初等代數的學習困難

張素鎔　整理

國立臺灣師範大學數學系研究助理

壹、初等代數了解的研究

學生對初等代數了解的研究，十年前已經由英國倫敦大學的CSMS研究小組探討過，當時所發現的學習困難，現在看來還是依然存在。當初做這個研究是想要探討下列二件事情：

(1) 代數中基本的文字符號、等號、簡易四則運算等，學生的了解情況如何？

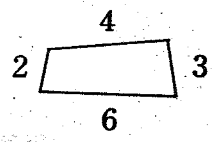
(2) 代數基本概念的了解，對同一年齡群學生，是否可建立了解的層次？如果了解層次存在，以後教學就可以依層次循序漸近來教。

首先我們設定有Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ由易到難四個層次，分別對 13 及 15 歲的學生做測試，原先期望 15 歲的學生集中在第Ⅳ層次的人數會較多，但是根據測試的結果顯示，並不是預期中那麼好，就連達到第Ⅱ、第Ⅲ層次的人數也不是很多，如下表所示：

層　次	13 歲	15 歲
Ⅳ	2%	9%
Ⅲ	15%	31%
Ⅱ	23%	23%
Ⅰ	50%	30%
0	10%	5%

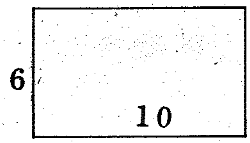
上表中的數據，讓我們想到一些問題，爲什麼學生學不好代數概念，是不是測驗題太難呢？以下是代數第Ⅰ及第Ⅱ層次的題目。

第Ⅰ層次：

1. 

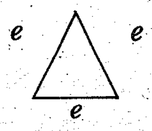
周長＝ ________

2. $a+b=43$；$a+b+2=?$

3. 求矩形 

的面積

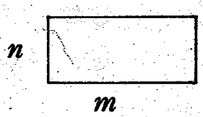
4. $a+5=8$；$a=?$

5. 

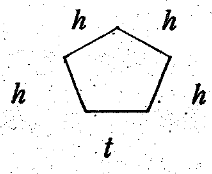
周長＝ ________

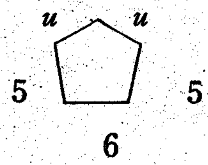
6. $2a+5a=?$

第Ⅱ層次：

1. 求矩形 

的面積

2. 

周長＝？ 

周長＝？

3. $m=3n+1$；$u=4$，$m=?$

4. $u=v+3$；$v=1$，$u=?$

5. $2a+5b+a=?$

這些題目，顯然不是太難，但 13 歲群學生中有 60 ％不會處理第Ⅱ層次以上的問題，15 歲群也有 35 ％不會。這顯示學生本身對代數概念的了解不夠。下面我們將要深入探討這個問題。

貳、初等代數的錯誤分析

一、$2a+5b=7ab$

英國的學校課程，採地方分權制，學生面對不同的老師，不同的教科書，處理代數問題時卻發生很多相同的錯誤。例如：$2a+5b$，在 13 及 15 歲的學生群中，各有 45％及 34％學生的答案是 $7ab$ 或 $8ab$，老師教了幾次以後，這一類的錯誤型態還是存在，因此，我們設想學生必有其理由，認定他們所寫的答案是對的，我們所找到這種錯誤類型的原因有下面三點：

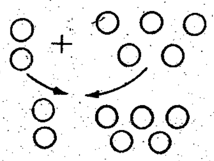
(1) 學生認為數學就是要求答案，而答案通常是“數”如果不是“數”，最好也要是“單項式”，才像答案。$2a+5b$ 不是單項式，不像答案。

(2) 問題可能也出在“＋”號，學生看到“＋”號就認為要做點事情，做了的結果就是 $7ab$ 或 $8ab$。

$2a \oplus 5b$ *doing something*

(3) 學生認為相加就是“合併起來”的意思。把能加的加起來，不能加的就合併擺著，因此會有 $2a+5b=7ab$ 的錯誤型態出現。而學生在過去的學習中確已有將“＋”看成合併的經驗，例如：

①



$$2+\frac{1}{2} \rightarrow 2\frac{1}{2}$$

② $5T+3u=53$ （T＝十位，u＝個位）

$a=3$，則 $5a=53$

這些經驗被轉換至符號的運算。另一個問題也出現相當高比例的此種錯誤型態。

化簡	答案	13 歲	15 歲
$2a+5b+a$	$7aab$	26％	17％
	$8aab$		
	⋮		

在對 15 歲學生面測的經驗裡，也曾發現這樣的問題，例如：

師：$x+y=?$

生：x，y 不可以相加，除非 x，y 是“數”

師：那麼假設 x，y 都是“數”，$x+y=?$

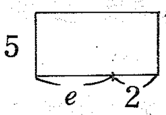
生：$x+y=z$

師：爲什麼？

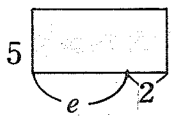
生：兩個數相加是爲另一個數，兩個字母相加便是另一個字母。

由以上這段對話裡，我們發現爲什麼學生常發生的錯誤不容易糾正，因爲他們有很好的理由可以支持他們的想法，因此，也常有一些意想不到的答案出現。

二、$5 \times e + 2 = 5 \times (e + 2)$

又如：求矩形 

的面積問題

求面積	答案	13 歲	15 歲
	$5e2$, $10e$ $e10$, $e+10$	42%	40%

這些學生的演算過程大致如下：

$$5 \times e + 2 \longrightarrow 5e + 2 \longrightarrow 5e2$$
$$\searrow 5 \times e2 \longrightarrow 5e2$$
$$\searrow 5 \times 2e \longrightarrow 10e$$

$$e + 2 \times 5 \longrightarrow e + 10$$
$$\searrow e + 10 \longrightarrow e10$$
$$\searrow e10 \longrightarrow 10e$$

顯然這些學生都知道求面積的方法，但寫出像 $5 \times e + 2$ 這樣求面積的式子，而忽略了括號，進一步又犯了上述處理文字符號的錯誤型態，因而得到 $5e2$，$10e$ 等答案。學生爲什麼會忽略括號呢？分析面測資料，發現原因有三種不同的講法：

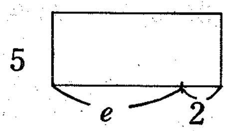
(1)　學生認爲運算式都是從左算到右，所以不必括號。

(2)　從問題的圖中，就知道先後計算的次序。

(3)　運算的結果與次序無關，不必括號。

是不是完全是由於忽略括號，或是學生根本認爲不需要括號，也就是說他們並不了解 $5 \times e + 2$ 不同於 $5 \times (e + 2)$。我們做了進一步的驗證，驗證時，設計一個多重選擇類型的題目，對學生進行檢驗，題目如下：

下圖矩形的面積，如何表示，請選出你認爲正確的表示式：



$5 \times e + 2$

$5 \times (e + 2)$

$10e$

$5 \times e2$

$5(e + 2)$

$e + 2 \times 5$

以上皆非

從學生的選項中，可分辨他們了不了解括號的必要性。

三、文字符號是什麼？

㈠ 單字的起頭字母

下一個探討的問題是記號（*Notation*）問題。

例　　師：在 $5y + 2$ 中，$5y$ 的意思是什麼？

　　　生：$5y$ 可以是 5 *yachts*

　　　　　　　　　　5 *yoghurts*

　　　　　　　　　　5 *yams*

顯然這學生，認爲 $5y$ 中的 y 就是某一起頭 y 的單字的頭一個字母，如果改問學生 $5x$ 是什麼意思，他們便不容易回答，因爲很少單字是以 x 開頭的，在學生的觀念裡，認爲字母代表物品或是一個字的起頭字母，這也是源自經驗的類化；我們通常把 6 *meters* 寫成 6*m*，面積表示成 A（*Area*）$= l$（*length*）$\times b$（*breadth*）時間（*time*）以 t 表示，速度（*Velocity*）以 v 表示等等。

㈡ 特定數

另一個例子是求周長問題

告訴學生上圖是一個 n 邊形，每邊長都是 2，試求其周長，求解時，學生認爲 n 是一個數，但又不知道是多少，於是有人寫出周長 = 28 這樣的答案。想法是 n 是英文字母中

的第 14 個字母，因此認定 $n=14$ ，這種情形在臺灣學生群中不會發生，不過，仍有很多同學是實際將上圖連完而算出 n，因而有 34 ，36 ，…… 48 等不同的答案。

上圖是一個 n 邊形，圖中有些邊沒有畫出來，如果每邊的長都是 2 那麼周長是多少？

答案	13 歲	15 歲
32，34，…，46	25 %	17 %
28	11 %	9 %

接著我們再來看看另一個同樣類型的問題：

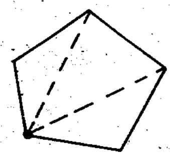
例：在右圖中，欲求一頂點的對角線數，

可以由它的邊數減去 3，如

5 邊形有 2 條對角線

57 邊形有 54 條對角線

那麼 k 邊形有幾條對角線？



根據測試的結果，在 13 歲的學生群中，有 14 %學生的答案是 h，i ，因爲 k 邊形中，一頂點有 $k-3$ 條對角線，而 $k-3$ 的意思就是由 k 往前推算 3 個字母，便得到 h 或 i 的答案，這種情形，在臺灣學生群中也有類似的，例如甲＋ 5 ＝丙，則甲＋ 7 ＝戊。學生的想法是：甲，乙，丙，丁……，好像 1 ，2 ，3 ，4 ，……，甲＋ 7 比甲＋ 5 後兩個，丙後兩個就是戊。學生所以犯這種錯誤，是因爲觀念裡，數學就是求數，一定要找到一個足以代表該文字符號的數，他們才肯定那是答案。

㈢　相同符號代表相同的數

學生有時也會有這樣的觀念：相同符號代表相同的數，不同符號代表不同的數，例如：

師：$L+M+N=L+P+N$ 恒成立？恒不成立？或有時成立？

生：恒不成立

師：爲什麼？

生：因爲 $M \neq P$

$L+M+N=L+P+N$

恒 成 立
恒不成立
有時成立

答案	13 歲	15 歲
恒不成立	56 %	50 %

告訴他M也有可能等於P，學生會疑問既然同一數爲何要用不同的字母表示呢？於是老師又問：

師：那 $y = x$ 的圖形怎麼有意義呢？

生：那是圖形問題，不是代數問題。

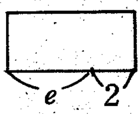
將這個問題再推廣，就可以看出學生，認爲一個字母只代表一個數，而無法看到字母代表某一"範圍"的數，例如 $a + b = b$ ，$a = ?$ $b = ?$ 學生可能想到的是 $a = 1$，$b = 5$，$a = 2$ ，$b = 4$ ，問他可不可能 $a = 3$ ，$b = 3$，回答是否定的，因爲他認爲：(1) a不是b；(2) a 、b 一定是整數，分數不被接受（學生認爲分數不是數）。

綜合前面所講的，學生在學習初等代數的過程中所出現的學習困難可分成三方面：

(一) 學生如何看文字符號的問題，學生將文字符號看成"物"，單字的第一個字母，整數，不同符號代表不同的數。

(二) 記號／制約問題

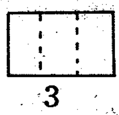
(1) 合併問題：如 $a + b \to ab$

(2) 括號問題：如 5 

求面積時，不認爲需要括號。

(3) 表示的方法：例如在學生的觀念裡，除法就是大數除以小數，所以 $a \div b$ 和 $b \div a$ 都一樣。

(三) 解題過程

(1) 學生用自己的方法處理問題，因此有時很難將代數一般化，例如求 2 

面積時，可用數格子的方法。但遇到求 n 

這樣的面積問題時，學生便沒有辦法算出來。

又如在 

求周長問題中，有的學生使用的方法是 $2 + 2 + 2 + \cdots\cdots$，要他簡記下來，有的學生的答案是 $23 + 23 = 46$ ，就是寫不出 $23 \times 2 = 46$ 這樣一般的式子。換句話說，學生學算術的解題過程，很多沒有辦法一般化到代數來，因此，要看他的學習困難，很可能在算術時就已經出了問題。

(2) 另一個學習困難是學生對於算術式子的了解出了問題。例如，$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 寫成 $\sqrt{5}$ ，那麼 $\sqrt{x} + \sqrt{2x}$ 很自然便寫成 $\sqrt{3x}$，也就是說代數上解題過程的差錯，可能就是處理算術式子的差錯帶來的。