高中地球科學疑難問題解答

余逸鋒

國立臺灣師範大學地球科學系

高中基礎地球科學，第 66 頁「月球的引潮力爲什麼爲太陽的二倍多？」以及地球科學第二冊，第 61 頁「月球所引起的潮差約爲 53.1 公分，而太陽所引起的只有24.4公分，如何推算？」。還有月球引潮力爲何作如圖 4-9（即本文圖 2 ）之分布？常是高中地科任課老師之三個相關的疑難問題。現在奉師大地科系主任李春生教授之託，試著解答如下。

一、月球的引潮力爲什麼爲太陽的二倍多？

原則上，地球表面任一點的離心力大小相等（此處的離心力是指對月球與地球系統的質心而言），但是月球對地球的吸引力則在地球表面上有所不同，有的大於離心力，有的小於離心力。在地球中心而言，它們剛巧大小相同，方向相反而達平衡。而在地球表面的吸引力與地球中心的吸引力有引力差，即爲產生潮汐之淨力，稱爲引潮力。

見圖 1 地球上任一點 P 之引潮力。

P 點代表地球表面任意一點，則 P 點的單位質量所受的吸引力爲 $\overrightarrow{P}=KM/\rho^2$ ，方向 $\overrightarrow{PM}$ 而在 P 點所受的離心力爲 $\overrightarrow{Z}=KM/D^2$ ，方向 $\overrightarrow{MZ}$。

上述 K 爲萬有引力常數

M 爲月球質量

ρ 爲 P 與月球間的距離

D 爲地球與月球間的距離。

吸引力與離心力的水平與垂直方向的分力爲：

$$\left.\begin{aligned}&\text{吸引力：}\overrightarrow{P_h}=K\frac{M}{\rho^2}\sin\phi\text{，}\overrightarrow{P_v}=K\frac{M}{\rho^2}\cos\phi\\&\text{離心力：}\overrightarrow{Z_h}=K\frac{M}{D^2}\sin\theta\text{，}\overrightarrow{Z_v}=K\frac{M}{D^2}\cos\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

則引潮力水平與垂直方向的分量：

$$\left.\begin{aligned}&\text{垂直：}\overrightarrow{f_v}=\overrightarrow{P_v}-\overrightarrow{Z_v}=KM\left(\frac{\cos\phi}{\rho^2}-\frac{\cos\theta}{D^2}\right)\\&\text{水平：}\overrightarrow{f_h}=\overrightarrow{P_h}-\overrightarrow{Z_h}=KM\left(\frac{\sin\phi}{\rho^2}-\frac{\sin\theta}{D^2}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

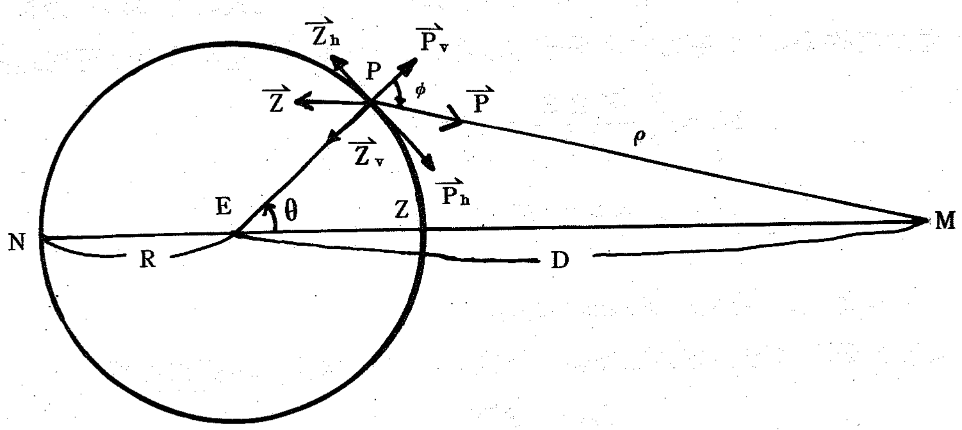

圖 1　地球上任一點 P 之引潮力

在圖 1 中的三角形 △EPM中，得關係，

$$\left.\begin{aligned}&\sin\phi=\sin(180^\circ-\theta)=\frac{D\sin\theta}{\rho}\\&\cos\phi=\frac{D\cos\theta-R}{\rho}\\&\rho=D\left(1+\frac{R^2}{D^2}-\frac{2R}{D}\cos\theta\right)^{1/2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

將(3)式代入(2)式中，並將 $1/D^4$ 或以上的高次項忽略，得

$$\left.\begin{aligned} f_h &= \frac{3}{2}\frac{K\ RM}{D^3}\sin 2\theta \\ f_v &= 3\frac{KMR}{D^3}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

令Ω爲引潮力的位勢。Ω與引潮力的關係爲 $-2\Omega/2R=\overrightarrow{f_v}$ 及 $2\Omega/R2\theta=\overrightarrow{f_h}$，可以導出：

$$\Omega=-\frac{3}{2}\frac{KMR^2}{D^3}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同理，太陽引潮力之計算方法與月球相同。

利用(4)式，可知月球的引潮力爲太陽引潮力的二倍多。此式的 f_h 與 f_v 是指月球的引潮力，而太陽的 f_{hs}（引潮力的水平分力）和 f_{vs}（引潮力的垂直分力）可同理找出，即：

$$f_{hs}=\frac{3}{2}\frac{KRS}{D_s^3}\sin 2\theta$$

$$f_{vs}=3\frac{KSR}{D_s^3}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)$$

S爲太陽質量，D_s 爲太陽與地球間的距離。

若要比較太陽與月球引潮力之比值，只需將 f_{hs}/f_h 與 f_{vs}/f_v 算出即可。

$$\frac{f_{hs}}{f_h}=\frac{SD^3}{MD_s^3}$$

$$\frac{f_{vs}}{f_v}=\frac{SD^3}{MD_s^3}$$

所以，它們的比值都是 $\frac{SD^3}{MD_s^3}$，把數值代入

$$S=1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

$$D_s=1.5\times10^{11}\ \mathrm{m}$$

$$M=7.3\times10^{22}\ \mathrm{kg}$$

$$D=3.84\times10^{8}\ \mathrm{m}$$

$$\Rightarrow\frac{SD^3}{MD_s^3}=0.46$$

求得比值爲0.46，即月球引潮力爲太陽引潮力二倍多。

二、地球表面之引潮力爲何如圖 4-9（本文圖 2）那樣分布？

另外，利用(4)式，亦可解釋圖 2 的引潮力的分布情形。特別令人產生錯覺的是，在地球背月的一邊（N點），引潮力若根據牛頓的萬有引力的觀念，力的方向應該是潮向月亮，但是這個是錯誤的。由於離心力的影響，致使N點上的引潮力的方向與Z點（向月點）的方向相反。(4)式中，在N點時，只餘下垂直分力，所以引潮力的方向是背月的。而在Z點，引潮力亦只餘下垂直分力，其大小與N點相同，然方向則是向月的。在T_1點上，引潮力亦只剩下垂直分力（$\theta = 90°$），但是由於 f_v 變成 $3\dfrac{KMR}{D^3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)$，其中多了一個負號，所以$f_v$的方向是朝向地球的中心的。而在 T_2 點上，f_v 亦同理朝向地球的中心。因此，地球表面各引潮力可根據(4)式解釋和描繪。

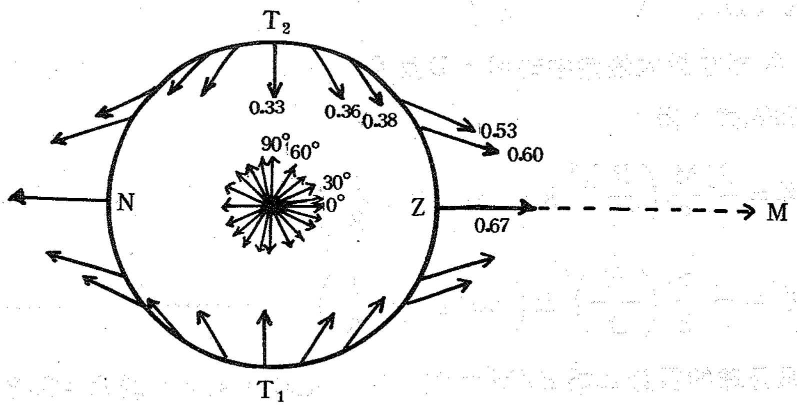

圖 2　地球表面之引潮力分布

三、月球及太陽的潮差如何推算分別爲 53.1 公分及 24.4 公分？

潮差的數值推算問題，可以用平衡潮汐論（equilibrium theory of tide）解釋，即假定地球全部爲深度相等之海水所包圍，而不計地球自轉及水之黏性時，海水之自由表面常保持平衡狀態。亦即所有作用在自由表面上所產生之引潮力位勢，重力以及離心力之和必保持一定。

見圖 3，沒有引潮力時海水的自由表面爲N，有了引潮力後，海水面變形爲W，$\overline{\eta}$爲引潮力致使水面上昇的量，而重力位勢爲 $g\overline{\eta}$，在W面上保持平衡，必然是 $g\overline{\eta}+\Omega$＝常數。也就是：

$$\overline{\eta} = -\frac{\Omega}{g} + C$$

〔C為常數，因總水位變化量為零，所以C為零。$g=\frac{KE}{R^2}$，K為重力常數，E為地球質量，R為地球半徑。〕

將(5)式代入(6)式，得

$$\bar{\eta}=\frac{3}{2}\frac{M}{E}\left(\frac{R}{D}\right)^3R\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots(7)$$

$\bar{\eta}$為太陰潮（月亮引起）的平衡潮高

而 $\bar{\eta}_s$ 為太陽潮（太陽所引起）的平衡潮高，可同理找出，得：

$$\bar{\eta}_s=\frac{3}{2}\frac{S}{E}\left(\frac{R}{D_s}\right)^3R\left(\cos^2\theta_s-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots(8)$$

S，D_s，θ_s 相當於太陰潮中的M，D及 θ。

整理(7)式和(8)式，得：

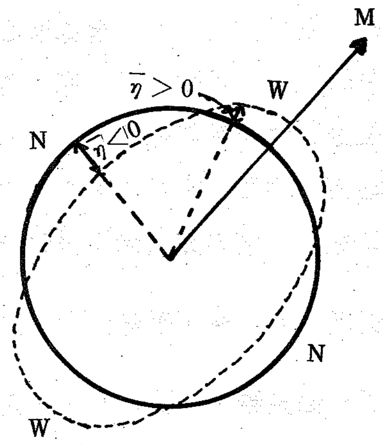

圖 3　平衡潮高

$$\bar{\eta}=\frac{3}{4}\frac{M}{E}\left(\frac{R}{D}\right)^3R\left(\cos 2\theta+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\bar{\eta}_s=\frac{3}{4}\frac{S}{E}\left(\frac{R}{D_s}\right)^3R\left(\cos 2\theta_s+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

得知地球與月球的質量比為 $E/M=81.53$，地球平均半徑為 $R=6.370\times10^5$ m，而地球與月球之距離與地球半徑之平均的比 $D/R=60.26$，因此，

$$\bar{\eta}=26.7\,(\cos 2\theta+1/3)\quad(\text{cm})$$

同理，$S/E=3.35\times10^5$，$D_s/R=2.35\times10^4$

$$\bar{\eta}_s=12.3\,(\cos 2\theta_s+1/3)\quad(\text{cm})$$

當 $\theta=0$，即月球在天頂時，$\theta=180°$，即月球在天底時，潮高最大，此時 $\bar{\eta}=35.6$ cm。又 $\theta=90°$，月球在水平線上時潮高最低，此時 $\bar{\eta}=-17.8$ cm。所以太陰潮（月亮）之潮差為 53.4 cm。〔此值與書上之值 53.1 cm 略有不同，恐由於(9)式中，取R，D，E，M等值所致。〕太陽潮的情況也是一樣，當太陽在天頂及天底時，潮高最大，為 16.4 cm，而太陽在水平線上時，潮高最小為 −8.3 cm，故太陽潮的潮差最大為 24.6 cm。〔此值與書上之值 24.4 cm 略有不同，亦是由於(10)式中，R，D_s，E，S取值所致。〕

當地球、太陽和月球在一直線上時，也就是太陰潮與太陽潮合成潮潮差最大之時。這就是大潮（Spring tide），時間在朔（新月）及望（滿月）。而在上弦月及下弦月時，太陽潮及太陰潮之合成潮潮差最小，此時即爲小潮（Neap tide）。(9)式和(10)式中，如 $\theta_s=\theta+n\pi$，$n=0$，1，2，……時，即爲大潮，$\theta_s=\theta\pm\pi/2$ 時，即爲小潮。

大潮時可表示如下：

$$\bar{\eta}+\bar{\eta}_s=26.7(\cos 2\theta+1/3)+12.3(\cos 2\theta+1/3)$$
$$=39(\cos 2\theta+1/3)\quad \text{cm}$$

小潮時，則爲：

$$\bar{\eta}+\bar{\eta}_s=26.7(\cos 2\theta+1/3)+12.3\{\cos 2(\theta\pm\pi/2)+1/3\}$$
$$=(14.4\cos 2\theta+13)\ \text{cm}$$

因此大潮的潮差最大可達 78 cm，小潮時的潮差最大爲 28.8 cm而已。

上述結果，是根據平衡潮理論導出，然實際上現實與理論有所出入，這是因爲實際海洋的水深分布是不規則的，摩擦力和慣性的影響，上述公式中的D，D_s，θ，θ_s 都會隨時間而有複雜的變化，所以平衡潮理論只能給我們粗略的概念，若要仔細研究潮汐，則必需作若干修正。

參考文獻

1. 海洋物理學概論，殷富著，國立編譯館主編出版。
2. 中山自然科學大辭典，第六册，地球科學，商務印書館。
3. 高中地球科學第二册，國立編譯館。
4. 高中基礎地球科學，國立編譯館。