談對數換底公式 $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ 的教學

葉東進

國立科學園區實驗高中

＃1. 對數換底公式 $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$，在有關對數的計算中是一個常被使用的重要公式。一般的教材或是課堂中的教師帶領學生，通常僅止於它的邏輯證明，再加上一些運用的例子。但是從教學啓發的角度來看，這樣做顯然是不夠的，我們仍然該回答下面的問題：

為什麼會有這個公式？

這個公式所表達的涵義是什麼？

＃2. 大底，代數化（形式化）的步步推理使我們對於結論的眞確性無可置疑，但是對於結論的瞭解，通常也僅是繞住在它的形式層面上；如果能夠透過稍為具體的圖形來作分析，對於結論的內涵往往能產生更實際的瞭解。因此，底下便試着藉兩個指數函數圖形的某種關係來衍生出兩個對數函數之間的關係。

＃3. 考慮兩個指數函數及其圖形 r_1，r_2：

r_1： $y=a^x$

r_2： $y=b^x$

（為行文方便，暫取 $a>b>1$）

圖 1 是它們在坐標平面上的圖形。

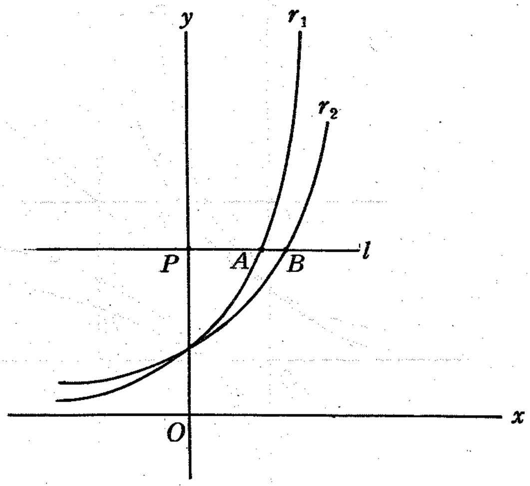

圖 1

任作一水平直線 l ：$y=k$（$k>0$，$k\neq 1$），l 交 y 軸、r_1 與 r_2 分別於點 P、A 與 B。令 A 與 B 之橫坐標分別爲 x_1，x_2 則

$$\overline{PA}=x_1 \qquad \overline{PB}=x_2$$

又 $$a^{x_1}=b^{x_2}\ (=k)$$

$$\therefore\quad x_1=x_2\log_a b\ （或\ x_1\log a=x_2\log b）$$

因此 $$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{\log_a b}\left(或\ \frac{\log a}{\log b}\right)$$

＃4. 我們知道，對數函數 $y=\log_a x$ 與 $y=\log_b x$ 分別是指數函數 $y=a^x$ 與 $y=b^x$ 的反函數；並且也知道一函數與其反函數，兩者的圖形是互相對稱於直線 $y=x$，因此，在圖 2 中我們看到了 $y=\log_a x$ 與 $y=\log_b x$ 的圖形 r_1' 與 r_2' 以及直線 l'，它們分別是 r_1，r_2 以及 l 關於直線 $y=x$ 的對稱圖形，其中 P'，A'，B' 分別是 P，A，B 對直線 $y=x$ 的對稱點。

因此 $\overline{P'B'}=\overline{PB}$ $\qquad$ $\overline{P'A'}=\overline{PA}$

$$\therefore\ \frac{\overline{P'B'}}{\overline{P'A'}}=\frac{1}{\log_a b}$$

由於 $x=k$ 是任予大於零而不等於 1 的實數，所以從圖 2 中，我們明白 $\log_b x$ 與 $\log_a x$ 有如下的關係：

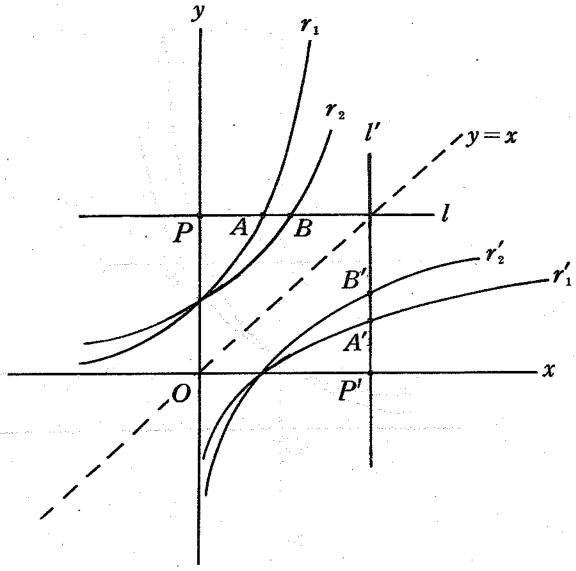

圖 2

$$\frac{\log_b x}{\log_a x}=\frac{\overline{P'B'}}{\overline{P'A'}}$$ ，其中 x 爲任意大於零的數。

即 $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ $\left(\text{或 } \log_b x=\left(\dfrac{\log a}{\log b}\right)\log_a x\right)$

#5. 以上通過圖形的分析，不僅可以顯示出換底公式由來的背景，也說明了它的意義實際上在表達出兩個任予的對數函數之間的一個常數倍關係。

〔註〕雖然爲圖方便，行文是取 $a>b>1$ 的情形來討論，但讀者仍然可以明白看出，當 $b<1<a$ 或是 $b<a<1$ 時，結論仍是相同的。