作估測的理由[註1]

Zalman Usiskin 著
University of Chicago

黃敏晃 譯
國立臺灣大學數學系

一、前　言

經過長時期而未被淘汰的數學題材，都有其廣泛的應用價值。估測（estimation，或譯為約估）的使用可以追溯到古代的農業時期，人類對田地及時間要加以測量時，發現無法精確測量而產生了估測的概念。由那時候起一直到今天，許多偉大的數學家在估測方面作出了貢獻。譬如說，二千年前阿基米德對圓周率 π 作出了 $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$ 的估測，而十七世紀時牛頓也發展出求方程式近似根的估測方法。近百年來，我們目擊了統計學中抽樣估測（estimates based on sampling）的方法，變成了人口研究的重要工具。但在今天，還有許多人却認為估測不是數學的一部分，這是嚴重的錯誤觀念。

本文準備先檢討，為什麼有人認為估測不屬於數學的原因。然後提出四類理由來說明，我們為什麼要作估測。最後我們說明，為什麼在學校的數學教學中要教估測。

註1　本文取材自美國數學教師協會 1986 年的 year book, Estimation and Mental Computation, P.1 ～ 15。原文是由 Usiskin 與 Max Bell 合寫的 Applying Arithmetic 一書的第 12 章改寫而成的 —— 譯者。

二、數學中的估測

數學常被描繪成只牽涉到最精確（most exact）的概念與運算。德國文學家歌德（Johann Wolfgang von Goethe，1749～1832）說：「數學是什麼？精確地說，就是在求高度的精確性而已」。德國哲學家兼教育家霍伯（Johann Friedrich Herbart，1776～1841），則把數學看成為是"宣揚確定性（definiteness）與清楚性（clearness）的女祭司（priestess）（註2）"。

數學裏要求精確性的講究，其影響似乎還超越了數學的範疇。英國自然歷史學家兼古希臘文學教授湯普生（D'Arcy Wentworth Thompson，1837～1938）認為：「精確性的要求，是科學的靈魂。」拿破崙一世（Napoleon Bonaparte，1769～1821）則宣稱：「數學中求精確完美的進展，與整個國家繁榮是密切相關的」。精確性尤其被用來形容數學中的推論，美國的文學教授巴納德（Percy Arthur Barnett，1858～1938）說：「數學中推論之精確，堪稱為完美推論之典範。」

估測似乎無法與上述的數學形象相配合。根據 Random House 出版的大學詞典的解釋，動詞 to estimate（估測）是"對某樣事物的價值（Value），數量（amount），大小（size），或重量（weight）等作一個概略的判斷，或有粗略的意見；作概略的計算"。這樣的定義顯然與"完美的推論"或"精確的計算"不但不配合，甚至於互相衝突或矛盾。名詞 an estimate是經過估測後得到的估計值。estimation 可能是代表估測的過程，或估計值；片語 in my estimation則代表一種價值判斷（value judgement），而不是數學中所使用的術語。approximation（近似值或近似計算）的解釋並不更好，在字典中，它與estimate是同義字。

有時候，從語意學的觀點來考慮，反而會把主題弄混淆了。譬如說，我們常把3.14當作圓周率π的近似值使用。但是3.14本身與π一樣是個精確的數值，用3.14來計算時，我們也是在作精確的計算。然而，用3.14代表π求圓面積的計算，却稱為近似計算。事實上，近似計算或近似值這樣的片語本來就是自我矛盾的。這種用法，修辭學上稱之為矛盾修飾法（oxymorons）。

由此看來，不論是由概念上或由辭意上看，估測似乎與數學的目的及其本質是相反

註2　德文中所有的名詞都有性別：陽性、陰性或由中性，連抽象事物也不例外。"數學"是陰性的，所以來形容數學的名詞"祭司"也應改成陰性"女祭司"來配合——譯者。

的。確實，估測常被認爲是，我們在無法作精確計算時，必需選擇的次要候補。但是，當我們仔細來分析爲什麼要作估測時，我們會得到剛好相反的看法。作估測比不作估測常常是更合理的作法，甚至於有時候，估測常是解決問題的唯一方法。更進一步說，作估測是非常合乎數學所扮演的角色的，因爲作估測使我們對整體的情況有粗略而清晰的看法，使我們能更明確的思考，或作更佳的判斷；估測使我們在解決問題時簡化了方法而增加了彈性；估測使我們在應用的過程中可以取得一致性（consisteney），這也是數學中所熱烈追求的原則。這些將在下文中仔細說明。

在分析估測的理由之前，讓我們花點時間來澄清數學中的估測概念。首先，估測值有時候是一個數值，如 3.14 是 π 的估測值，或是一段區間如 $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$，或如氣象報告中預測明天的風速在時速 15 公里與 20 公里之間。在數學教科書上，後者的狀況常比前者多。另有一種狀況，我們稱之爲幾何的估測（geometric estimates），其結果是一個區域，例如我們估測某次地震的震央，在某地點的 10 公里之內。

從數學的過程上來說，估測常牽涉到改寫（rewriting），即把某數值以另一形態的相等數值來取代，或換值（transforming），即把一個計算式（或函數）中的某個數值改用方便於計算的近似值（註 3）。譬如說，在（美國的）數學學力鑑定測試中，一位學生在 50 道題目中答對了 41 題，他的分數是 $\frac{41}{50}$ 或記錄成 82%（改寫），然後按照標準化的分布狀況知道，他的數學程度是 6.1 年級（換值）或約爲 6 年級（估計）。其中 $\frac{41}{50}$ 與 82% 是等值的，而 6.1 與 6 年級則是很接近的，但 82% 與 6.1 則只是經過某種標準加以換算而相應，表面上看是毫不相關的。

從數學的背景看，我們之所以作估測而取得近似值或概數時，一定是屬於下列三種狀況之一：

A. 精確值爲已知，但爲了一些理由，我們使用近似值而不用精確值，如用 1.732 作爲 $\sqrt{3}$ 的近似值。

B. 精確值可以求出但目前爲未知，所以使用近似值，如一棵大樹的年輪。

註 3　事實上估測還會牽涉到其他過程如翻譯（translation），即把式中的運算順序加次變換，或改變運算。詳情請參看數學與電腦（黃敏晃譯，牛頓出版社）一書中的文章估計的數學，P.136～137。

C. 精確值不可能求出，如每一個燈泡的壽命。

通常在A的狀況我們用近似值的名稱，在B與C的狀況則用概數。但仔細檢查數學課本與其他文獻，我們會發現這兩個名詞混用得很厲害。所以在本文中我們也不準備把它們加以區分。

在作估測時所使用的數學方法與過程，差異甚大，從亂猜到前端法（front-end）、四捨五入法（rounding）等單純的方法，到分析學、統計學及經濟學裏用到的複雜過程，眞是形形色色，一言難盡。雖然本文只談數量的估測，但我們可以對幾何形法，函數及許多數學裏談到的事物加以估測。估測的過程與方法，顯然會因所需要做的估測類型，所牽涉到問題的數學或實質內涵，以及做估測者所擁有的知識而相異。

估測過程與方法的多樣性，來自做估測的理由及牽涉到的問題背景。下面，我們就來仔細檢查這些不同問題背景所涉及的理由。

三、理由1：被迫作估測

在大多數的狀況下，我們除了作估測外沒有其他選擇，因爲得不到正確的數值。下列是幾個實質的數學狀況與一些具體的實例：

(a) **數值未知** —— 我們要求的數值爲未知，被迫作估測。例如，對將來的預測；對過去的猜測；對另一國家的軍事或經濟力量作一估測；甚至於我們去買菜前，對買那些菜會用去多少錢作估測，都屬於這一類型，因爲我們缺乏一些正確的數據資料。

(b) **數值會起變化** —— 每次測量時都可能得到不同的數值，只好作估測。例如：溫度、人口、氣壓以及某人的打字速度等都屬於此類型。機率中，投擲100次銅板正面出現的相對頻率（relative frequency）也屬於此類型。

(c) **測量有其極限** ——實際的測量常不是精確的，譬如說把紙張放在顯微鏡下，可看出其邊緣並不很整齊，而測量的工具也並不完善。故許多我們以爲是精確的測量，實際上只是可以滿足實用需要的估測值罷了。

以上的三樣理由，也是統計學中所以作抽樣估測的理由。下面的例3，例8，例14與例 16 將使我們看出，估測與統計有相當密切的關係。

(d) **可能值的限制** ——要求的數值可能只有在整數時才有意義，或必須是某一固定集合中的元素。譬如說，三塊糖果賣 10 元，所以買一塊糖果不是 $\frac{10}{3}$ 元，而是 4 元。

另一個例子是當我們要建築一條公路時，發現原定路線不可能，所以要找一條很接近原路線的另一條路線。

(e) **安全的界線** —— 為了安全理由而使容許的誤差限制在一定範圍之內，此時一定要對誤差加以估測。譬如說，電梯的載重量一定要少估，我們去買東西時則必需對物價高估，趕火車時對到車站的時間要加以高估等等。

(f) **估入與估出** —— 我們有時必須利用一個估測值來做計算，以求出我們需要的另一數值，如此求出來的一定也是估測值。譬如說，我們如果能估出參與一件大建設工程的人數，我們就可以估出完成的日期。

(g) **法則上的強制** —— 有些數值無法由計算或其他有系統的方式表達成我們需要的形式，譬如說 $\pi+\sqrt{2}$ 要以有限小數來表達時，只好做估測。

下面我們再多給一些實例。這些例子中有些是閱讀性的，有些則需要讀者先做估測。所以，請讀者先準備好紙和筆，讀了題目後，如果是你覺得有需要先做估測的，估測後再看答案。

例 1 至例 3 是由 1979 年出版的世界年鑑及事實記錄（The World Almanac and Book of Facts 1979）中查出來的估測值。由下列的分析可知，估測比平常人想像的更為通用。試想想看，下列做估測理由是上述七種中的那一類？

例 1　由目前的考古學的發現及理論，我們認為最早的原始人類是 Ramapithecus，他們約活在一千二百萬年前（p. 719）。

答案　確實的數值為未知（a 類），一千二百萬年是由某種型態的概算得到的估測值（f 類）。

例 2　撒哈拉沙漠（Sahara desert）的面積約為 3,320,000 平方哩（p. 447）。

答案　面積會變化（b 類），而且測量面積時有其理論上的極限（c 類）。

例 3　美國加州聖地牙哥市（San Diego, California, U. S. A.）七月的平均氣溫是 69°F（p. 797）。

答案　溫度隨時間而變化（b 類）。附註：平均數、中數、模數（mode）及其他的統計值常是估測值的一種型態。

在例 4 到例 6 中，為什麼其答案必需是個估測值？這些估測值用區間表示，或單一數值表達較佳？

例 4　從你家到最近的飛機場要多久？

答案　每次測量數值都不同（b 類）；用一段區間表示較佳。

例 5　汽車裏的安全帶應能承受多少壓力？

答案　數值一定得高估，製造商做出的產品才會安全（ e 類 ）；單一數值較佳。

例 6　中華民國的人口有多少？

答案　人口數隨時間而變化（ b 類 ）；用一段區間表示時會較準確，但單一數值用起來較方便。

例 7　若學校規定英文作文班的學生人數，不得超過 25 人，110位學生應開幾班英文作文班？

答案　5，由 $\frac{110}{25}=4.4$ 進位而得到（ d 類 ）。

例 8　投擲一枚公正的銅板100次，反面出現的次數最可能是多少？給出一段區間，使得 90％ 以上的實驗數據都落入此段區間內。

答案　最可能的數值是 50，由 $100\times\frac{1}{2}$（$\frac{1}{2}$是公正銅板反面出現的機率）得到。機率表也顯示出（參看下面例 21 後的附圖），投擲一枚公正的銅板100次，反面出現的次數落在41至59這段區間內的機率超過 90％。附註：50而41至59的區間稱爲此問題的最大可能性的估測（ maximm likelihood estimate ），則稱爲此問題的90％的信度區間（ 90％ confidence interval ）。

例 9　當我們要決定買水泥來塡平5碼直徑的圓形遊戲場，厚度爲4吋時，什麼樣的估測是需要的？爲什麼？

答案　遊戲場雖爲圓形，但塡補的水泥則爲圓柱形。代入圓柱體積公式 $V=\pi r^2 h$，其中 $r=\frac{5}{2}$碼，$h=\frac{1}{9}$碼，得到體積 $\frac{25\pi}{36}$ 立方碼。估測之所以需要是因爲此數值爲無理數 π 的分數倍（ d 類 ）。把 π 用 $\frac{22}{7}$ 或 3.14 或計算器中的近似值取代作估測（ g 類 ），可得 2.181661565立方碼，進位得 2.25 或 2.5立方碼，視銷售的水泥包裝的狀況而定（ e 類 ）。附註：本題的 2.181661565 是由某一型的科學計算器算出來的，其他計算器可能算出不同的數值。又目前許多電腦不見得會主動地把你輸入的數值化爲有限小數作計算，你應在程式中特別聲明才行。

四、理由 2 ：估測使整體狀況更清楚

數學家兼物理學家傅里耶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768～1830) 說：「數學的主要屬性是清楚，它無法表達出含混的概念。」英國數學家兼哲學家懷德黑特(Alfred North Whitehead, 1861～1947) 也說：「安全的說法是，當一個數學家或一個哲學家寫出來的作品玄奧又含糊時，他就是在胡說八道。」

清楚就是容易了解。有62772位學生的學校經費若為 148309563 美元，我們可以簡化地說成“約六萬三千位學生，約 1 億 5 千萬美元的經費。”若一塊地的寬度經測量後知道為 40.13公尺，我們也可以單純的說成“寬約為 40 公尺”。在這兩個情形下，估測值顯然比正確的值更能使人對整體狀況有更清楚的掌握。為了清楚而取估測值時，通常使用四捨五入法 (rounding)。

清楚與精確常是矛盾的，越精確的數值越是不容易把握。譬如說，要記住 1 公里＝1609.344碼很難，但每個人都記得住，1 公里約比 1600 碼長一點的事實。精確是很重要且不可輕視的概念，但在許多情況下，為了讓我們能把整體狀況掌握得更清楚起見，犧牲一點精確度是有利的。

下面的例 10 到例 12，是由實際的報告中取出來的，數值都是精確值，請說明怎樣取(或取怎樣的)估測值，才能使人更清楚。

例 10 加拿大的面積是 3851809 平方哩。

答案 四捨五入至385000，或390000， 或 4 百萬 (平方哩)，視所需要估測值的情況而定。這項估測值之所以需要，是因為人類的短期記憶 (short-term memory) 只能記住兩、三個數目字而已。

例 11 美國 1980 年的童子軍數目是 4493491 。

答案 約 450萬。這個精確值是暫時性的，得到此精確值的第二天，說不定就有新童子軍加入。所以此精確值量不十分有意義，為了清楚的目的，犧牲掉此精確數值並不可惜。

例 12 世界上最高的人 Robert Wadlow，身高 8 呎 11.1 吋。

答案 8 呎 11 吋，或接近 9 呎，後者使人有較清楚的印象。但像這樣的情況，取估測值是較為不合適的，因為最極端的記錄，我們常常希望有最詳實的數值。

例 13 非假日的星期一到星期五，美國全國性的電視新聞報告中，都會提到當天的道將工業平均股值 (Dow-Jones Industrial Averages, 簡寫成DJIA)。間此平均股

值估測出什麼狀況？

答案 DJIA是根據美國三十家最穩定的工業公司（包括通用汽車、美國鋼鐵、IBM 等）的當天股值算出來的平均值，可視爲美國經濟景氣的一種估測。附註：美國股票市場也有其他的股值平均（stock averages），許多還把更多家公司的股值納入求平均，但DJIA歷史悠久，識者較衆，所以對許多人而言是更清楚或更令人相信的估測值。

例 14 在四次算術四則基本事實（Basic arithmetic facts，指加、減、乘、除的九九）的測試中，湯姆答對的題數依次是：10題對8題，12題對9題，9題對9題，15題對7題。請估測湯姆所知道的基本事實的百分比是多少？

答案 把湯姆四次測驗的試題數目，及他答對的試題數目加起來，他在46題中答對了33題，或72％（四捨五入到最接近的百分率，是爲了更清楚）。若四次測試的分量應該等重，則要估測 $\frac{8}{10}$，$\frac{9}{12}$，$\frac{9}{9}$ 與 $\frac{7}{15}$ 的平均值，得 $\frac{181}{240}$ 或75％。附註：考試的成績是對學生所學到的知識的一種估測；單一的成績比四個成績，更容易使老師（或家長）對學生的學習狀況有清楚的了解。

例 15 檢查下列的廣告，說明那些數目是從那些數目得到的估測值？

卡山牌大衣大減價　降價幅度高達三分之一（註4）
便宜到每棵聖誕樹下都放得起一件卡山牌大衣的禮物！純羊毛大衣，名師設計，格調高雅，大小與顏色任選，長短均有。短大衣：原價180元美金，現售118.80美金。長大衣：原價210元美金，現售138.60元美金。長斜紋軟呢大衣：原價220元美金，現售145.20元美金。從本星期四到十二月十三日，售完爲止！數量有限，欲購從速！地址：……………………

答案 數目$\frac{1}{3}$是個估測值。事實上降價的幅度達34％（即打66折，$180\times\frac{66}{100}=118.80$，$210\times\frac{66}{100}=138.60$，$220\times\frac{66}{100}=145.20$），但爲什麼在廣告的大

註4 大減價的習慣，我國用打折的方式，西方人則用扣除的方式。原文是⅓off，這裏只好說成降價幅度達⅓ —— 譯者。

字上反而說得少呢？唯一的原因是，怕一般人不易懂 34％，但⅓是個簡單的分數，較易理解。另一個解釋是某價格（譬如說220）的⅓不為有限小數，但以 34％（最接近⅓的整數百分率）計算，則一定可以算到分位(1元美金的 $\frac{1}{100}$)為止的小數。最後一個理由，是為了計算的方便，這是下面要談的理由。

例 16 一個社區的富裕程度，也可以用一個數值來估測。這樣的數值中最好的是什麼？它代表什麼意思？

答案 最常用的是此社區中各戶收入的中位數（median），它比各戶收入的平均值更佳。因為若此社區中住有幾戶高收入戶，則平均值會受到影響，但中位數則不致於。另一個常用的數值是每人平均資產值（per capita property value），把此社區中每人擁有的資產加起來，除以此社區的總人口數。這些數值都是對一個社區富裕程度的一種單純估測。附註：雖然單一的估測值較許多數據易於使我們更清楚整體的狀況，尤其是在複雜的場合（如此例），但許多資訊會因此而被犧牲掉，換句話說，單一數值的估測方式常過分地簡化了整體的狀況。事實上，一個社區的富裕狀況是很難描述的，上述的各種估測值都沒有把無形的資產（如社區附近的風景是否優美，是否有遭受嚴重汙染的可能），以及外界與此社區的關係（如交通是否方便，有沒有政府機構在此，甚至於若社區內住有國會議員時，此社區的公共設施也將因此而比其他社區更好等）計算在內。

五、理由3：估測值使用起來較方便

美國歷史學家亞當斯（Henry Adams, 1838～1918）曾說過：「數學家擁有選擇的權利，在不致產生邏輯矛盾的極限內，選擇他們喜歡的方式，來得到他們想要的結果。」奧地利的物理學家馬赫（Ernst Mach, 1838～1916）則說：「這似乎是一件很奇怪的現象，數學的威力奠基於逃避所有不必要的思考，以便在思考過程中保持最經濟的原則。」

從某種觀點而言，為了達到清楚的目的而做估測，是一種消極的理由。因為若是如此，估測並不一定是必要的。但是，我們現在要強調，估測在數學中是必要的理由，是為了一些特別的理由我們必須用估測來簡化一些情況，以便進行後面的工作時能夠更方便更經濟。這樣的講法，就比較要積極得多了。

這樣的理由在大部分的數學教科書中都提到，但為了本文的完整性，我們還是舉些

例子來說明。當我們要計算，我們身上的錢能買多少件價值 3.98 元美金的貨品時，把每件當作 4 元美金計算要方便得多。當我們要計畫一次旅行，列出搭飛機或開車兩種方式來計算花費時，估測要容易許多：「車程為800哩，我的車每加侖平均跑 20 哩，每加侖汽油要 1.20 元美金；但開車要多花兩天的時間，汽車旅館每晚 35 元美金，每天在飯館吃要 30 元美金。搭飛機最便宜的班機（註5）為 300元美金，但我下機後要租車，每天租車費用為 40 元美金，………。」

顯然，在我們常用的十進數系中，把數值取值到某一位數而得到估測值時，計算起來總比精確計算要單純許多。甚至於當電算器與電腦能幫我們處理繁雜計算的狀況下，也是如此，而且我們並不會犧牲掉答案的品質。事實上，當我們選擇適當的估測方式時，計算的過程及其結果，都要比精確的計算更合理、更實際。

例 17　國稅局允許（甚至於鼓勵）納稅人把所有的錢數，四捨五入到一元美金的單位。請給出兩個理由說明，為什麼這樣做。

答案　四捨五入的最後結果通常會平衡（在收入與各類扣除額或減免額中），因此最後繳付的稅額差異不大。一元美金以下不作計算，使國稅局的計算方便許多（考慮他們的人員所需要作的大量計算），因此省了不少錢。另外，計算容易些，納稅人也較不易出差錯。附註：教學時一定要讓學生做這類納稅的例子，以達到養成納稅習慣的副教學目的。

例 18　假定美國聯邦政府決定，防治汙染的經費要按各地區的面積比例分配。已知加州的面積為 158693 平方哩，而東北各州的面積如下：緬因（Maine）州 —— 30920 平方哩，畏而猛（Vermont）州 —— 9609 平方哩，新罕普西（New Hampshire）州 —— 9304 平方哩，麻（Massachusetts）州 —— 8257 平方哩，羅得島（Rhode Island）州 —— 1214 平方哩，康內廸克（Connecticut）州 —— 5009 平方哩，紐約（New York）州 —— 49576 平方哩。問在此政策下，加州得到的經費比東北七州合起來多呢？還是少？

答案　加州多。最方便的計算方式是把東北七州的面積四捨五入到千平方哩，則我們得到 31，10，9，8，1，5 與 50，合起來約為 114，即此七州的面積總和約為 114000 平方哩，比加州的面積少多了。只有在此數值很接近 158000 時，我們才需要

註5　在國外，兩定點間的飛機票價常因季節、飛機路線、時間（是否周末或晚上）或航空公司的不同而相異 —— 譯者。

算得更精確些。但要注意到，這些數值本來就是估測值，算得太精確也是不合適的。附註：這是假設的政策，我們還可以假設其他方式的政策。譬如說，按人口的比例分配，如此東北七州得到的經費就要比加州多了。

例 19 四口之家在作年收入爲 25000 元美金的家庭預算時，各項開支帳的估測值應取到那一位數，才算合適？（爲了計算方便，爲使結果能清楚起見，我們有意地將年收入選爲 5000 的倍數。但 25000 也很接近美國的家庭平均年收入。）

答案 100元美金似乎是合理的選擇，因爲100作單位時，計算方便，且100只是年收的 0.4%。附註：選擇比100更小的單位，當然會比較精確，但並不值得。因爲估測各項開支時將產生許多雜亂的項目，且如此做的差異並沒有太大的重要性，至少對家庭的整體經濟狀況而言。許多成人在作家庭收支帳時，堅持要作精確的記錄與計算。他們認爲用估測方式進行此項工作，是錯誤的態度。我們認爲這種人是“小錢精明，大錢糊塗”（英諺“Penny wise, pound foolish”）。

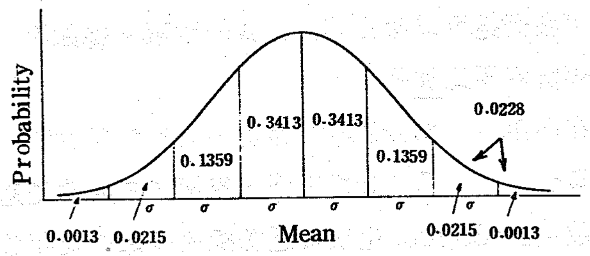
例 20 要估測 15.9×3.1 的乘積準確到整數位時，兩個因子的估測值應爲多少？

答案 不要做估測！因爲 $15.9 \times 3.1 = 49.29$，準確到整數位時爲 49。把15.9與3.1取到整數位得 16 與 3，乘積爲 48。附註：這個例子顯示出使用估測值計算或驗算時，會掉入的陷阱，雖然因子都很接近整數，且一個進位，另一個退位，但還是不夠準確。

例 21 投擲一枚公正的銅板100次，正面出現 60 次的機率爲

$\left(\frac{100!}{61!\,39!} + \frac{100!}{62!\,38!} + \frac{100!}{63!\,37!} + \cdots\cdots + \frac{100!}{99!\,1!} + \frac{100!}{100!\,0!} \right) \div 2^{100}$ 簡單的計算是怎樣的？

答案 我們可以用常態分布來求其近似值。設一枚銅板正面出現的機率爲 p，投擲 n 次，則分布的平均值（mean of the distribution）爲 np，而其標準偏差（standard deviation）爲 $\sqrt{np(1-p)}$。另 $n = 100$，$p = \frac{1}{2}$，得到平均值爲 50，標準偏差爲 5。所以，正面出現 60 次時，$(60-50) \div 5 = 2$，即超出 2 個標準偏差。讓我們看著這個常態分布曲線，如下圖，則可看到在超出平均值兩個標準偏差外（只看一邊，如圖最右方之兩塊）面積之和爲 0.0228；這就是問題中式子的估測值。我們也可以查常態機率表，如 E. A. Maxwell 的 Introduction to Statistical Thinking (Prentice-Hall, 1983)，P. 534～536。附註：利用現成的統計圖表來做估測，與調整計算式中數目的估測方式非常不同，但這是較爲複雜（sophiscated）方式的估測。



The normal probability curve.

六、理由4：估測繪出了一致性

美國數學家基塞（C. J. Keyser, 1862～1947）說：「有些深思的數學家……相信宇宙與生活中充滿著由連貫而一致（coherent and consistent）的命題編織而成的理論體系，而他們認定，找出這些體系就是數學家的工作。」英國數學家哈地（G. H. Hardy, 1877～1947）也說：「數學家就像畫家或詩人一樣，是模式的創造者。」

美國聯邦政府所報告失業人數的百分率，取值到0.1個百分點。比方說，當九千九百萬有能力工作的人當中有八百萬人失業時，政府的報告中的失業率為8.1%，而不是更正確的8.08%，或8.0808…%。此處我們被迫取估測值，因為原來的數據並不精確。但為什麼取到0.1個百分點，而不是0.01個百分點，或其他的位數呢？因為失業人數的原始資料是逐月取得而且逐月調整的，其調整的幅度以0.1個百分點為單位才能顯示清楚，所以這裏要取得一致。另外計算失業人數的原始數據時是估測出來的，而估測包含著誤差，0.1個百分點剛好可以含蓋這個誤差，這又是另外的一致性。同樣的，從實際測量得到的數值來做計算時，應該用有效數字（significant digits）來記錄其準確度，這樣才能取得一致性。

估測時的一致性的要求，源自製造統計圖表時產生的規約（conventions）或規則（regulations），或希望看到所顯示的資料有齊一外觀的願望。一致性的要求，有時會迫使我們對數據作不同尋常的改寫。譬如說，美國各類球賽中球隊的得勝率（winning percentage），習慣上四捨五入到千分位。如果一球隊在四場球賽中贏了一場，則其得勝率為25%或0.25。這個數值幾乎一成不變地被改寫成0.250，且讀成二百五十（省略小數點），這就是一種規約。所以，若一則球賽報導（報紙或電視上），把0.250用數學上與其等值的0.25來取代時，每個人都會被搞糊塗了。

下面的例22到例24，各題中的數值通常取值到那一位數呢？

例22 某月分的通貨膨脹率（inflation rate）。

答案 0.1個百分點，即千分位

例23 世界的總人口數。

答案 億。

例24 游泳比賽的世界記錄。

答案 一秒的百分之一（即百分之一秒）。

一般說來，在報告一項數據資料時，我們傾向於取二到三位的有效數字。但是，在報告一項記錄時，我們則希望儘可能地多取幾位有效數字（當然在可能測量的合理範圍內）。不論如何，這裏還是有其一致性的。

例25 一塊長方形的土地，長 39.5 公尺，寬 24.7 公尺。若要取得準確的一致性，其面積的數值應取到什麼位數？

答案 長寬的乘積是975.65 平方公尺。但長與寬的數值只有三位有效數字，所以其乘積也應該只取三位有效數字，即此塊土地的面積為976平方公尺，而且最後的那位數字不一定有信度。因為長與寬的值本來就是估測值，測量時介於39.45公尺與39.55公尺之間的任何值，都報讀成 39.5 公尺，而介於24.65公尺與24.75公尺之間的任何值，也報讀成 24.7 公尺，故其面積應介於 $39.45 \times 24.65 = 972.4425$（平方公尺）與 $39.55 \times 24.75 = 978.8625$（平方公尺）之間。

例26 某人把他的汽車加滿汽油後，開車跑了240.2哩，然後再去加滿汽油，加油器上的數值顯示他加了8.5加侖的汽油。問此人的車每加侖汽油平均跑了多少哩？

答案 用電算器計算的結果是 $240.2 \div 8.5 = 28.258824$ 哩/加侖，但應該只取兩位有效數字，而得28哩/加侖，因為8.5只有兩位有效數字。仿照上題的做法，我們可以看到 $240.25 \div 8.45 = 28.43$，$240.15 \div 8.55 = 28.08$。因此，多取一位有效數字是沒有必要的。

例27 1974年3月號的自然歷史雜誌（Natural History Magazine）給出了下列各種動物跑步速度的估測（單位為哩／小時）

印度豹	70	長頸鹿	32	豬	11
麋　鹿	45	大　象	25	大龜	0.17
兔　子	35	松　鼠	12	蝸牛	0.03

問在給出這些數據時所用的估測過程中，採取了怎樣的措施以求得一致性？

答案 這些數據都只有兩個有效數字（印度豹與蝸牛可能是例外，但以常情判斷，應該也是兩位有效數字）。

例 28 在美國的職業棒球界中，有一個估測投手威力狀況的數值，叫做安打平均值（earned-run average, 簡稱 ERA），計算方法如下：

$$\text{ERA} = \frac{9 \times (\text{被擊出的安打數})}{\text{投過的局數}}$$

一投手的 ERA 越低表示此投手的威力越強。支加哥論壇報（Chicago Tribune）於 1981 年 10 月 10 日登了一則該年美國職業棒球界的消息如下：

> **馬凱弟是投手王**：美國職業棒球聯盟（The American League）於星期五正式宣布史弟夫・馬凱弟是今年的投手王。此項結果是經過該聯盟的規則委員會（rule committee）開會，經過對投球局數估測值的方法取得一致的意見後才確定的。馬凱弟在本球季共投出 $185\frac{2}{3}$ 局，而山姆・史都華則投出 $112\frac{1}{3}$ 局，按規則委員會同意的四捨五入法處理，馬凱弟的投球局數變成 186，而史都華的却變成 112。若照實際的數據來計算，則史都華 ERA 應該比馬凱弟低。但經過四捨五入後，該聯盟正式公布的結果是，馬凱弟的 ERA 爲 2.322，史都華的爲 2.330。

檢查此項報導，經計算後知道馬凱弟在該球季被擊出 48 記安打，而史都華則被擊出 29 記安打。若照他們實際投球的局數計算，他們的 ERA 各是多少？另外兩個取概數的方式是，無條件進位及無條件捨去法。試用這兩種方法處理這兩名投手的局數後，計算他們的 ERA。

答案 在棒球界計算 ERA 時，通常都只求到百分位，但這裏爲求得清楚的判斷起見，一致求到千分位。若照實際的局數計算時，馬凱弟的 ERA 爲 2.327，而史都華的則爲 2.323（該聯盟的規則委員會是否因爲想避免用分數作除數，才作該項決定呢？）若採取無條件捨去尾數的方式（即認定沒完整地投完該局，該局不算時，則馬凱弟投 185 局，史都華 112 局。），馬凱弟的 ERA 爲 2.335，而史都華爲 2.330。若採取無條件進位法（即認定只要有下場投球，該局就算時，則馬凱弟投 186 局，史都華投 113 局），馬凱弟的 ERA 爲 2.323，而史都華爲 2.310。

七、應特別下功夫作估測教學的理由

上文談到了許多做估測的理由。但是，這些理由是否就足夠讓我們確定地認為，估測教材在學校的數學課程中應該佔有重要的地位呢？不然，因為也許這些教材對學生而言太容易了，即使不作正式的教學，只要學生的成熟度夠，他們就會自動地吸收並運用這方面的知識。目前，美國數學教育界的大多數活躍分子都不同意這種看法。他們認為學校數學課程中花在作估測教學的時間數太少了，老師們在這方面教學所下的功夫也不夠。我們應該針對這些缺點好好檢討，努力設法加以改善。下面，我們舉出一些來說明，我們為什麼應該特別下功夫做好估測教學的理由。這些理由與做估測的理由是不相同的。

1. **目前的估測教材令人誤解** —— 目前估測教材中最典型的問題之一是要學生在實際計算前估測如算式49×82的值。此題的作用是希望學生用四捨五入法，把 49 看成 50，把 82 看成 80，相乘得 4000 。但當這樣的問題提出來時，大部分的學生都不按照老師期望的方式作，他們實際上算出 49×82＝4018。有些學生就把此數值當作估測值，另一些把 4018 四捨五入到百位而得到 4000 。老師覺得很爽氣，因為學生把步驟剛好弄反了。“你們應該先估測然後計算，估測可以讓你們檢查計算出來的答案是否錯了。”但學生並不服氣，為什麼他該放棄得到正確答數的計算，而取回得到良好估測值的保證？

數學教育有一種說法說，在解題的每一個錯誤答案與錯誤過程背後，都存在一個邏輯。上述的情況剛好合乎這句話。事實上，學生所採取的過程比老師所忠告的，更合乎真實世界裏的選擇 —— 當我們能單純地計算出精確值（譬如說，用電算器）時，我們很少做估測。另外，如同上述的例 20 所示，估測不一定能保證我們能得到良好的結果。目前我們學校裏的估測教學，不管是在教科書上的表達方式或老師在課堂上的處理方式，常扭曲了我們做估測的理由，學生因此也沒有學到估測是如何使用的。

2. **估測常是某種狀況下最受歡迎的方法，或唯一可能的方法** —— 上文中談到做估測的四項理由時，我們花了最長的篇幅來討論第一項理由，即我們被迫作估測。這樣做的原因是，我們被迫作估測的場合，遠比一般人的想像好，或教科書中所說的要多得多。一般人認為當我們不想或不需要作精確計算時，才作估測。因此，估測是精確計算的弱小妹妹。但情況則剛好相反，估測應該是精確計算的堅強大姐，因為我們大多在精確計算的方式不靈光的狀況下，轉而向估測方法求助。

讓我們從幾何上舉個例子說明。我們都知道，尺規作圖法不能三等分任意角。但是我們可以用尺規作圖，作出任意角的三分之一角的近似角，譬如說，一路二等分一角，

可得到該角的 11/32角。事實上這樣的作圖法可以使我們作出的近似角，與所要求的三分之一角，之間的誤差任意小。由此可見，我們無法精確做到或求到的事物，若只要滿足實用的目的時，用估測或近似的方法是有可能做到或求得到的。在教科書上或實際的課堂上，我們若避免提及像這樣情況下做估測的例子，學生對數學的威力會產生偏差的看法。

3. **估測過程可以使學生對精確過程產生更深一層的理解**——讓我們由代數中舉例說明。比方說，二次式 $x^2-15x+51$ 不能分解成只含有理數的一次式，但$x^2-15x+50$ 則可以。問 $x^2-15+50=0$ 的根，是否爲 $x^2-15x+51=0$ 的根的良好估測值呢？一般而言，讓一個方程式的某個係數（常數項包含在內）變一點點，而檢查根的變化狀況，是很有趣的數學實驗，請讀者自行試試看。

設 a，b，c 與 d 是介於 -10 與 10 之間的整數。問方程式 $ax+b=cx+d$ 的可能根中，最大的與最小的值是什麼？若把係數改爲介於 $-n$ 與 n 之間的整數時，情況又如何呢？這樣的問題常要求我們找出新的方法，來檢查方程式的根。請讀者自行想想看。

4. **錯誤的過程常給出很好的估測**——我們趕快聲明，這裏所談的過程並不包含無法求得精確答案的過程。下面，我們以典型的例子作說明。沙麗在 40 分鐘內可以割完一塊地上的草，而約翰則能在 1 小時內割完同一塊地上的草。如果兩人合作，多久可割完這塊地上的草？（這不是一個很實際的問題，但作爲估測的練習則甚佳）。一位學生說：“兩人所花的時間平均值是 50 分鐘，所以兩人合作所需要的時間的估測是 25 分鐘”。這個方法是錯的，但我們以其答數，與“工作問題”的典型方法求出的答數比較，却是相近的（另給數值時，可以得到良好的估測值，但並不一定能得到同樣的答數）。由此可見，求精確答案的錯誤方法，可能給出良好的估測值。

5. **估測概念會影響學生的成績及班級的安插**——這點實在不是我們要教估測的理由，而是要老師更重視估測的理由。老師對估測的忽略或無知，尤其是缺乏把考試成績看成是對學生在測試科目方面的能力的一種估測的觀點，會對學生造成長程而有害的影響。譬如說，某人智商的數值是由標準化的尺度中換算出來的，標準化的方式是把平均值定爲100分，而量度的標準誤差則爲5分。所以，當一位學生的智商爲100時，這只表示他在智商測驗中能得到 95 分到105分（100 ± 5）的機率爲 68%（如果他完成測驗的話）。我們假定這位學生將來的表現，會可以由他在此類測驗中所得成績所在的較大區間，來加以預測或解釋。但老師們常不把測試成績當作學生能力的估測，因此許多老師在某位學生差一、兩分的情況下，不讓該生升到更高一班，或阻止他選更高級的

課程。只有在老師們完全察覺這種估測的狀況下，才有可能改善老師對學生的態度，使我們更小心的處理這類問題。

6. **對估測的無知會造成學生對數學的誤解**——事實上，數學中刻意追求某問題的單一正確答案的情況，只是數學的一部分，而不是數學的全部。如果只讓學生有這類的數學經驗，則漏掉了數學的其他部分。這種狀況不但對數學這個課目作了不良的扭曲，對學生也是遺害無窮。執迷於精確答案的追求，常迫使學生做許多不必要的計算（因此對數學產生了厭惡），而且阻止了他們得到估測判斷的經驗與信心。這種做法使學生見樹不見林，細節的講究摧殘了學生對整體狀況的直覺。

數學的魅力在於其中概念，過程及應用的豐富及寬廣。以上的討論使我們了解，估測不但沒有減弱，反而提高了數學在這方面的吸引力。最後，讓我們用德國數學家康脫（George Cantor, 1845～1918）的一句話，來做爲本文的結束：「數學的本質就在於它對自由的寬容。」