談 活 用 教 材

陳獻平

臺灣省立嘉義高級中學

課堂上常因班上有少數一二位資賦優異同學而不知如何安排教材。這些資優同學的聯想力很强，常能由一個平凡的問題，加以深入的探討。爲了讓全班的同學在課堂上都能有所收穫，不要讓資優生都只低頭看自己的書，敝人以爲在課堂上，老師們若能適時的將現有的教材由淺入深，加以推演或推廣，或由直觀而抽象，或由特例找通則，也許能使全班的同學，不論資賦是否爲上中下都能接受。也許對於目前全國都在重視的資優教育有所助益。

下面就以同學們在高三排列組合中常見的著色問題加以研討。

A	B	C
D	E	F

問題 1-1 以 5 種不同的顏色塗入右圖的六個區域，使相鄰區域不同色，每區域一色，顏色可重複使用，求塗法若干？

想法：塗色問題一般都由相鄰最多的塗起，當塗色過程中遇到困難時，再加以討論，本題一般都是先討論 A、E、C 的異同，再塗入 D、B、F。

(1) A、E、C 三區同色時，塗法有 $5\cdot4\cdot4\cdot4=320$。

(2) A、E、C 恰有二同色：A、E 同色時有 $5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3=720$

E、C 同色時（與 A、E 同樣方法）

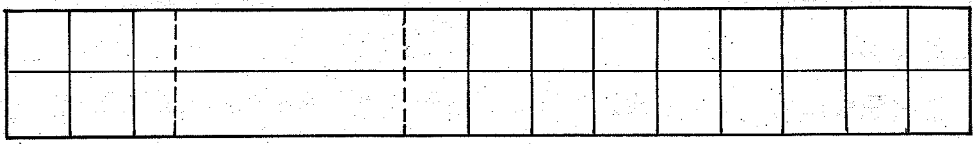
A、C 同色時有 $5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$

(3) A、E、C 均異色：塗法有 $5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot3=1080$ 種。

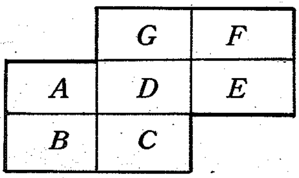
以上合計，總共塗色法有 $320+720\times2+540+1080=3380$ 種。

但是同學們會問：如果格子很多呢？上述的分類法就疲於奔命，因此，我們就該想，有沒有可以推廣而能一般化的方法呢？換個想法。如果我們先塗 A、D，再塗 B、E，次

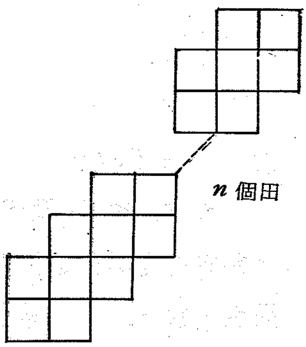
塗 C 、F，此時 A 、D 必須異色，故塗法有 5×4，然後再塗 B 時，因 B 與 A 異色，故塗法有 4 種，但這時，E 與 D 、B 相鄰這時，就該討論 B 、D 的異同，若 B 、D 同色，則 E 有 4 種塗法，若 B 、D 異色，用去 2 色後，E 有 3 種顏色可塗，故合起來完成 B 、E 的著色法有 $(1\times 4+3\times 3)=13$ 種。此時 C 、F 的塗法與 B 、E 一樣有 $4+3\times 3=13$ 法。因此整個圖形區域的合理塗色法有 $5\cdot 4\cdot(1\times 4+3\times 3)^2=3380$ 種。同時對於有 $2n$ 個格子如下圖，以 5 色塗之如上述條件下，塗色的方法有 $5\cdot 4\cdot(1\cdot 4+3\cdot 3)^{n-1}=20\times 13^{n-1}$ 種。



問題 1-2　以 5 色塗入右列格子，使同色不相鄰，每區一色，可重複使用顏色，則塗色法若干？



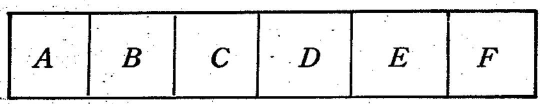
想法：首先我們看到，如果格子只有 A 、B 、C 、D 四個格子時，以 5 色來塗 B，方法有 5 種，再塗 A 、C 次塗 D，這時，如果 A 、C 同色，則塗法有 4 種，而此時 D 也有 4 法。如 A 、C 異色，則 A 、C 、D 之塗法有 $4\times 3\times 3$，即 D 之塗法有 3 種，合起來 A 、C 、D 三區之塗法有 $4\times 4+4\times 3\times 3=52$ 法。同時 E 、F 、G 這三區與 A 、C 、D 的情況相同，故塗法也是 52 種，故本題的合理著色法有 5×52^2 種。

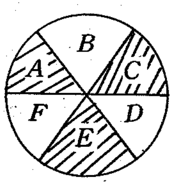


n 個田

同時可推廣之，如下有 n 個田字形的平面區域，以 5 色如上述的塗法就有 $5\cdot(52)^n$ 個方法。

問題 1-3　以 5 色塗入下列的格子，每區域一色，同色不相鄰，首尾異色，塗法若干？





想法：以 5 色塗入上面六個相連的格子，與以 5 色塗入右列圓形的格子、區域，使同色不相鄰的塗色法一樣，因此我們來討論 A 、C 、E 這三個相間的區域。

(1)　A、C、E三同，塗法有 $5\cdot4\cdot4\cdot4=320$。(先塗A、C、E再塗B、D、F各 4 法)。

(2)　A、C、E中恰二同，塗法A、C同，$5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3=720$。
AE同，CE同與AC　同一樣有 720 種(對稱)

(3)　A、C、E全異，塗法有 $5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=1620$　。合計塗法有 $320+720\times3+1620=4100$ 種。

但是當格子很多呢，上述的討論方法就不適用了，這時我們就該想到高一學過的遞廻數列的方法：

把問題敍述爲：以 l 色塗入下列 n 個格子，使同色不相鄰，首尾異色，則塗色法若干？

S_1	S_2	S_3		······		S_{n-1}	S_n

想法：首先我們先設同色不相鄰之塗法爲 a_n 則第一格 S_1 之塗法 l 種

第二格 S_2 之塗法 $l-1$ 種

⋮

第 n 格 S_n 之塗法 $l-1$ 種

故　$a_n=l\cdot l^{n-1}$

又，首末二格 S_1 及 S_n 之塗法可能同色，也可能異色。若 b_n 表示有 n 格子時，同色不相鄰且首尾異色之塗法。當 S_1,S_n 異色時，塗法 b_n，若 S_1,S_n同色，則 S_{n-1}，S_n 必異色，故 S_1,S_{n-1}異色，塗法 b_{n-1}，故

$$\begin{cases} a_n=b_n+b_{n-1} & n\geqslant 2 \quad b_1=b_0=0 \\ a_2=b_2=l\cdot(l-1) \end{cases}$$

由此

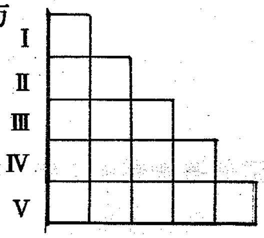
$$b_n+b_{n-1}=l(l-1)^{n-1}$$
$$b_2=l(l-1)$$
$$b_3=l(l-1)^2-l(l-1)$$
$$b_4=l(l-1)^3-l(l-1)^2+l(l-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n=l(l-1)^{n-1}-l(l-1)^{n-2}+\cdots+(-1)^n l(l-1)$$ 成等比級數

$$=(l-1)^n\left\{1-\left(-\frac{1}{l-1}\right)^{n-1}\right\}=(l-1)^n+(-1)^n(l-1)\quad n\geqslant 2$$

證畢。

以 $l=5$，$n=6$，代入上式得 $b_6=4^6+4=4100$ 種，即前述之5色塗6格。

問題 2-1 右圖正方形格子，塗以紅黑二色，規定同層的正方形，不許塗以連續2個以上的同色，求塗法若干？



想法：以 r 表紅色，b 表黑色，直接由上而下逐層排列。

① 第I層可塗 r，或 b。有2法。

② 第II層可塗 rr, rb, br, bb 有 $2\times 2=4$ 法。

③ 第III層可塗方法爲：任意塗色由乘法原理有 2^3，再扣除三格同色者 rrr 及 bbb 故合理塗法有 $2^3-2=6$ 法。

④ 第III層可塗方法爲：任意塗之有 $2^4=16$ 法，再扣除連續者 $rrrr$、$rrrb$、$brrr$ 及將左邊之 b，r 互換計合理塗法 $16-3\times 2=10$ 法。

⑤ 第V層可塗方法爲：任意塗之有 $2^5=32$ 再扣除不合理者：

$rrrrr \quad rrrrb \quad brrrr \quad rrrbb$

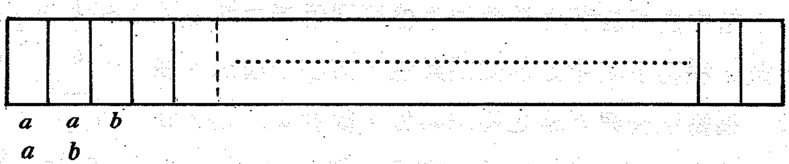
$rrrbr \quad rbrrr \quad bbrrr \quad brrrb$

及上列之 b，r 互換，故塗法有 $32-8\times 2=16$ 種。

故本題塗色法依乘法原理計 $2\times 4\times 6\times 10\times 16=7680$ 種。

再進一步仔細的的觀察：頂層塗色法2，第2層有4法，第III層有6種，第IV層有10，第V層塗法有16種。這2，4，6，10，16 之間，似乎存在著某種關係，同學們可看出後項等於前兩項的和，這又爲什麼呢？下面我們將以遞廻數列的方法來說明這種關係。

問題 2-2 以 a，b 二色來塗 n 個格子如圖，不可連續三格塗同色，塗法若干？



想法：假設合理的塗色法有 a_n 種。

考慮最初的二個格子，若同色，則餘下 $n-2$ 格子，當Ⅰ，Ⅱ格塗 a 色時，第 3 格起必塗 b，Ⅰ，Ⅱ格塗 b 時，第 3 格必塗 a，這就相當於有 $n-2$ 個格子，以 a，b 二色塗之，同色不相鄰之塗法一樣，故有 a_{n-2} 種。

若第 2 格就與第一格異色，則當第一格塗 a 時，第 2 格必塗 b，第 1 格塗 b 時，第 2 格必塗 a 色，故塗法爲 a_{n-1} 種，由互斥知：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geqslant 3 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

這個遞廻關係式與 Fibonacci 數列除了邊界條件外，差不多。

解特徵根

令 $$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad 或 \ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

令 $$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

由 $a_1 = 2$，$a_2 = 4$

解得 $$\begin{cases} A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \\ A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 4 \end{cases}$$

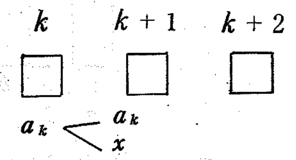
∴ $$A+B=2 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \ B = \frac{-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

∴合理塗法 $$a_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad n \in N$$

再換個想法：直接排列出 $a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 6$。

對於相鄰三格子間的關係式爲：

原則上排列時，下次都要異色，但因可二次連續著色，若 a_{k+1} 比 a_k 多出 x 種塗法，即在第 $k+1$ 格中之可能著色法與第 k 格可同色者之塗法（$1 \sim k+1$ 個格子）有 x 個方法。此時此 x 法再下格中必須變爲異色，方法未增加。在 $k+1$ 格中之 a_k 種塗法皆與 k 格之塗法異色，故此 a_k 種，在第 $k+2$ 格中可自由的用 2 色，故塗法有 $2a_k$ 種。



故　　$a_{k+2}=2a_k+x=a_k+(a_k+x)=a_k+a_{k+1}$　　$k\in\mathbf{N}$

問題 2-3　以 4 色塗 n 個格子，不連續三格子塗同色，塗法 a_n，求 a_n？

想法：假設顏色為 a，b，c，d 4 種，合理塗法為 a_n。

若有 n 個格子時，若第 1 格塗 a 色，第 2 格為非 a 之合理塗法為 x_n

第 1 格塗 b 色，第 2 格為非 b 之合理塗法為 y_n

第 1 格塗 c 色，第 2 格為非 c 之合理塗法為 z_n

第 1 格塗 d 色，第 2 格為非 d 之合理塗法為 u_n

則因前面二格可能為 a，a，也可能 a，$(\sim a)$，故當第一格為 a 色時，第 2 格可能為 b，c，d 色。

$$\therefore\quad \begin{cases} x_n=y_{n-1}+z_{n-1}+u_{n-1}+y_{n-2}+z_{n-2}+u_{n-2} & n\geqslant 3\\ y_n=z_{n-1}+u_{n-1}+x_{n-1}+z_{n-2}+u_{n-2}+x_{n-2}\\ z_n=u_{n-1}+x_{n-1}+y_{n-1}+u_{n-2}+x_{n-2}+y_{n-2}\\ u_n=x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}+x_{n-2}+y_{n-2}+z_{n-2}\end{cases}$$

由以上 4 式相加，且 $a_n=x_n+y_n+z_n+u_n$。

故
$$\begin{cases} a_n=(a_{n-1}+a_{n-2})\cdot 3 & n\geqslant 3\\ a_1=4\\ a_2=16\\ a_3=60\end{cases}$$

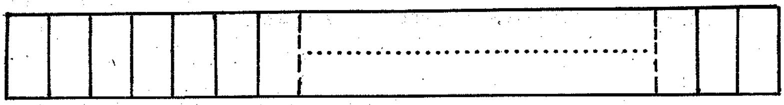
如 2-2 由有限差分公式可得 a_n 之一般項。

問題 2-4　以 m 色塗 n 個格子，不連續 3 個格子塗同色，塗法 a_n 則仿問題 2-3的想法可得

$$\begin{cases} a_n=(m-1)(a_{n-1}+a_{n-2}) & n\geqslant 3\\ a_1=m\\ a_2=m^2\end{cases}$$

問題 2-5　以 3 色塗 n 格不連續 4 格子塗同色，則塗法若干？

想法：設合理塗法有 a_n 種



設顏色爲 a，b，c，若前三格塗 a，a，a 時，第 4 格可塗 b 或 c 有 2 種，前三格塗 b，b，b 時，第 4 格可塗 c 或 a，前三格塗 c，c，c 時，第 4 格可塗 a 或 b。
故若 1～3 格塗同色，則餘下 $n-3$ 格合理塗法有 $2a_{n-3}$ 種，同理最初二格塗同色，則第三格與前二格異色，合理塗法有 $2a_{n-2}$ 種，又第一格與第二格異色，則塗法有 $2a_{n-1}$ 種。

以上三者互斥，故塗色法有下列遞廻關係式：

$$\begin{cases} a_n = 2\,(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}) & n \geqslant 4 \\ a_1 = 3 & \\ a_2 = 3^2 = 9 & \\ a_3 = 3^3 = 27 & \end{cases}$$

另外用問題 2-3 的想法，我們也可得到上式的結果。

推廣之

問題 2-6　以 m 種顏色塗 n 格，不連續 k 格塗同色（$k \geqslant 2$），設其塗法有 a_n 種。則

同前面問題 2-5 的想法。

若前面第一格起連續 $k-1$ 格同色，而第 k 格與之異色，此種情形下之塗法有 $(m-1)\,a_{n-k+1}$ 種。

若前面第一格起連續 $k-2$ 格同色，而第 $k-1$ 格與之異色，則此時之塗法相當於有 $n-k+2$ 個格子時之原題目塗法，隨著 1～$k-2$ 格的 m 種顏色的變化，第 $k-1$ 格起亦可以此 m 色自由塗色，故塗法有 $(m-1)\,a_{n-k+2}$ 種。

同理第一格與第二格異色時塗法有 $(m-1)\,a_{n-1}$ 種。　　$n \geqslant k$

由互斥知合理之全部塗法有

$$\begin{cases} a_n = (m-1)\,(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-k+1}) & m,\ n,\ k \in \mathbf{N} \\ a_1 = m,\ a_2 = m^2,\ a_3 = m^3,\ \cdots,\ a_{k-1} = m^{k-1} & n \geqslant k,\ m \geqslant 2 \end{cases}$$

一個小小的應用：

將一公正的骰子連擲5回，有連續3回或3回以上出現同點數之機率若干？

想法：把擲一骰子5回看成是以6種顏色塗5格子，設無3回出現連續點數的投擲法爲 a_n。

由
$$\begin{cases} a_n = 5(a_{n-1}+a_{n-2}) & n \geqslant 3 \\ a_1 = 6 \\ a_2 = 6^2 = 36 \end{cases}$$

可得
$$a_3 = 5(6+36) = 5\times 42$$
$$a_4 = 5(a_2+a_3) = 5(36+210) = 5\times 246$$
$$a_5 = 5(a_3+a_4) = 5(210+1230) = 5^2\times 288$$

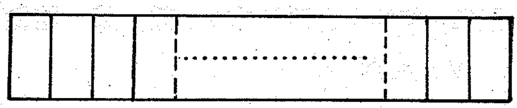
故所求機率
$$p = 1 - \frac{5^2\times 288}{6^5} = \frac{2}{27}$$

當然本題直接排列之亦不難，其3回或3回以上同點數者爲：

$xxxyz \quad yxxxz \quad zyxxx \quad xxxxy \quad yxxxx \quad xxxxx$

故機率
$$p = \frac{6\times 5\times 6\times 2 + 6\times 5\times 5 + 6\times 5\times 2 + 6}{6^5} = \frac{2}{27}$$

問題3-1 以 a，b 二色塗 n 格，但不連續塗4個 a 色，也不連續塗3個 b 色，求塗法若干種。



想法：設合理的塗色法有 a_n 種方法，設第一格塗 a 色之塗法有 x_n 種，第一格塗 b 色之塗法有 y_n 種。

則
$$a_n = x_n + y_n \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \cdots\cdots ①$$

又可能開頭三格塗 a 色，第4格塗 b 色，則塗法有 y_{n-3} 種。

前二格塗 a 色，第3格塗 b 色，則塗法有 y_{n-2} 種。

第一格塗 a 色，第2格塗 b 色，則塗法有 y_{n-1} 種。

故
同理
$$\begin{cases} x_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} & ② \quad n \geqslant 4 \\ y_n = x_{n-1} + x_{n-2} & ③ \quad n \geqslant 3 \end{cases}$$

由直接塗色可得
$$\begin{cases} x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=4 \quad x_4=6 \quad x_5=11 \quad x_6=19 \\ y_1=1 \quad y_2=2 \quad y_3=3 \quad y_4=6 \quad y_5=10 \quad y_6=17 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_1=2 \quad a_2=4 \quad a_3=7 \quad a_4=12 \quad a_5=21 \quad a_6=36$$

由③代入②$\Rightarrow x_n=(x_{n-2}+x_{n-3})+(x_{n-3}+x_{n-4})+(x_{n-4}+x_{n-5})$
$$=x_{n-2}+2x_{n-3}+2x_{n-4}+x_{n-5} \quad \cdots\cdots ④$$

由②代入③$\Rightarrow y_n=(y_{n-2}+y_{n-3}+y_{n-4})+(y_{n-3}+y_{n-4}+y_{n-5})$
$$=y_{n-2}+2y_{n-3}+2y_{n-4}+y_{n-5} \quad \cdots\cdots ⑤$$

由④＋⑤　$\Rightarrow a_n=a_{n-2}+2a_{n-3}+2a_{n-4}+a_{n-5} \quad n\geqslant 6 \quad \cdots\cdots ⑥$

邊界條件　　$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=12$，$a_5=21$

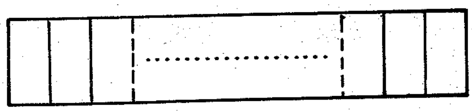
由遞迴關係式，可逐項求得 a_n。

但由於⑥式之特徵方程式為5次：

$$x^5-x^3-2x^2-2x^1-1=0 \quad \text{無法開方解。}$$

文末附以媒體（輔助電腦）列出前100項（如附表一）。

問題3-2　以 a，b，c 三色塗 n 格子，但不連續4格塗 a 色，不連續3格塗 b 色，不連續2格塗 c 色，求合理的塗色法 a_n ？



想法：同問題3-1，設第一格塗 a 之塗法有 x_n 種，第一格塗 b，c 之方法各為 y_n，z_n 種，則 $a_n=x_n+y_n+z_n \quad \forall n\in\mathbf{N}$ 。

對於第一格塗 a 者，可能前三格塗 a，此時第4格起可能塗 b 或 c 。

也可能前二格塗 a，第3格塗 b 或 c 。

也可能前一格塗 a，第2格塗 b 或 c，由互斥原理。

可知
$$\begin{cases} x_n=y_{n-3}+z_{n-3}+y_{n-2}+z_{n-2}+y_{n-1}+z_{n-1} & n\geqslant 4 \cdots\cdots ① \\ y_n=z_{n-2}+x_{n-2}+z_{n-1}+x_{n-1} & n\geqslant 3 \cdots\cdots ② \\ z_n=x_{n-1}+y_{n-1} & n\geqslant 2 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由②代入①式可得　$x_n=z_{n-5}+z_{n-4}+z_{n-4}+z_{n-3}+z_{n-3}+z_{n-2}+x_{n-5}+x_{n-4}$
$$+x_{n-4}+x_{n-3}+x_{n-3}+x_{n-2}+z_{n-3}+z_{n-2}+z_{n-1} \cdots\cdots ①$$
$$=z_{n-5}+2z_{n-4}+3z_{n-3}+2z_{n-2}+z_{n-1}+x_{n-5}+2x_{n-4}+$$

$2x_{n-3}+x_{n-2}$

再將③代入上式①′ 得 $x_n=x_{n-6}+3x_{n-5}+5x_{n-4}+4x_{n-3}+2x_{n-2}+y_{n-6}+2y_{n-5}+3y_{n-4}+2y_{n-3}+y_{n-2}$ ……④

由③代入②得 $y_n=x_{n-3}+y_{n-3}+x_{n-2}+y_{n-2}+x_{n-2}+x_{n-1}$ ……②

由①代入② 得 $y_n=y_{n-6}+3y_{n-5}+4y_{n-4}+4y_{n-3}+2y_{n-2}+z_{n-6}+3z_{n-5}+4z_{n-4}+3z_{n-3}+z_{n-2}$ ……⑤

由①代入③得 $z_n=x_{n-1}+y_{n-1}=y_{n-4}+y_{n-3}+y_{n-2}+z_{n-4}+z_{n-3}+z_{n-2}+y_{n-1}$ ……②

再由②代入③得 $z_n=z_{n-6}+2z_{n-5}+3z_{n-4}+3z_{n-3}+2z_{n-2}+x_{n-6}+2x_{n-5}+2x_{n-4}+2x_{n-3}+x_{n-2}$ ……⑥

④+⑤+⑥得 $a_n=2a_{n-6}+5a_{n-5}+7a_{n-4}+6a_{n-3}+3a_{n-2}\quad n\geqslant 7$ ……⑦

⑦式就是我們所要的遞廻關係式，由此式藉媒體就可求得所要的塗色法，其邊界條件，可由直接計算求得如下：

$$\begin{cases} x_1=1 & x_2=3 & x_3=8 & x_4=20 & x_5=52 & x_6=135 & x_7=349 & x_8=903\cdots \\ y_1=1 & y_2=3 & y_3=7 & y_4=19 & y_5=49 & y_6=126 & y_7=327 & y_8=846\cdots \\ z_1=1 & z_2=2 & z_3=6 & z_4=15 & z_5=39 & z_6=101 & z_7=261 & z_8=676\cdots \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1=3$，$a_2=8$，$a_3=21$，$a_4=54$，$a_5=140$，$a_6=364$，……

結論：藉著數列的應用，我們可把一些複雜、限制較多的著色問題，化爲有規則可循，不能求得一般項者，可化爲遞廻式，以利求算。

參考資料：①組合數學（林福來教授譯著）

②有限差分初步（趙文敏教授譯著）

```
]LIST

10  DIM A(100)
20  FOR J = 1 TO 5
30  READ A(J)
40  DATA  2,4,7,12,21
50  NEXT J
60  FOR S = 1 TO 95
90 A(5 + S) = A(S) + 2 * A(S + 1)
      + 2 * A(S + 2) + A(S + 3)
100  NEXT S
102 M = 1
110  FOR K = 1 TO 38
120  PRINT  TAB( M);"A";"(";K;")"
     ; TAB( M + 5);"=";A(K);
121  IF M = 19 THEN  PRINT
122 M = M + 18
124  IF M > 25 THEN M = 1
130  NEXT K
140  FOR N = 39 TO 100
150  PRINT "A";"(";N;")"; TAB( 9)
     ;"=";A(N)
160  NEXT N

]RUN
A(1) =2             A(2) =4
A(3) =7             A(4) =12
A(5) =21            A(6) =36
A(7) =63            A(8) =109
A(9) =189           A(10)=328
A(11)=569           A(12)=987
A(13)=1712          A(14)=2970
A(15)=5152          A(16)=8937
A(17)=15503         A(18)=26893
A(19)=46651         A(20)=80925
A(21)=140380        A(22)=243516
A(23)=422425        A(24)=732777
A(25)=1271142       A(26)=2205039
A(27)=3825062       A(28)=6635302
A(29)=11510201      A(30)=19966646
A(31)=34635968      A(32)=60082714
A(33)=104224964     A(34)=180798143
A(35)=313628974     A(36)=544049467
A(37)=943757902     A(38)=1.63712867E+09
A(39)   =2.83991293E+09
A(40)   =4.92637238E+09
A(41)   =8.54573553E+09
A(42)   =1.48242135E+10
A(43)   =2.57154348E+10
A(44)   =4.46083422E+10
A(45)   =7.73817052E+10
A(46)   =1.34233374E+11
A(47)   =2.32853473E+11
A(48)   =4.03928904E+11
A(49)   =7.00691974E+11
A(50)   =1.2154843E+12
A(51)   =2.1084901E+12
A(52)   =3.65757953E+12
A(53)   =6.34477156E+12
A(54)   =1.10062203E+13
A(55)   =1.90923951E+13
A(56)   =3.31194126E+13
A(57)   =5.74519584E+13
A(58)   =9.96614151E+13
A(59)   =1.72881794E+14
A(60)   =2.99896552E+14
A(61)   =5.20227954E+14
A(62)   =9.02434929E+14
A(63)   =1.56544606E+15
A(64)   =2.71556574E+15
A(65)   =4.71066838E+15
A(66)   =8.17155567E+15
A(67)   =1.41751269E+16
A(68)   =2.458947E+16
A(69)   =4.26551408E+16
A(70)   =7.39935036E+16
A(71)   =1.2835589E+17
A(72)   =2.22657852E+17
A(73)   =3.86242649E+17
A(74)   =6.7001178E+17
A(75)   =1.16226364E+18
A(76)   =2.01616867E+18
A(77)   =3.49743035E+18
A(78)   =6.06696216E+18
A(79)   =1.05243067E+19
A(80)   =1.82564238E+19
A(81)   =3.16692604E+19
A(82)   =5.4936392E+19
A(83)   =9.52976838E+19
A(84)   =1.65312067E+20
A(85)   =2.86765412E+20
A(86)   =4.97449479E+20
A(87)   =8.62921306E+20
A(88)   =1.49690212E+21
A(89)   =2.59666316E+21
A(90)   =4.50440911E+21
A(91)   =7.81375949E+21
A(92)   =1.3554461E+22
A(93)   =2.35128061E+22
A(94)   =4.07874613E+22
A(95)   =7.07536562E+22
A(96)   =1.22735755E+23
A(97)   =2.12908652E+23
A(98)   =3.69330797E+23
A(99)   =6.40674937E+23
A(100)  =1.11137327E+24
```