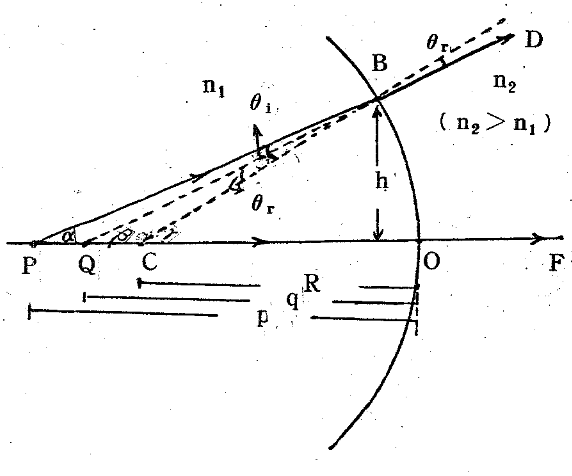
球界面折射成像的研究

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學

一、前　　言

新教材高三物理課程，第三册十四章幾何光學的折射部分，有關第六節球界面折射成像之課文內容裡，編者很粗略地以好幾次近似之觀點，論證球界面之折射成像公式。事實上，翻閱一般大學用普通物理教科書，如Halliday 著之 fundamentals of Physics 等，亦都同樣的可發現下述推導過程。



圖一

見圖一，P 爲點光源，發出一道光射至B點，C爲球心。$\overline{PB}$爲入射線，$\overline{BD}$爲折射線，$\overline{CB}$爲法線。θ_i與θ_r各爲入射角、折射角。另一道光線由P經C點入射於球面之O

點到F。一觀察者由第二介質中同時看到$\overline{BD}$及$\overline{OF}$兩射線來之光線，將以爲此二光線係來自第一介質中的Q點，換言之，點Q係由光源P經球界面折射後所成之虛像。由圖一知

$$\theta_i = \gamma - \alpha \qquad \theta_r = \gamma - \beta \quad \cdots\cdots (1)$$

而司乃耳定律爲 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$ （n_1，n_2表介質的折射率）

在β角甚小時，θ_i，θ_r，α各角均甚微小，可得近似關係如下：

$$n_1 \cdot \theta_i = n_2 \cdot \theta_r \quad \cdots\cdots (2)$$

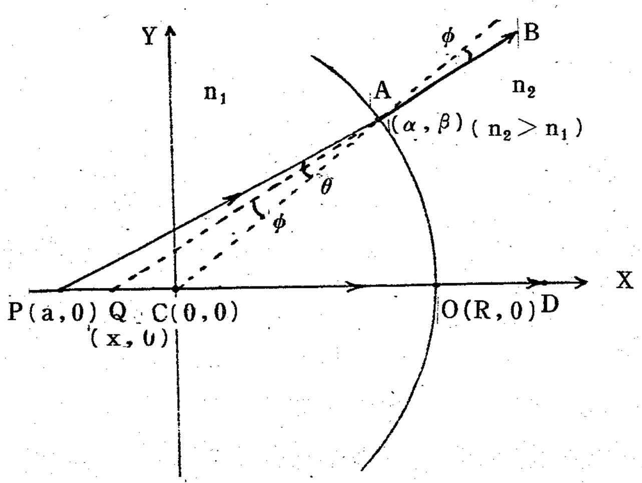
且 $$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{h}{PG} \simeq \frac{h}{PO} = \frac{h}{p\text{（物距）}} ,\quad \beta \simeq \frac{h}{q\text{（像距）}} ,\quad \alpha \simeq \frac{h}{R\text{（半徑）}} \cdots (3)$$

由(1)、(2)、(3)得 $$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad \text{或} \quad \frac{n_2}{q} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \cdots\cdots (4)$$

以上公式(4)是前述的課文內（見P. 41～43），所證的球界面折射成像公式的推導過程。筆者在教學間，覺得這項成像理論，似應可以嚴謹地以細密的數學結構，分析處理之。下文中，筆者將研究得出的結果，詳細地陳述出如何以嚴格的極限、微分等數學概念，來闡釋球界面折射成像的內涵。

二、本　文

以下正文中，將詳細敍述出尋求成像點之推導過程。文中牽涉到解析幾何上的基本知識，性質和物理學上的折射定律、成像原理；筆者嚐試引用比較淺顯直觀的方法，將其統合運用來解釋折射成像點的成像實質，藉以讓讀者理解本文中數學處理的描述要領。



圖二

見圖二，點C爲半徑R的球界面球心，P點爲直徑上的一光點，發出一道光射至A點，$\overline{PA}$爲入射線，$\overline{AB}$爲折射線。θ與ϕ各爲入射角、折射角。另一道光線由P經C入射於球面之O點而達D。一觀察者由第二介質（n_2爲其折射率）中同時看到$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{OD}$兩射線來的光線，將以爲此二光線係來自第一介質n_1中的Q點。此Q點即爲光源P經球界面折射後所成之虛像點。

由圖二之坐標值來看，我們僅要求得直線$\overleftrightarrow{AB}$與X軸的交點$Q(x,0)$的坐標值，即可確定成像點之位置。應用解析幾何的基本性質，令$\overleftrightarrow{PA}$的斜率爲m_1，$\overleftrightarrow{CA}$的斜率爲m_2，$\overleftrightarrow{QAB}$的斜率爲m，由坐標值可得 $m_1=\dfrac{\beta}{\alpha-a}$， $m_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$

由圖二 $$\tan\phi=\frac{m_2-m}{1+m_2\cdot m}\Rightarrow m=\frac{m_2-\tan\phi}{1+m_2\cdot\tan\phi}=\frac{\beta/\alpha-\tan\phi}{1+\beta/\alpha\cdot\tan\phi}$$

$$=\frac{\beta-\alpha\cdot\tan\phi}{\alpha+\beta\cdot\tan\phi}$$

$\overleftrightarrow{QAB}$直線式爲 $$y-\beta=m(x-\alpha)\cdots\cdots(1)$$

$\overleftrightarrow{POD}$（X軸）直線式爲 $$y=0\cdots\cdots(2)$$

解(1)、(2)式聯立方程式，求交點$Q(x,0)$之坐標爲

$$x=\alpha-\frac{\beta}{m}=\alpha-\frac{\beta}{\dfrac{\beta-\alpha\cdot\tan\phi}{\alpha+\beta\cdot\tan\phi}}=\alpha-\frac{\alpha\beta+\beta^2\cdot\tan\phi}{\beta-\alpha\cdot\tan\phi}\cdots\cdots(3)$$

在A點兩介質交界面處，滿足折射定律，故由司乃耳定理得

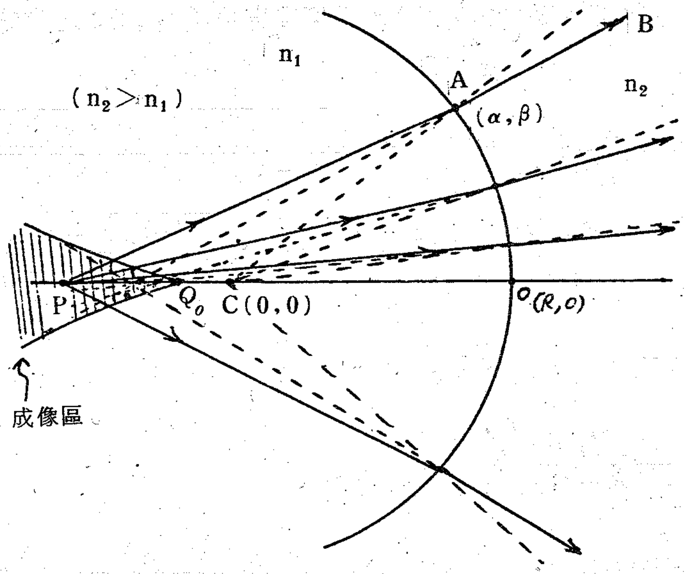
$$n_1\sin\theta=n_2\sin\phi$$

$$\Rightarrow\sin\phi=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta\quad,\quad\cos\phi=\frac{\sqrt{n_2^2-(n_1\sin\theta)^2}}{n_2}$$

$$\therefore\tan\phi=\frac{n_1\cdot\sin\theta}{\sqrt{n_2^2-(n_1\sin\theta)^2}}\cdots\cdots(4)$$

由作圖知，光點P所發出之光線經球界面之圓球面上各點折射所成之像點爲一成像區，見圖三。此一成像集合區具有一最右端點，若將此圓球面只取靠近X軸（即光軸）附近極小區之一片圓弧球面，則經此段圓弧上之點折射所成之像，應都落在最右端點Q_0附近，此點$Q_0(x_I,0)$應即爲球界面光學成像之像點。

當圓弧球面只取靠近光軸附近之極小部分時（即在O點附近），由作圖可知，入射



圖三

角θ應很小，而θ很小時（$\theta \to 0$）

$$\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$$

故由圖三中，令點A(α, β)趨近點O$(R, 0)$則$\alpha \to R$，$\beta \to 0$，$\sin\theta \to \tan\theta$代入(3)式，(4)式中，得

$$\tan\phi = \frac{n_1 \tan\theta}{\sqrt{n_2^2 - (n_1 \tan\theta)^2}} \quad \cdots\cdots(5)$$

但

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha - a}}{1 + \dfrac{\beta}{\alpha - a} \cdot \dfrac{\beta}{\alpha}} = \frac{-a\beta}{\alpha(\alpha - a) + \beta^2} \quad \cdots\cdots(6)$$

將(5)、(6)式代入(3)式中，得

$$x = \alpha - \frac{\alpha\beta\sqrt{n_2^2 - (n_1 \tan\theta)^2} + \beta^2 \cdot n_1 \cdot \tan\theta}{\beta\sqrt{n_2^2 - (n_1 \tan\theta)^2} - \alpha \cdot n_1 \cdot \tan\theta} \quad \text{（再將(6)式代入此式）}$$

$$= \alpha - \frac{\alpha\beta\sqrt{n_2^2 - \left(\dfrac{-a\beta n_1}{\alpha(\alpha - a) + \beta^2}\right)^2} + \beta^2 \cdot n_1 \cdot \dfrac{-a\beta}{\alpha(\alpha - a) + \beta^2}}{\beta\sqrt{n_2^2 - \left(\dfrac{-\alpha\beta n_1}{\alpha(\alpha - a) + \beta_2}\right)^2} - \alpha \cdot n_1 \cdot \dfrac{-a\beta}{\alpha(\alpha - a) + \beta^2}}$$

$$= \alpha - \frac{\alpha\sqrt{n_2^2 \cdot [\alpha(\alpha - a) + \beta^2]^2 - a^2\beta^2 n_1^2} - a n_1 \beta^2}{\sqrt{n_2^2 \cdot [\alpha(\alpha - a) + \beta^2]^2 - a^2\beta^2 n_1^2} + a\alpha n_1}$$

現在要找出點$Q_0(x_I, 0)$之坐標值：

只要令點A(α, β)趨近於點O(R, 0)，即可求得$Q_0(x_I, 0)$之坐標值。因此，令

$$\alpha \to R \quad , \quad \beta \to 0$$

則

$$x_I = \lim_{\substack{\alpha\to R\\ \beta\to 0}} x = \lim_{\substack{\alpha\to R\\ \beta\to 0}} \left\{ \alpha - \frac{\alpha\sqrt{n_2^2\cdot[\alpha(\alpha-a)+\beta^2]^2 - a^2\beta^2 n_1^2} - a n_1 \beta^2}{\sqrt{n_2^2\cdot[\alpha(\alpha-a)+\beta^2]^2 - a^2\beta^2 n_1^2} + a\alpha n_1} \right\}$$

$$= \lim_{\beta\to 0} \left\{ R - \frac{R\sqrt{n_2^2\cdot[R(R-a)+\beta^2]^2 - a^2\beta^2 n_1^2} - a x_1 \beta^2}{\sqrt{n_2^2\cdot[R(R-a)+\beta^2]^2 - a^2\beta^2 n_1^2} + a R n_1} \right\}$$

$$= R - \frac{R\cdot n_2\cdot R(R-a)}{n_2\cdot R(R-a) + a R n_1}$$

$$= R - \frac{n_2 R(R-a)}{n_2(R-a) + a n_1}$$

球界面折射的成像點$Q_0(x_I, 0) = Q_0\left(R - \dfrac{n_2 R(R-a)}{n_2(R-a)+a n_1}, 0\right)$找到了。接下來，要尋求折射成像公式。

由圖三、四，令像點Q_0到O點距離爲像距q($q>0$)，P點到O點距離爲物距p($p>0$)，則

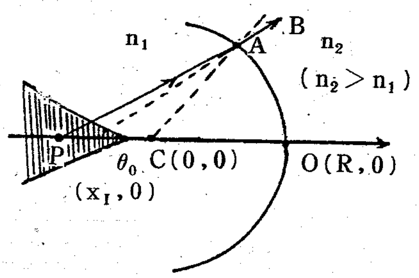
$$q = R - x_I = \frac{n_2 R(R-a)}{n_2(R-a)+a n_1} \quad , \quad p = R - a \quad (a<0)$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{q} = \frac{n_2(R-a)+a n_1}{R(R-a)} = \frac{n_2\cdot p + n_1\cdot(R-P)}{R\cdot p} \quad (\because a = R-p)$$

$$= \frac{n_2}{R} + \frac{n_1}{p} - \frac{n_1}{R} = -\frac{n_1-n_2}{R} + \frac{n_1}{p}$$

$$\therefore \frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1-n_2}{R} \quad 或 \quad \frac{n_2}{q} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2-n_1}{R} \quad 論證完成。$$

以上的論證，筆者把球界面折射成像的實際過程，完全以嚴格的數學觀點，配合球界面成像的物理基本性質，綜合推導而得折射成像公式。全文敘述之過程中，在觀念上可讓讀者完整地洞察光線如何經由兩不同介質間之球界面折射交會而成像。在數學方法之運作上，亦可使讀者理解極限之應用，在本文的主要目的。



圖四

三、結　　論

作者查閱有關物理學── 幾何光學部分的參考書籍，發覺大部分課文中，尋求折射成像公式的過程，都是藉助於平面幾何之作圖近似法而得。而本文却是完全以純數學之觀點，以平面解析幾何理論，應用折射定律之成像本質驗證折射成像公式，實爲一新的嚐試。當然直觀方法之應用，在本文中亦佔着重要地位。

由成像點之推導，至極限之應用，乃是藉助於幾何鏡面之實質成像性質引發而起；蓋吾人盡知，球面鏡的取材只能限於鏡心附近曲度極小的一片球面區，此一小片球面區的折射光線始能交會於成像點。如果以曲度大的球界面爲折射面，可發現（由作圖四）其成像點是一片廣大的區域，顯然此片成像區域將會使成像的效果減低，而造成像的分散、變形、扭曲等現象，謂之透鏡的球面像差。取極限的目的，即要減小光軸附近之透鏡鏡面，來減少像差之現象。

本文爲作者課餘研究心得，目的乃在於說明此項成像理論之嚴密性，具有實質之數學形式與結構。何況，現今高三學生的數學概念亦已學完極限、微分等重要數學架構，讓他們在剛完成這段數學課程時，以純欣賞之觀點來閱讀這份研究內容，將有助於增加對學習科學之興趣和學生學習的效果。

行文中恐有錯失，管見疏漏之處，尙望高明不吝指正！

四、參考資料

1. 實驗本高中數學第四册，實驗教材編輯組。
2. 高級中學物理學第三册，師大科教中心主編。
3. Fundamentals of Physics, Halliday 等著。
4. Physics , Chap. 27. Wave Geometry, lense refraction. Marcelo Alonso & Edword J. Finn.
5. Fundamentals of Optics. Francis A. Jenkins. Harvey E. White.
6. Introduction to Modern Optics. Grant R. Fowles.
7. 光學與光學儀器，潘家寅譯，徐氏基金會出版。