何呢？現在我們就來逐一討論。

- (1) 責怪小學老師吧！除非我們能把學生送回小學，否則於事無補，但這是不可能的。
- (2) 不理會這件事。學生在小學早已學過分數，就當作他們會吧！但是一旦教新單

元，問題又會再回來，真能一直忽略下去嗎？不可能的。

(3) 等學生自己學會。國中只有三年，等多久？

(4) 再教一次。第一次教已經不懂，再教一次也不見得有效，何況國中有國中的單元，那來的時間重教？

(5) 在新單元中加以補救。我們可以藉着教新單元（例如代數）的時候補救學生在分數與四則運算上的困難。這種作法好處很多：

① 代數是國中的教材，正是我們要教的，所以不會延誤課程。

② 教新單元可以提高學生的學習興趣。

③ 新單元令學生感到是一個新的開始，比較有信心重新出發。

不過，當我們採取這種作法時，必須先了解學生的困難所在，然後才能找到幫助他們的方法。

貳、一般性的教學原則

談到診斷教學，有一點非常重要：診斷教學沒有偏方。別人的教法不一定適合你的情況，我們也不能說在那一種情況下必須採用那一種教法。雖然沒有偏方，但一般性的教學原則總是有的。當我們教數學時，一定要考慮到數學、學生和教學方法三方面，這三方面不僅重要而且彼此關聯。（見下頁表）

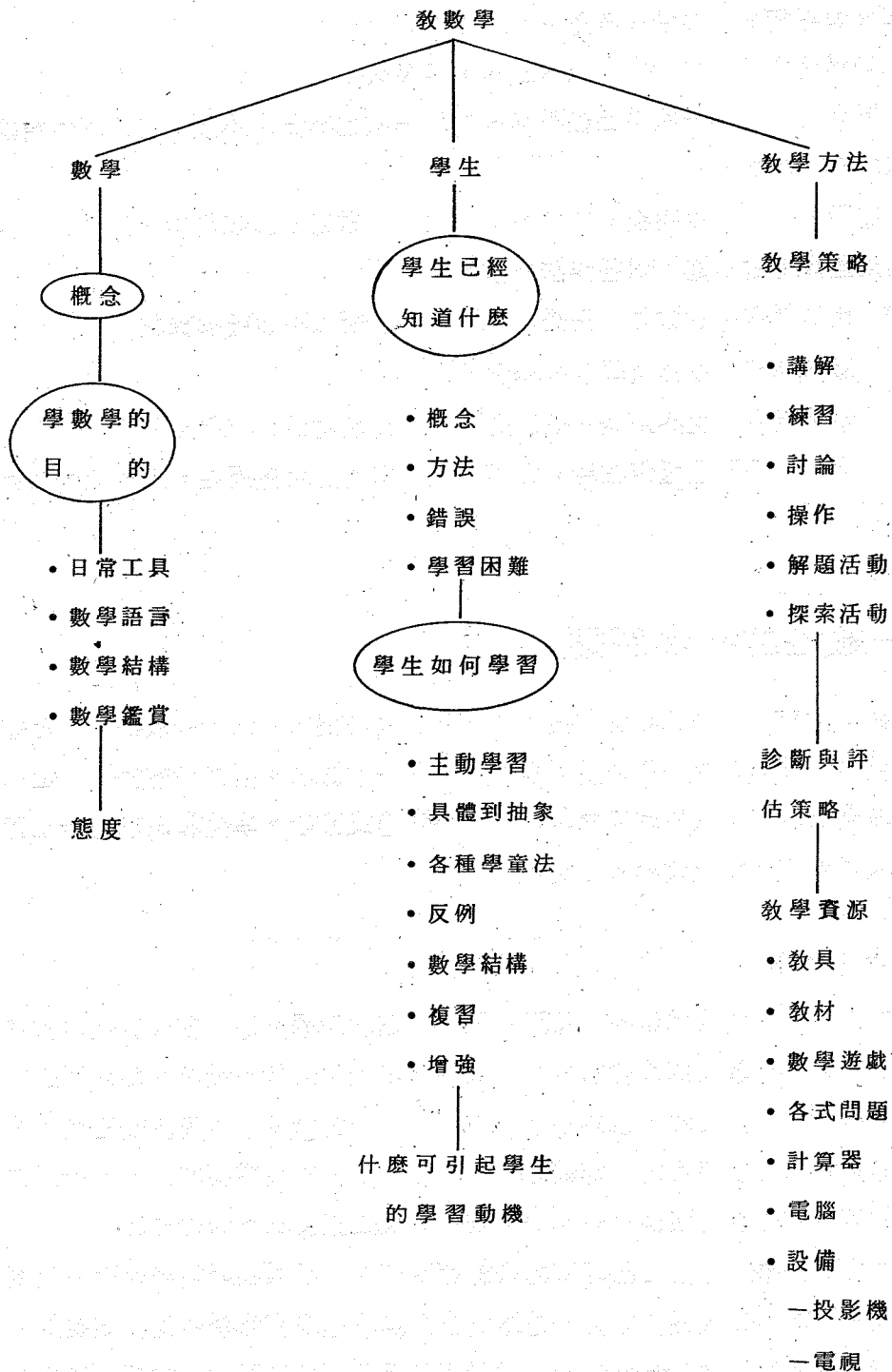
一、教學方法方面

教學方法又可分為教學策略、診斷與評量策略和教學資源。在此我們偏重於教學策略的探討，主要的教學策略大約有六種：講解、練習、討論、操作、解題活動、探索活動。在臺灣通常採取前二種，或許在大班制、教材多的情況下不適合後三種方式，但是有一種策略是絕對可以採用的，那就是討論。討論是一種很重要的方式，好處很多：

(1) 它可以幫助學生澄清概念，避免誤解以及去除模糊不清的想法。

(2) 它有助於學生把過去已經懂的概念關聯起來，因為在討論時學生一定要用已經了解的概念來解釋某些東西。並且，把兩個概念關聯起來在數學中是很重要的。

(3) 當我們讓學生做具體操作時，討論更是重要，如果不討論的話，學生根本不清楚這個活動相關的數學內涵，或許他們只注意到美麗的彩色紙板，而看不到我們期望的數學概念。



(4) 幫助學生發展數學語言。現在我們來看一個有趣的研究，這是在英國做的，對象是小學一、二年級的學生，接受同樣的數學課程，從每班找 6 個學生，每週進行十五分鐘的討論，但這並不是額外的加強，只是討論他們上課的內容，為什麼這樣做，為什麼那樣做。當二年級結束時，對全部的學生做了一項測驗，發現那些參加討論的學生的數學程度比其他學生高出一年。現在或許你們會問，我如何能夠只和 6 個學生討論而不管其他人呢，這確實是個大問題，不過，討論是可以全班進行的。上星期參觀金華國小，有一位二年級的老師以討論方式上課，她的班級很大，有五十個學生，但是照常可以進行討論。討論可以讓學生清楚地思考為什麼這個答案是對的而不只是接受對的答案，對於不太懂的學生，他可以從別人的討論中學到很多。那天他們進行的單元是比較三位數的大小。

師：374，329 那一個比較大？

某生：374 比較大。

師：你怎麼知道？

某生：因為你用 329 減 374 不夠減。

這個學生已經有很好的數學概念，老師應該繼續追問下去，幫助他建立負數的基本概念，可是那個老師並沒有這樣做，非常可惜。再舉一個例子。

師：2 乘 3 是多少？

甲生：5。

師：不對。

乙生：6。

師：很好。

其實對於錯的答案我們也應該追問下去，也許學生可以說出很好的理由。至於對的答案，是否就放它過去？當然不。有一次我問一個孩子四則運算的問題。

師：2 乘 3 是多少？

生：6。

師：很好，為什麼？

生：6 是我的幸運數。

所以不管對或錯的答案都應該繼續討論下去。

二、數學方面

說到教數學，還有一點非常重要，那就是我們是在教學生數學，所以很多數學概念不是我們自己懂了就好，我們必須非常清楚地了解並且能夠分析這些概念。舉個例子來說，分數的概念，我們當然都知道分數是什麼？但在教學時，我們必須清楚所有有關分數概念的想法，並且能夠分析他們。譬如「各部分應該相等」這個想法，當我們提到“部分”時，我們的意思是什麼？每個部分形狀一定須相同？可能大多數的小孩是這個想法。如果是“”這個情況呢？所以假使我們能夠把“相等部分”的意義解釋清楚，學生即使遇到這個情況，也不會搞錯了。如果我問你們，3除以 $\frac{3}{4}$ 是多少？當然大家都會。但是如何跟學生說明為何這樣做？只有我們自己真正了解了這個概念，才能解釋清楚。

另外有一點非常重要，我們為什麼要教數學？如果學生不知道他學數學的目的，可能會造成他學習上的困難，所以我們要讓學生知道他學數學的目的。說到學數學的目的，很多人第一個反應就是數學很有用，當然數學很有用，不過學數學的目的却不只這個。我們知道數學是一種語言，學生也許心裡的想法是對的，但當他用數學語言寫出來卻不對，例如：鉛筆與直尺各2元，請問買4枝鉛筆和5隻直尺共需多少元？

對於這個題目，學生可能寫出這樣的算式： $4 + 5 = 9 \times 2 = 18$ 。所以學會數學語言也是學數學的目的之一。學數學還有一個很重要的目的，那就是了解數學的結構，如果我們光為實用性來教數學，那麼有百分之九十的教材可以丟掉。數學結構是一種相關概念組成的系統，學生要能明白概念間彼此的關聯才能了解結構。

三、學生方面

接下來我們談教學的對象——學生。在這方面主要有兩件事：“學生已經了解了什麼”和“學生如何學習”，至於“學生如何學習”，這個教育心理學上的問題我們以後再談。

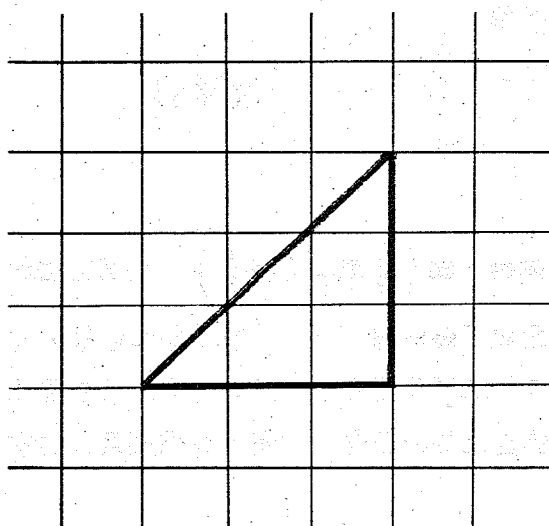
(一) 學生已經了解了什麼？

有關“學生已經了解了什麼”，我們必須知道學生具有什麼樣的概念、用什麼樣的方法、犯什麼樣的錯誤、遭遇什麼樣的困難。不過，今天我們把重點放在學生使用什麼樣的方法上。

(1) 學生的方法

上兩次的演講我們已談過，學生喜歡用他們自己的方法來解題，因此，如果我們不

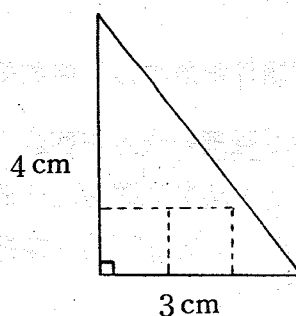
了解學生的方法，可能導致兩種情形：①老師教的是一回事，學生想的是另一回事。②學生無法把老師的方法跟他自己的方法貫通，而學會老師教的方法。也許你們會問：學生既然有自己的方法，何必一定要他們用我們的方法？沒錯，學生的方法是很好，但有其限制，通常只能解些簡單的問題，譬如， $43 - 27$ ，可以用“往上數”的方法從 27 數到 43，但如果是 $3971 - 578$ 也用這方法的話要數到什麼時候？正因為學生的方法有其不足之處，所以我們要幫助他們學會我們教的方法。現在我們來看一個 CSMS 評量的例子：



A

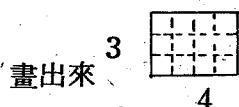
學生答對百分比

	13 歲	14 歲
A	87 %	92 %
B	38 %	47 %



B

同樣是三角形求面積的問題。為何題 A 與題 B 之答對率相差百分之四十之多？因為在題 A 學生可以用他自己的方法——“數格子”，而題 B 則不行。所以我們要幫助學生跨越他們自己的方法，學會用公式求面積。當我們教面積公式時，例如 3×4 ，先把格子



畫出來，教學生數數看，讓他們自己發現規則。但我們一般教公式都講得太快，學生還來不及接受，老師早已講完，而且從不回過頭來增強這些概念，這樣學生怎麼學得會呢？因此，教公式一定要讓學生有充分的時間消化它。

最後我們再來看一個例子，比例的問題。8 人份的湯需要 6 個馬鈴薯，6 人份的湯需要幾個馬鈴薯？

在台灣你們不外教單價法與公式法。

單價法：

8人需要6個

$$\therefore 1 \text{ 人需要 } \frac{6}{8} \left(= \frac{3}{4} \right)$$

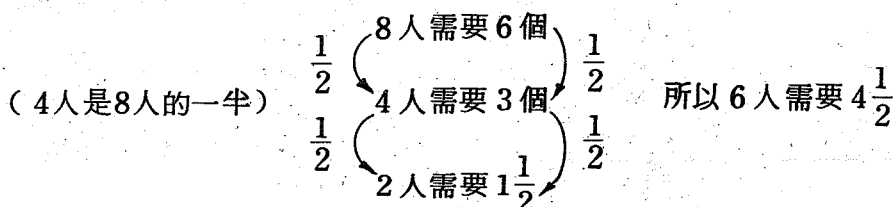
$$\therefore 6 \text{ 人需要 } 6 \times \frac{3}{4} \left(= 4 \frac{1}{2} \right)$$

公式法：

$$8 : 6 = 6 : X$$

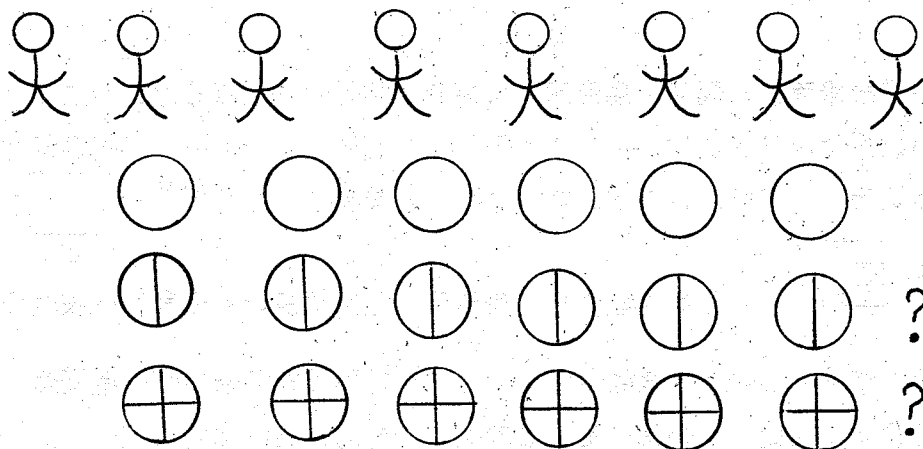
在英國，我們發現大部分的學生不用上述兩種方法，他們通常這樣做：

學生的方法：



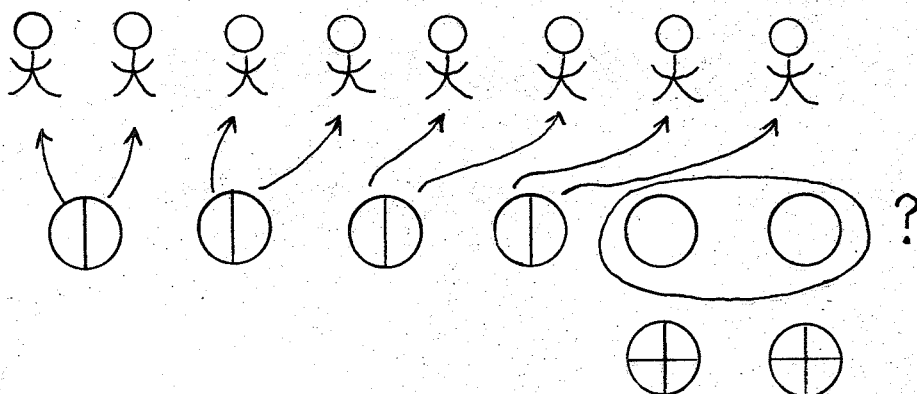
以這個方法解這個題目當然很好，但如果分數複雜一點（ $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{3}{5}$ 而非 $\frac{1}{2}$ ），這個方法就不管用了。現在看看臺灣的學生怎麼做？我們面談了幾個國一學生，有的數學較好，有的較差（學校成績）。結果我們發現那些數學較差的學生是在用老師教的方法時表現比較差，如果用她們自己的方法，則一樣好。她們自己的方法是什麼呢？我們觀察到的有四種：

法(1)



將每個馬鈴薯先分成一半，發現不能整分給8人，所以再切一次，每個分成四分。（每人得到3個 $\frac{1}{4}$ ，6人得到18個 $\frac{1}{4}$ ）

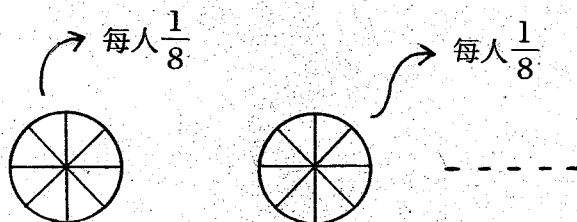
法(2)



將其中 4 個馬鈴薯各切成兩分，平分給 8 人，每人得半個。再將剩下的 2 個各分成四分，平分給 8 人，每人得 $\frac{1}{4}$ 個。所以每人得到 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ，

$$6 \text{ 人得到 } 6 \times \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4 \frac{1}{2}$$

法(3)



將每個馬鈴薯分成 8 分，平分給 8 人，每人得 $\frac{1}{8}$ 個。所以

$$\text{每人得到 } \frac{1}{8} \times 6 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad 6 \text{ 人得到 } 6 \times \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4 \frac{1}{2}$$

法(4)：將 6 個馬鈴薯秤重，把總重量分成 8 分，再取 6 人分的重量。

這些方法都很有意義，也都能求得正確的答案。但這些方法跟我們要教的方法有沒有關係呢？或許跟公式法的關係較不明顯，但跟單價法則同出一轍（只是手法不同），基本想法都是先求每人得到多少，然後再乘以 6。所以當我們了解了學生的想法以後，教比例時，應該先教單價法，而非公式法。這個又令我們想到分數中“5 個人分 3 包巧克力”的問題，英國學生的想法是先把每個巧克力分成 5 等分，然後乘以 3 $\left(3 \times \frac{1}{5}\right)$ ，而非 $3 \div 5$ 。總結一句，當我們教學生時，應該從學生的想法出發，把它跟我們要教給他們的方法結合起來，讓學生一步步走過來。