

拋物線的故事

——我是她們的妹妹嗎？

私立衛理女中數學教室 譯

二次方程式媽媽因為有了一個小女兒叫拋物線，而感到非常的高興，連接生的醫生都感到高興。他一直害怕會有其它的變化，但是很幸運地，她是個白胖健康的小寶寶。二次方程式媽媽說：「她的確漂亮」，但是哪個小女孩在她母親眼中不美麗呢？拋物線的兩個姊姊——橢圓和雙曲線，却大不以為然。

雙曲線大叫道：「看！多醜的女孩，她只有一條對稱軸。」（見圖1(a)）。

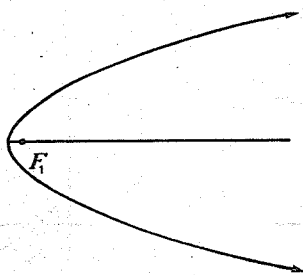


圖 1(a) 拋物線

橢圓也加上一句說：「她只有一個焦點，她看起來的確不太像我們。」（見圖1(b)、(c)）。

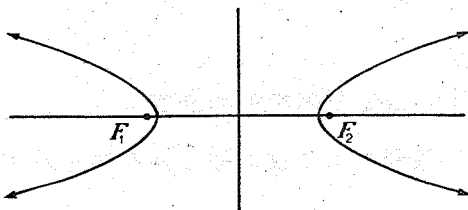


圖 1(b) 雙曲線

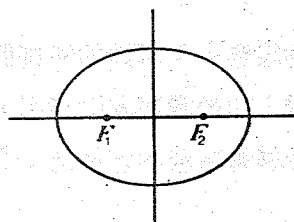


圖 1(c) 橢圓

當橢圓和雙曲線兩姊妹穿上直角坐標的衣服後，我們馬上可以看出來她們是姊妹：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{與} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

但是拋物線為 $y^2 = 4px$ ，看起來就不同。

聰明的拋物線，很快又發現她兩個姊姊還有其它相似的地方；橢圓從身上任一點到兩個焦點距離的和恆為一定數（見圖2）。雙曲線從身上任一點到兩焦點距離的差恆為一定數（見圖3）。

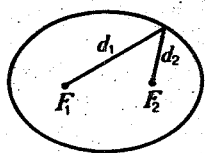


圖2 $d_1 + d_2$ 為定數

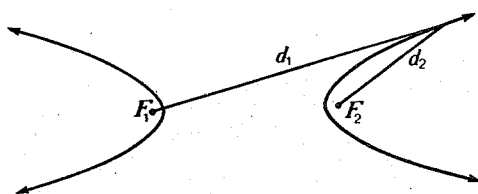


圖3 $|d_1 - d_2|$ 為定數

拋物線因為無法找到自己和她的兩個姊姊的共同特徵而感到很難過，更何況她只有一個焦點。有一天，當她和直線一起玩的時候，她忽然有了一個奇妙的發現。如果她讓直線垂直她的軸，那麼她的頂到這直線和到焦點有相同的距離（見圖4），而且她身上其它的點也有同樣的性質（見圖5）。

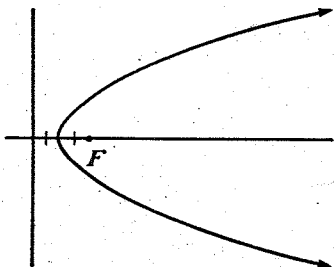


圖4

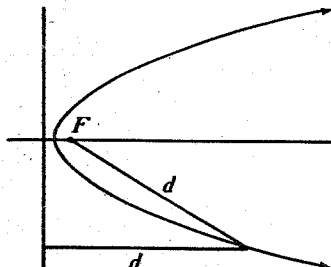


圖5

拋物線跑去告訴她的姊姊們這個消息。

「看！由於我朋友的指引，我發現了一個與妳們相似的性質！」

兩個姊姊冷淡的應付道：「誰需要一條笨直線？我們除了兩個焦點外，不要任何東西。」

拋物線有一點傷心，她是多麼希望她的姊姊們能相信她和她們是相像的。第二天，

拋物線發現她能看到非常遠的東西，她有這樣的能力，是因為她能將平行的光線集中在她的焦點（見圖 6），她也察覺到橢圓有同樣的能力：橢圓能將由一個焦點發出的光，經過本身的反射後，集中到另一個焦點。（見圖 7）。

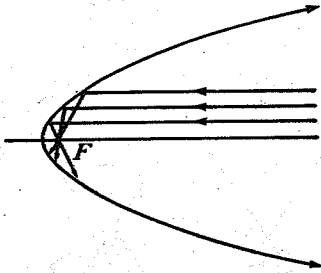


圖 6

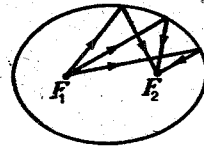


圖 7

不過這一次拋物線沒有將她的發現告訴她的姊姊們。拋物線又發現利用光線反射的性質，能提醒她如何去得到一條切線——這是她常常忘記的事（見圖 8），她的橢圓姊姊也有同樣的特性（見圖 9）。

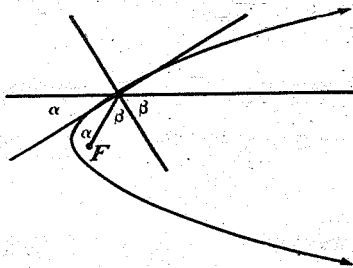


圖 8

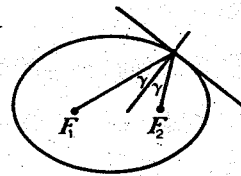


圖 9

這天下午，拋物線在看一本她的朋友六邊形給她的書，這本書是有關於她朋友的祖父——正方形的冒險史。晚上，拋物線吃了很多的分數派和甜筒，她睡著了而且做了一個夢。

拋物線的夢

拋物線和她的姊姊們被關進了一座像兩個甜筒杯的圓錐城堡。（見圖 10）這座城堡被球衛兵看守著，拋物線只能聽見她姊姊們的聲音，知道她們是在不同的平面，因為聲

音似乎來自每一個角落。有一個球抓住她的焦點，兩個緊抓住橢圓（見圖 11），還有兩個抓住雙曲線。拋物線設想沿著一個平面逃出了圓錐城堡，橢圓沿著另一個平面獲得自由，不久雙曲線也用同樣的方法逃了出來（見圖 12）。

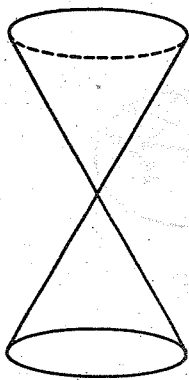


圖 10

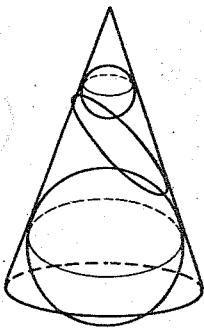


圖 11

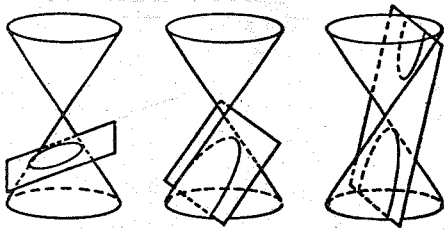


圖 12

拋物線醒來後十分興奮，她認為她和姊姊們相像的程度比她想的還深，有一種感覺，她是介於兩個姊姊之間。因為讓拋物線重獲自由的平面，就是介於讓橢圓、雙曲線逃脫的平面之間。

她跑去告訴姊姊們夢中的情境，當她開始描述有關在三度空間中的圓錐城堡時，她的姊姊們開始笑她，說：「那是因為妳晚上吃得太多，又看了那本胡說八道的書“平面世界”才會作這種夢。」

拋物線非常沮喪地哭了起來，當她哭泣時，極坐標女神出現了。「別哭，拋物線，我要給妳們件極坐標的衣服，穿起來就和姊姊們相像了，妳也會發覺妳介於她們兩人之間，就如同妳的夢一樣。」

極坐標女神實現了她的承諾，立刻這三姊妹都穿上了她們的極坐標外衣。——

$$e = \frac{r}{p + r \cos \theta}。$$

她們之間唯一的差別是：

橢圓： $e < 1$ 拋物線： $e = 1$ 雙曲線： $e > 1$

這時姊姊們才承認她們之間是擁有相同的特性，拋物線非常高興，從此她就快快樂樂地生活下去了。

（本文譯自 Mathematics Teacher V.78 No.1）

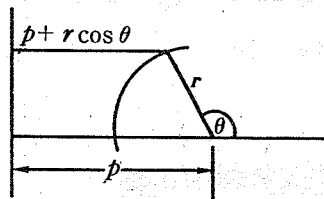


圖 13 $e = \frac{r}{p + r \cos \theta}$