從幾何觀點看遞迴數列

$$a_{n+1}=\frac{\alpha a_n+\beta}{\gamma a_n+\delta}$$

葉東進

國立科學園區實驗高中

\# 1　對於一個遞迴數列 $a_{n+1}=f(a_n)$，如果把 a_n 視爲變數 x，那麼 a_{n+1} 便可視爲倚變數 y，因而在坐標平面上，就對應有一條曲線 $y=f(x)$；反之，任予一曲線 $y=f(x)$，也相應有一個遞迴數列 $a_{n+1}=f(a_n)$。

\# 2　一個大家熟知的事實是：

數列 $\langle a_n\rangle$ 如果滿足 $a_{n+1}=\alpha a_n$，$(\alpha\neq 1)$，那麼 $\langle a_n\rangle$ 是以 α 爲公比的等比數列，其一般表式是 $a_n=a_1\cdot\alpha^{n-1}$。

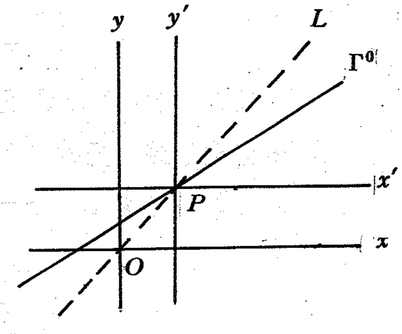
考慮數列 $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta$，$(\alpha\neq 1, \beta\neq 0)$，其相應的曲線是

$$\Gamma_0: y=\alpha x+\beta$$

由於 $\beta\neq 0$，所以 Γ_0 不通過坐標平面的原點 O（見圖一）。現在，想找一個適當的坐標系，使得 Γ_0 會通過該坐標系的原點。怎麼找呢？當然，隨便取 Γ_0 上的一點當作原點即可；但是，我們想要找的卻是一個非常特殊的點 P，它不僅落在 Γ_0 上，也落在直線 $L: y=x$ 上。也就是說

$$P:\begin{cases} y=\alpha x+\beta \\ y=x\end{cases}$$

$$\therefore P=\left(\frac{\beta}{1-\alpha},\frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$



圖一

[爲什麼會這樣子想呢？我們想像，要是數列 $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta$ 收斂到 l 的話，就有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$，因而有 $l=2l+\beta$，則 $l=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$]。

將坐標平移，使 P 爲新原點，則坐標變換爲：

$$\begin{cases} x=x'+\dfrac{\beta}{1-\alpha} \\ y=y'+\dfrac{\beta}{1-\alpha} \end{cases} \qquad (*)$$

此時，Γ_0 不僅會通過新原點 P，而且對新坐標系 $x'y'$ 言，Γ_0 有更簡潔的方程式：

$$y'+\frac{\beta}{1-\alpha}=\alpha\left(x'+\frac{\beta}{1-\alpha}\right)+\beta$$

即 $$y'=2x'$$

其相關的遞迴數列則爲 $b_{n+1}=\alpha b_n$，而由於(*)，我們知道 b_n 與 a_n 有如下的關係：

$$a_n=b_n+\frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\therefore\ a_n=b_1\cdot\alpha^{n-1}+\frac{\beta}{1-\alpha}$$

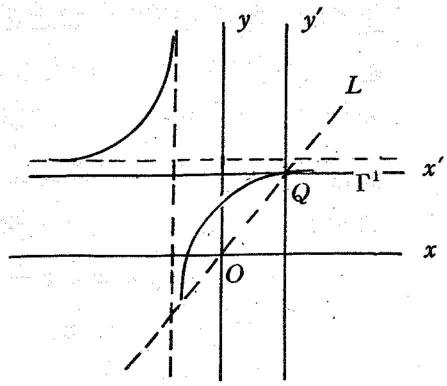
即 $$a_n=\left(a_1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\cdot\alpha^{n-1}+\frac{\beta}{1-\alpha}$$

 # 3　考慮數列 $a_{n+1}=\dfrac{\alpha a_n+\beta}{\gamma a_n+\delta}$，（$\alpha\neq\delta$，$\gamma\neq 0$，$\beta\neq 0$），其相應的曲線是：

$$\Gamma_1 : y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

由於 $\beta\neq 0$，所以 Γ_1 是一條不通過原點的等軸雙曲線（見圖二）。仿 **# 2** 的方法，找出 Γ_1 與直線 L : $y=x$ 的一個交點 Q :

$$Q:\begin{cases} y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \\ y=x \end{cases}$$



圖二

$$\therefore Q=(s,s)\text{，其中 } s=\frac{(\alpha-\delta)+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\gamma}$$

將坐標平移，使 Q 爲新原點，得坐標變換爲：

$$\begin{cases} x=x'+s \\ y=y'+s \end{cases} \qquad (*')$$

此時，Γ_1 對於新坐標系 $x'y'$ 的方程式爲：

$$y'+s=\frac{\alpha(x'+s)+\beta}{\gamma(x'+s)+\delta}$$

化簡後，其型爲：

$$y'=\frac{Ax'}{Bx'+C}$$

而其相應的遞迴數列則爲 $C_{n+1}=\dfrac{A\cdot C_n}{B\cdot C_n+C}$。另外，由 $(*')$，我們知道 C_n 與 a_n 有如下的關係：

$$a_n=C_n+s$$

因此，如果能夠知曉 C_n 的一般表式，那麼要得到 a_n 的一般表式就不成問題了。

 # 4 關於數列 $a_{n+1}=\dfrac{\alpha a_n}{\gamma a_n+\delta}$，$(\gamma\neq 0,\ \alpha\neq\delta)$，稍加變形：

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\gamma a_n+\delta}{\alpha a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{\gamma}{\alpha}$$

取 $d_n=\dfrac{1}{a_n}$

$$\therefore\quad d_{n+1}=\frac{\delta}{\alpha}\cdot d_n+\frac{\gamma}{\alpha}$$

像 $\langle d_n\rangle$ 這樣的數列，在 **# 2** 我們已經知道如何找它的一般表式，由於 $a_n=\dfrac{1}{d_n}$，因此 a_n 的一般表式也就不成問題了。

底下用一個例子說明如何運用 **# 2**，**# 3**，**# 4** 中的結論來找出型如 $a_{n+1}=$

$\dfrac{\alpha a_n+\beta}{\gamma a_n+\delta}$，$(\alpha \neq \delta\ ,\ \beta \neq 0\ ,\ \gamma \neq 0)$的數列的一般表式。

例：若數列$\langle a_n \rangle$滿足

$$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{5-a_n} \end{cases},$$

求a_n的一般表式。

解：1° 數列$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{5-a_n}$所相應的曲線是$y=\dfrac{-x+8}{5-x}$。

2° 取曲線$y=\dfrac{-x+8}{5-x}$與直線$y=x$的一個交點$Q(2,2)$。

3° 以Q爲新原點，將坐標平移：

$$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+2 \end{cases}$$

則曲線$y=\dfrac{-x+8}{5-x}$對新坐標系$x'y'$的方程式爲：

$$y'+2=\frac{-(x'+2)+8}{5-(x'+2)}$$

即

$$y'=\frac{x'}{3-x'}$$

其相應的遞迴數列則爲$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{3-b_n}$；而$b_n$與$a_n$有關係：

$$a_n=b_n+2$$

4° 取$C_n=\dfrac{1}{b_n}$而有

$$C_{n+1}=3C_n-1$$

5° 數列$C_{n+1}=3C_n-1$相應之曲線爲$y=3x-1$。

6° 取曲線$y=3x-1$與直線$y=x$的交點$P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

以P爲新原點，將坐標平移：

$$\begin{cases} x = x' + \dfrac{1}{2} \\ y = y' + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

則曲線 $y=3x-1$ 對新坐標系 $x'y'$ 的方程式爲：

$$y'=3x'$$

其相應之遞迴數列爲 $d_{n+1}=3d_n$；而 d_n 與 c_n 有關係：

$$c_n=d_n+\frac{1}{2}$$

7° d_n 的一般表式是 $d_n=d_1\cdot 3^{n-1}$

$$\Rightarrow c_n=\left(c_1-\frac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{\left(c_1-\frac{1}{2}\right)3^{n-1}+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\left(c_1-\frac{1}{2}\right)3^{n-1}+\frac{1}{2}}+2，\left(c_1=\frac{1}{b_1}=\frac{1}{a_1-2}=1\right)$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2\cdot 3^{n-1}+4}{3^{n-1}+1}$$