

傅米問題^(註1)

Joan Ross 著
Marc Ross

黃敏晃 譯
國立臺灣大學數學系
黃素華

臺灣省國民學校教師研習會數學小組

一、前言

著名的物理學家傅米(Enrico Fermi, 1901~1954)常提出一些問題,使他的聽眾覺得新奇有趣,甚至於震驚。一個受歡迎的傅米問題是:「芝加哥市^(註2)到底有多少鋼琴調音師(piano tuner)?」

傅米問題的精彩之處在於,見識過這類問題的老手在經過一系列的估測(estimated)過程後,就能近似地(approximately)解出此問題。但是,大部分初次接觸到此類問題的人,會直接反應道:「若不根據一些參考資料,根本不可能解出此問題。」然而,這些人却可以被引導着一步步走向解題的終點,其中的每一步都是單純的,而且只應用到最普通的常識以及一些數值,這些數值又是一般人所熟知的,或是透過對一些直接觀察的回憶就可以用估測方式得到。

傅米以及其後繼續着此一傳統的許多物理學家,利用這類問題提出了教育意義深遠的論點:「解題的能力(problem solving ability)並不會因為沒有完整資料的條件而受到限制,不能善用手頭已有的資料才是解題能力差的關鍵所在。」許多物理學家及電腦

註1 本文譯自美國數學教師協會(NCTM)出版的1986年Year book, Estimation and Mental Calculation, P. 175~181. 原文題目為Fermi Problem or How to Make the Most of What You Already Know。——譯者。

註2 傅米生前任教於芝加哥大學,他的聽眾也熟知芝加哥市,故選用此市。引用此問題者可以改用其他大城市。

科學家，似乎很容易地轉變成為解傅米問題的高手。由此可見解這類問題所需要的能力和態度，與物理界、資訊界及數學界中所要求的能力是息息相關的。也許，現在正是數學老師帶著學生一起來注意傅米問題，並講究其解決之道的時候。

在這篇文章中，我們將分析兩則傅米問題。在這兩個回合中，我們都先提出問題，此時讀者可以嘗試他自己的解法與估測。然後，我們才提出兩個不同的公式來解此問題，由此我們可以得到不同的估測（這裡再度邀請讀者試用自己的估測值，代入公式中以算出最後的答數。記住，這些估測值都是一般熟知的資料）。最後，我們提出我們使用的估測值，與求得這些數值的方法，以及最後的結果。

二、爆米花問題

本題是由 Pamela Ames 當作故事告訴我們的，她當時是芝加哥大學附屬實驗學校的老師。她的班級在學習公制單位的實測時，不知怎麼搞的，竟然會興起了爆出 1 立方公尺爆米花的念頭。相關的傅米問題是

1 立方公尺的爆米花要用到多少玉米仁？

由於問題很有趣，不但她的班級，全校的每一班都在爆玉米花。這個問題的困難度，使她們全校工作了一星期之久，才解決了此問題。請讀者先想想，是否能解決此問題，然後再看下文。

公式 1

$$\begin{aligned}\text{玉米仁的數目} &= \frac{1 \text{ 立方公尺中的立方公分數}}{\text{一粒玉米花的立方公分數}} \\ &= \frac{10^6}{(\text{玉米花直徑的公分數})^3}\end{aligned}$$

注意，由於玉米花的直徑在上式中以立方的形式出現，故它的估測值應該比更低次出現的數量的估測值更加準確才行。

公式 2

$$\text{玉米仁的數目} = (\text{2 湯匙所裝的玉米仁數量}) \times \frac{1 \text{ 立方公尺}}{1 \text{ 公升}}$$

要了解此公式，你必須知道（如同喜愛玉米花的本文作者一樣）2 湯匙的玉米仁，剛好可以爆出 1 公升的玉米花。

估測

1. 玉米花的直徑我們估測為 1.5 公分。由此估測出來的玉米仁的數目約為

$$\frac{10^6}{(1.5)^3} \approx \frac{10^6}{3.5} \approx 3 \times 10^5。$$

2. 我們估測 1 湯匙中約有 120 個玉米仁（理由見下文；直接測量此數量並非難事，但這種作法並不合乎傅米問題的精神。這裡我們並不是反對學生作實測，我們只想強調傅米的解題精神）。由此估測出來的玉米仁數目約為 $240 \times 10^3 \approx 2 \times 10^5$ 。

你可能會說，你無法估測一湯匙可裝多少玉米仁。這裡給你一個建議，當你感到特別無法確定時是滿管用的：估計其上限與下限，然後取兩者的幾何平均值。譬如在本例中，一湯匙至少可以裝多少玉米仁？想像一湯匙有多大，然後想像把玉米仁放進去。你知道一湯匙能裝的玉米仁比 10 個要多很多，20 個呢？假定你不很確定超過 30 個能裝進一湯匙，所以取 30 為下限。利用同樣的技巧，假定你取上限為 500（你從一個大數目開始想起，例如你知道 800 個玉米仁裝不進一湯匙內，然後把數目往下降，700 呢？600 呢？如降到 500 時你已經無法確定，你就取 500 為你的上限），則這兩數的幾何平均數為

$$\sqrt{30 \times 500} \approx 120$$

（這剛好是一個絕佳的估測值）。這似乎有點奇怪，只知道其數量在 30 與 500 之間（想想看，其差異實在甚大）這樣泛泛的資訊，竟然是一件強而有力的估測資料。這就是為什麼我們要取幾何平均數的原因了：它把錯誤的最大百分比減到最低。

三、間奏曲

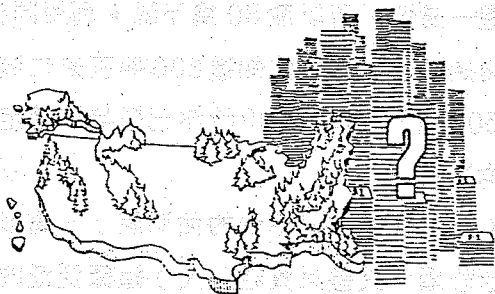
本文的兩位作者中，一位在數學界，另一位在物理界服務。數學家很能理解到，上述的粗糙計算會使許多讀者感到反胃，對此也寄以無限的同情。事實上，當我們在解一個數學問題時，若我們由一種方法算出的答數為 3×10^5 ，而用另一方法算出 2×10^5 ，我們會感到苦惱不堪！然而，在解傅米問題的範疇內，我們會為這兩個答數之一致性而歡欣鼓舞。難道這不正是估測的本質嗎？在現實世界中，你所需要知道的數量大小，很多時候只不過是大小等級（order of magnitude）的分類估測罷了。譬如說，報紙上充滿了許多數據，這些數據常是錯誤的，有時候差上千倍之多（報上寫百萬時，常應該是十億）。習慣於解傅米問題的老手，對於數量的大小等級是很敏感的，他能一眼就看出，這些數據是合理的估測，或是荒謬的胡猜。這也算是解傅米問題的一種好處吧！

讓我們看看把傅米問題放在數學教材中的其他好處吧！讀者不難注意到，傅米問題中牽涉到許多傳統數學教材中的數量，如面積、體積、百分率等隨時隨地都會冒出來。另外，我們不斷地涉及各種單位與單位的換算。有時候，用公制單位較為適當，但有時候英制單位則更為有用（因為我們目前的社會裡提供的許多基本資料用到兩種制度）。

下一個問題比第一個問題更複雜，更困難。你看到該問題時的自然反應可能是：「老天！我（或我的學生）怎麼可能解出這道題！」千萬不要失去信心，你（和你的學生）一定解得出來的。只要肯練習去想，加上態度的改變——肯接受一些不乾淨俐落的估測數值作為答數的意願——你就能加以保證！

四、美金森林問題

作者中的一位最近參加了密西根州的數學教師協會的一次討論會。會中有人提到美國聯邦政府的預算，已經需要用科學記數法才記得清楚了。有位聽眾反應說：有人告訴她，如果把全美國的樹都砍掉，把得到的木材製成一元紙幣，得到的錢數相當於美國聯邦政府 1984 年的預算。相關的傅米問題是



美國所有的樹木能製成多少 1 元紙幣？

基本公式

紙幣數 = (美國所有樹木的磅數) × (一磅木材能製成的 1 元紙幣數)

我們提出下列的兩種方法來求出美國所有樹木的磅數。

公式 1

(美國所有樹木的木材磅數) = (美國所有的樹木數) × (每棵樹的平均木材磅數)

公式 2

$$\left(\begin{array}{c} \text{美國所有樹木} \\ \text{的木材磅數} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{美國每年用於製} \\ \text{紙的木材磅數} \end{array} \right) \div \left(\begin{array}{c} \text{美國每年用於製紙的} \\ \text{木材所佔的百分率} \end{array} \right)$$

估測

這個複雜的問題顯示出解傅米問題時的遞迴本質，即我們列出的基本公式中用到的兩個數量，又變成了傅米子題。當然，我們在設法解決這樣複雜問題的時候，一定得謹

記傳米問題的特性，即公式中每一個涉及的數量都必須用估測方式得到。

首先我們要來處理每磅木材能製成的 1 元美金的紙幣數量，我們不妨假定 1 磅的木材可以製成 1 磅的紙（這是一種估測，這裡與下面都用到此項假定）。現在讓我們回想一下關於紙的重量的知識，我們知道些什麼？我們每個人都有寄信的經驗，如果你寫了五頁典型的信紙，這封信大概還不致於超重。所以，我們估測五頁典型的信紙重約 1 兩（超過 1 兩的信要加郵資）。有了這項基本資料後，我們就可以使用下面的公式：

$$(\text{一磅重的 1 元紙幣數}) = (\text{一磅重的典型信紙數}) \times \frac{(\text{典型信紙的面積})}{(1 \text{ 元美金的面積})}$$

把一張典型的信紙裁成一元美金大小的紙張，大概可以裁成幾張呢？我們的估測是 6 張。如上段所述，五張典型信紙約為 1 兩，則 1 磅（= 16 兩）重的典型信紙約有 $16 \times 5 = 80$ 張。所以，一磅重的 1 元紙幣數約為 6×80 或 500 張（這個數量當然可以用實測的方式得到，但要注意用新幣，且得到的數量與我們估測的數量會有出入，但其大小的等級應該與 500 差不多才對）。

現在我們來求美國所有樹木的木材磅數，我們先利用公式 1 來求此數量，然後再用公式 2 求此數量。

1. **利用公式 1 的估測：**我們要估測出美國所有的樹木數，以及每棵樹的平均木材磅數。對於前者，我們使用下列的公式：

$$(\text{美國所有的樹木數}) = (\text{美國森林的總面積}) \times (\text{單位面積內種植的樹木數})$$

我們估測美國的森林面積如下：美國的面積約為 1000 哩 $\times$ 3000 哩，而森林面積佔全國面積的 0.05 與 0.5 之間。取上述兩數的幾何平均數，得 $\sqrt{0.05 \times 0.5} \approx 0.15$ 。由此得到美國森林總面積的估測值

$$\begin{aligned} \text{美國森林總面積} &\approx 3 \times 10^6 \times 0.15 \text{ (哩}^2\text{)} \\ &\approx 5 \times 10^5 \text{ (哩}^2\text{)} \end{aligned}$$

單位面積內平均種有幾棵樹呢？此數量大概是兩棵樹之間的平均距離平方的倒數。我們取兩棵樹之間的距離為 30 呎（此數值為 100 呎與 10 呎的幾何平均數），因此得到下列的估測

$$(\text{單位面積內種植的樹木數}) \approx \frac{1}{(30)^2} \text{ (棵/呎}^2\text{)}$$

$$\approx \left(\frac{5280}{30} \right)^2 \text{ (棵/哩}^2\text{)}$$

$$\approx 3 \times 10^4 \text{ (棵/哩}^2\text{)}$$

所以，
$$\begin{aligned}(\text{美國所有的樹木數}) &\approx 5 \times 10^5 \times 3 \times 10^4 (\text{棵}) \\ &\approx 1.5 \times 10^{10} (\text{棵})\end{aligned}$$

現在，我們要對每棵樹的平均木材磅數加以估測。我們估測樹木的平均高度約為 50 呎，而樹幹的平均直徑約為 1 呎，故得下列之估測值

$$(\text{每棵樹的平均木材體積}) \approx \frac{\pi \times 50}{4} \text{呎}^3$$

但是，1 呎³的木材有多重呢？我們知道木材比水輕，但輕不了多少。1 呎³的水多重？作者中的物理學家知道，1 呎³約為 60 磅（註 3）。木材比水輕一些，就以 1 呎³約為 50 磅計算吧！由此可得

$$(\text{每棵樹的平均木材磅數}) \approx \frac{\pi \times 50}{4} \times 50 \approx 2 \times 10^3 (\text{磅})$$

現在，讓我們把估測出來的數據，代入基本公式中，求出最後所要求的估測值如下：

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{l} \text{美國所有樹木能製成} \\ \text{的 1 元美金的張數} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{l} \text{美國所有} \\ \text{的樹木數} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{每棵樹的平} \\ \text{均木材磅數} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{1 磅重的 1} \\ \text{元紙幣數} \end{array} \right) \\ &\approx (1.5 \times 10^{10}) \times (2 \times 10^3) \times 500 \\ &\approx 1.5 \times 10^{16} (\text{張或元})\end{aligned}$$

經過查訊知道，美國聯邦政府的 1984 年預算為 8×10^9 元。所以，事情並不像我們所擔憂的那麼糟糕。

2. 利用公式 2 的估測：在這裡，我們要估測美國每年所用的紙張磅數，以及每年用於製紙的木材佔全美國總木材數的百分率。我們用什麼方式估測上述的第一個數量呢？如果把此數量除以美國的總人口數，不是很接近美國人每人每年的平均用紙量嗎？是的，這應該是很好的估測。但是，我們知道每人每年的平均用紙量嗎？每人每月，或每週，或每日的用紙量呢？根據直接的觀察，我們相信每人每天用掉 1 磅的紙（在一個三口之家，每週的廢紙量淨重約 20 磅，（註 4））。由此得到下列的估測（美國總人口數約為 230 百萬）：

$$(\text{美國每年用掉的紙張磅數}) \approx 365 \times 230 (\text{百萬磅}) \approx 8 \times 10^{10} (\text{磅})$$

註 3 由於國內讀者對於英制單位可能不熟悉，特此提供下列的換算數據：1 呎 = 30.48 公分，1 公斤 = 2.2 磅。由此可得：1 呎³ $\approx$ 28000 公分³，28 公斤 $\approx$ 61 磅。詳細的計算（用到 1 公分³的水重 1 克的事實），請讀者自行補足——譯者。

註 4 美國許多地方垃圾分類非常徹底，每週只收二次（或三次，依分幾類而定），每次只收一類，有一次只收廢紙類等可重新製造的垃圾，故此項資料可以由直接觀察得到——譯者。

每年用於製紙的木材在全美國總木材數中所佔的百分率，相當於每年收成的木材在總木材數中所佔的百分率，乘上用於製紙的木材在年收成木材量中所佔的百分率：

$$\left(\frac{\text{年製紙木材}}{\text{全部木材}} \right) = \left(\frac{\text{年收成木材}}{\text{全部木材}} \right) \times \left(\frac{\text{年製紙木材}}{\text{年收成木材}} \right)$$

我們估測每年收成的木材量在全部木材中所佔的百分率，約為樹木每年成長率的一半（一年中長出來的木材量在全部木材中所佔的百分率），而樹木每年的成長率大約是 $1/(\text{一棵樹在收成時的平均年齡})$ 。一棵樹的平均年齡，我們估測約為 30 年（20 和 50 的幾何平均數）。另外，在每年收成的木材中，我們估測有一半用於造紙，另一半則作為其他的用途，如建築、傢俱、薪柴等。由這些數據資料，我們得到如下的估測：

$$\left(\frac{\text{年製紙木材}}{\text{全部木材}} \right) \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{120}$$

現在，我們把上面估測出來的數據，代入基本公式，就可求出所要的最後結果如下：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{美國所有樹木能製成的 1 元美金的張數}}{\text{的 1 元美金的張數}} \right) &= \frac{\left(\frac{\text{美國全年用掉的紙張磅數}}{\text{每年製成木材在全部木材中所佔百分率}} \right)}{\left(\frac{\text{每年製成木材在全部木材中所佔百分率}}{\text{木材中所佔百分率}} \right)} \times \left(\frac{\text{1 磅重的 1 元紙幣數}}{\text{元紙幣數}} \right) \\ &\approx \frac{8 \times 10^{10}}{\frac{1}{120}} \times 500 \\ &\approx 5 \times 10^{15} \text{ (張或元)} \end{aligned}$$

由公式 2 求得的估測值，是由公式 1 求得估測值的三分之一。但是，這個結果並不會令我們感到不安。事實上，以問題中所要求的範圍極廣的估測而言，我們得到的結果還算是差強人意的一致。至少，這樣的結果好到足夠使我們能肯定，我們估測出來的結果是不離譜的。由此，我們可以合理的斷定我們的粗略估測，並沒有導致錯誤的結果。

五、討論

我們常常發現許多學生，面對新問題時呆在那裡，不知怎麼辦才好。尤其是當問題看起來很陌生，而且他們不知道計算解題的法則時，在學校的數學教學裡，我們常常太過於強調保證能得到精確結果的計算或解題過程。所以，當學生面對一個新問題，而他

不能確定他能精確的答數時，他連嘗試都不敢。在學校的數學課程中加入傅米問題，使學生習慣於求得好的（雖然以傳統要求而言，顯得不乾淨俐落）估測，是化解學生的上述恐懼感的良好藥方。

開始估測時，學生只需根據一些數量關係，就可以放膽猜一猜。這樣得到的數量，當然應該比胡亂猜要好些。事實上，當我們不確知某一數量時，我們常常對此數量的上限與下限，還是有些粗略概念的。有經驗的估測者，可以很快地想出好幾種方法來估測一個數量，因此他對其估測值的正確性有相當的把握（由不同的方式來作粗略的驗證）。但是，這並非開始學習估測者必須具備的條件。

在真實世界中的數量估測問題，並非都是傅米問題。傅米問題的突出特徵是，其解決之道完全要靠解題者腦中既有的粗略資料而進行。事實上，許多絕佳的傅米問題，其答案是什麼地方都查不到的（這裡趕快聲明，我們對傅米問題的熱情提倡，絕不意味着我們反對查資料，問專家，或自己做些實驗來觀察結果。因為這三樣方法是人類求取知識的最主要方式）。我們認為，解傅米問題對解題者提供了人爲的挑戰，這不但是件有趣的智慧遊戲，同時也使我們有機會來磨練解題的各樣技巧，而這對我們將來要解任何的數量問題時，都會有很大的幫助。

下面，我們選取了一些傅米問題給讀者參考。希望能鼓勵讀者自行解其中的幾題玩玩，設計出一些新的問題，並介紹給你的學生或親友，讓他們一起共享解傅米問題之樂趣：

1. 美國有多少鐵路車箱？（此題由傅米本人提出）
2. 在一場棒球比賽的（電視或電台）轉播中，播報員說出一個數目的次數有多少次？
3. 美國現年 13 歲的人有多少？
4. 典型的青少年一週讀了多少字？
5. 你自己的國家中有多少加油站？
6. 美國有多少職業樂團？
7. 一架大型的飛機每哩要消耗多少加侖的汽油？

我們正在收集適合於中學生使用的傅米問題，如果你碰到，或夢想到好題目時，請不吝告知。我們的通訊處是 University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, U.S.A.