錐線的光學性質

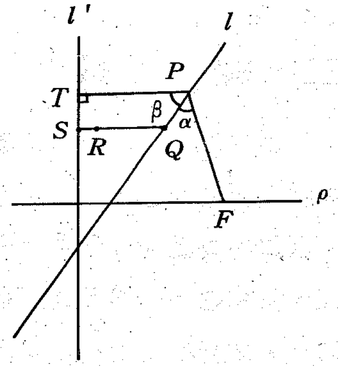
——介紹一個綜合幾何的證明——

葉東進

新竹科學園區實驗高中

新編或原有的高中教材裡都有提到錐線的光學性質這件事，它們的證明一般均採坐標幾何的方式處理，底下將要給出一個採用綜合幾何方式的證明。

一、首先介紹三個幾何性質：



圖一

(1) 平面上，已知兩條不平行的直線 l 與 l'，及不在 l 與 l' 上的定點 F（圖一）。若 l 上的點，除了 P 能滿足：P 到 F 的距離 $\overline{PF}$ 等於 P 到 l' 的垂直距離 $\overline{PT}$ 之外，其他的點 Q 皆滿足：$\overline{QF}$ 大於 Q 到 l' 的垂直距離 $\overline{QS}$，則 $\alpha=\beta$。

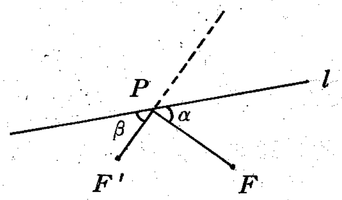
證明：取點 R 為 F 關於 l 之對稱點，則

$$\overline{PR}=\overline{PF}=\overline{PT}$$

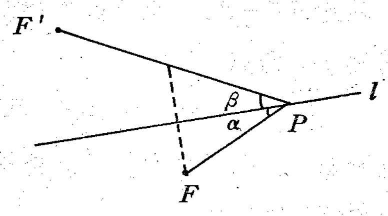
假定 $R\neq T$，則 R 與 P 在 l' 的同側。令 ρ 為經過 F 並與 l' 垂直的直線，過 R 作 l' 的垂直線分別交 l', l 於 S 與 Q，則 $\overline{QS}>\overline{QR}=\overline{QF}$，但是由已知：$\overline{QF}>\overline{QS}$，故 $R=T$，即點 T 是 F 關於 l 的對稱點，所以 $\alpha=\beta$。

(2) 平面上，已知直線 l，及在 l 的同側的兩定點 F 與 F'（圖二）。若點 P 是 l 上使 $\overline{PF}+\overline{PF'}$ 為最小的點，則 $\alpha=\beta$。

(3) 平面上，已知直線 l，及在 l 的異側的兩定點 F 與 F'（圖三）。若點 P 是 l 上使 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|$ 為最大的點，則 $\alpha=\beta$。



圖二



圖三

註：（在(3)中，當F到l的距離等於F'到l的距離，此時，使｜$\overline{PF}-\overline{PF'}$｜為最大的點$P$不存在。）

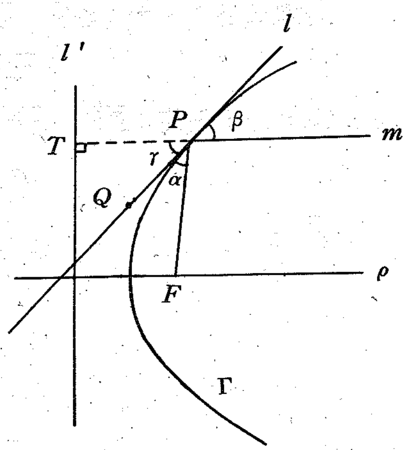
以上(2)與(3)之事實為讀者所熟悉，其證明略去不表。

二、錐線光學性質的證明：

(1) 拋物線的光學性質：

設拋物線Γ的焦點為F，對稱軸為ρ，準線為l'。

若l是過Γ上的點P的切線，且m是以P為始點且平行ρ的射線（圖四），則線段FP與l的銳夾角α等於射線m與l的銳夾角β。



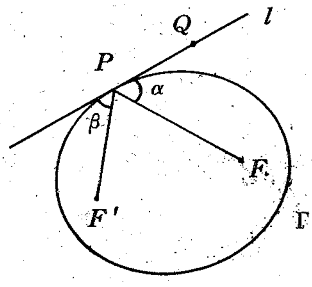
圖四

證明：l既是過Γ上的點P的切線，則l上的點，除P之外，其他的點Q均落在Γ之外；因此$\overline{PF}$等於P到l'的垂直距離$\overline{PT}$，而$\overline{QF}$則大於Q到l'的垂直距離（由拋物線的定義知）。由一之(1)知$\alpha=\gamma$。

但$\gamma=\beta$，故$\alpha=\beta$

(2) 橢圓的光學性質：

設橢圓Γ的焦點為F與F'，若l是過Γ上的點P的切線，則線段FP與l的銳夾角α等於$F'P$與l的銳夾角β。（圖五）



圖五

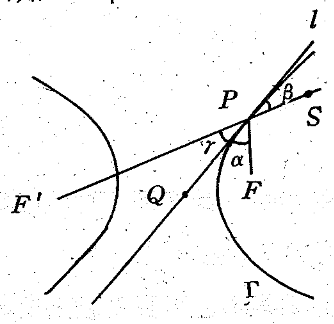
證明：l 既是過 Γ 上的點 P 的切線，則 l 上的點，除 P 之外，其他的點 Q 均落在 Γ 之外；因此 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$（橢圓的長軸長），而 $\overline{QF}+\overline{QF'}>2a$（由橢圓的定義知）。所以

$$\overline{PF}+\overline{PF'}<\overline{QF}+\overline{QF'}\text{，即}$$

點 P 是 l 上使 $\overline{PF}+\overline{PF'}$ 為最小的點，由一之(2)知 $\alpha=\beta$。

(3) 雙曲線的光學性質：

設雙曲線 Γ 的焦點為 F 與 F'，若 l 是過 Γ 上的點 P 的切線，則線段 FP 與 l 的銳夾角 α 等於 $F'P$ 的延線 PS 與 l 的銳夾角 β。（圖六）。



圖六

證明：l 既是過 Γ 上的點 P 的切線，則 l 上的點，除 P 之外，其他的點 Q 均落在 Γ 之外，因此 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$（雙曲線的貫軸長），而 $|\overline{QF}-\overline{QF'}|<2a$（由雙曲線的定義知）。所以

$$|\overline{PF}-\overline{PF'}|>|\overline{QF}-\overline{QF'}|\text{，即}$$

點 P 是 l 上使 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|$ 為最大的點，由一之(3)知

$$\alpha=\gamma\quad,\quad\text{但}\quad\gamma=\beta$$

故 $$\alpha=\beta$$