古希臘人的天文測量（下）

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

§5　月亮有多遠？

在地球上建立了良好的基線（地球的半徑）之後，讓我們從地球上的測量轉到天空。我們如何測量由地球到月亮的距離？這個距離是無法直接測量的，所以必須使用間接測量法，即使用可資利用的基線來作計算。這是典型的三角化的問題。但是，如何把問題三角化？選擇那三個點構成的三角形？

自然，我們應該選定地球上的兩點A與B，作爲觀察（或測量）站，而把月亮看成一個點C。這樣子把問題理想化之後，我們就得到一個三角形。這樣做有沒有問題呢？譬如說，我們看到的月亮是很大的一個圓，並不是一點，把它當作一點可以嗎？怎樣才可以使A、B兩地的測量者，對準月球上的同一點測量呢？不錯，我們可以選擇月亮上的一個明顯的斑痕，當作C點，也可以使用看到的月亮的圓的圓心。於是，問題變成爲：如何確定下圖中的三角形ABC？

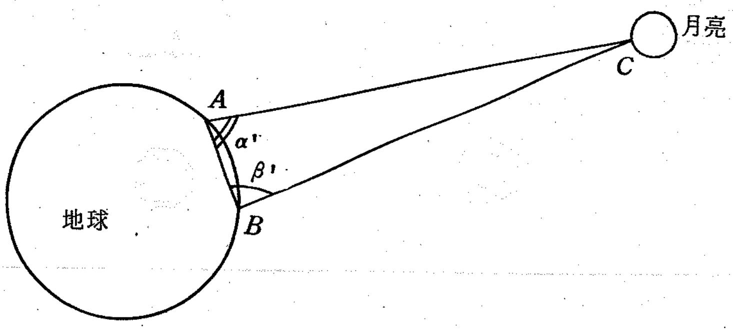

圖17　把問題三角化

要確定$\triangle ABC$，一定要測出該三角形中三個適當的資料。那三個資料是可以測得的？看來只有$\overline{AB}$，$\angle\alpha'$與$\angle\beta'$是有可能找出來的。這三個資料足以確定$\triangle ABC$嗎?兩角夾邊，足夠。這三個資料又如何測出來呢？由上圖看到，$\overline{AB}$是在地底下的。問題看來很複雜，怎麼辦呢？

注意到，上圖是表達在由A、B與C三點所決定的平面上的。若我們假定此平面也通過地球的球心O，則$\widehat{AB}$就是地球上一個大圓的一部分。如果$\widehat{AB}$的長能測出來（如上節的亞歷山大與錫恩的距離），或以其他方法計算出來（請參看下面的§7），則$\widehat{AB}$所對的圓心角θ就可以計算出來。因爲

$$\frac{\theta}{\widehat{AB}}=\frac{360}{2\pi\gamma}$$

其中γ是地球的半徑，已由一拉脫身計算出來。讓我們把地球的球心O，及$\widehat{AB}$所對的圓心角θ放入上圖，而得到下圖。在這個圖中，我們看到了第二個三角形，即$\triangle OAB$。此三角形的已知資料是$\overline{OA}=\overline{OB}=\gamma$，$\angle AOB=\theta$。這些資料足以確定$\triangle OAB$嗎?兩邊夾角，足夠。所以，$\overline{AB}$長也可以算出來。

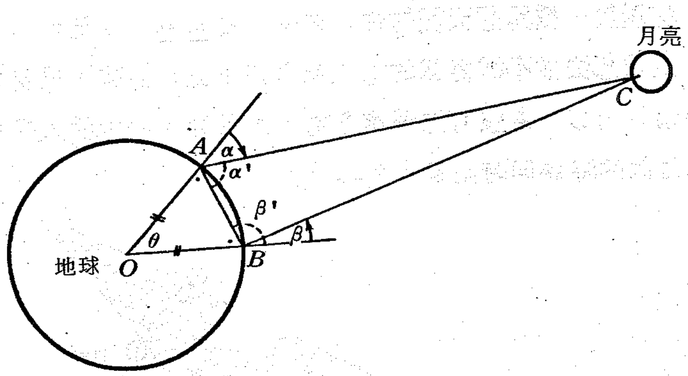

圖 18　三角化求基線

第二個三角化，除了幫我們算出基線長$\overline{AB}$之外，還有附帶的利息，即使我們算出等腰$\triangle OAB$的兩底角，

$$\angle OAB=\angle OBA=\tfrac{1}{2}\cdot(180^\circ-\theta)$$

這兩個底角在我們計算$\angle\alpha'$與$\angle\beta'$時，有相當大的幫助。因爲$\overline{AB}$在地下，$\angle\alpha'$與$\angle\beta'$無法直接測量，所以非用間接測量法不可：

$$\angle\alpha'=180^\circ-\angle OAB-\angle\alpha$$
$$\angle\beta'=180^\circ-\angle OBA-\angle\beta$$

$\angle\alpha$ 又如何決定呢？$\angle\alpha$ 是由 A 到月亮的視線 $\overline{AC}$，與在 A 點的鉛垂線（即 $\overline{OA}$ 的延長線，利用線懸掛重物即可得到）所成的夾角，可以測得。同理，$\angle\beta$ 也可用同法測得。由此，$\triangle ABC$ 就可確定，其邊長 $\overline{AC}$ 或 $\overline{BC}$ 可計算出來，而得到地球到月亮的距離。

這個問題是否就此解決了呢？不然，其中存在一個障礙尚待克服。此障礙的產生源自月亮與地球的相對位置，並不是固定不變的。月亮繞地球迴轉，時時改變它與地球上定點的相對位置。所以，當我們在 A 點測得 α 角（此時月亮在 C 點），再到 B 點去測 β 角時，月亮的位置已然離開 C 點而到了 C' 點。因此，我們測得的，不是 $\triangle ABC$ 中兩角的角度，而是四邊形 $ABCC'$ 中兩角的角度。為了成功地測出 α 角與 β 角，在 A、B 兩點的測量一定得同時舉行。

古希臘人沒有準確的鐘錶（只有沙漏），兩地的測量員如何同時測量呢？如果兩地相隔不遠，則夜間用燈火作為信號倒是可行。但古希臘人知道三角化測量的基線長，與要測的長度的大小，其比例倍數不能相差太大，不然測量的誤差就無法控制。本問題的基線長最起碼要數百哩長（$\overline{AC}$ 約 240000 哩），測量才有意義。怎麼辦呢？他們的問題看起來似乎無法解決，但他們却成功地解決了這個困難。他們怎麼做到的？

讓我們暫時沈迷於一種異想天開的白日夢中：古希臘人要是能送人到月亮去打信號多好！？且慢！這種想法並不需要眞的送人到月亮上去打信號，只要月亮上發生一件地球上能看到的事情就可以。有沒有這種事？有，即月蝕。古希臘人成功地解決本問題的關鍵，就是等到月蝕的時候同時測量 α 角與 β 角。

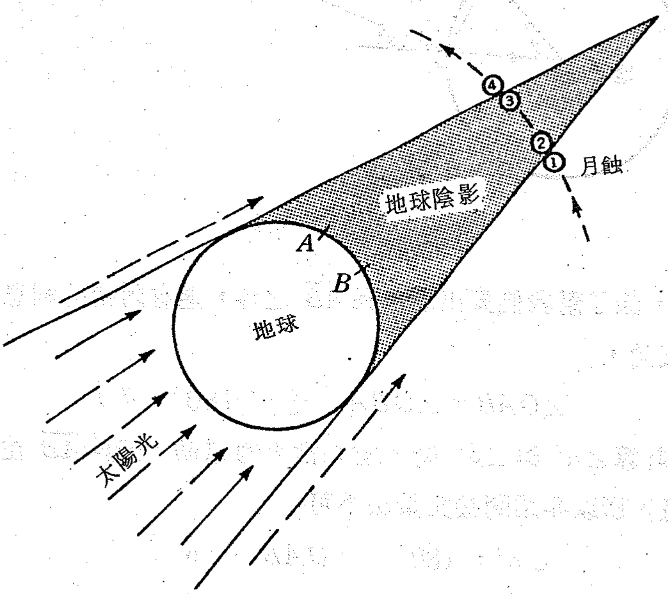

圖19 月蝕的信號

古希臘人早就能預測月蝕，如上圖所示，月蝕提供了四個時刻信號，即①月蝕開始，②全蝕完成，③月由地球陰影中開始出現，④月蝕解除。只要兩地的測量員事先約好，這些信號就能使他們同時進行測量。我們現代人實在很難像古希臘人那樣，能體會日、月蝕對人類的重要了。

§6　太陽有多遠？

阿里斯達朱士（Aristarchus，約西元前310～230年）是古希臘的數學家兼天文學家，因爲是有史以來第一位提出**繞日學說**（heliocentric theory）而留名青史。繞日學說假設，地球與其他的五大行星（當時太陽系的其他行星尚未發現），都是繞着以太陽爲中心的圓形軌道而運行的。當時盛行的是**繞地學說**（geocentric theory），即認爲天空中的各星都繞着以地球爲中心的圓形軌道而運行。

阿里斯達朱士在繞地學說盛行之際，提出繞日學說（註9），經過一場激烈的論戰，由於證據稍嫌薄弱，而爲古希臘的其他學者所排斥。由此可見，當時學術自由風氣之盛。繞日學說一直要等到一千七百年後，哥白尼（Nicolaus Copernicus，1473～1543）收集分析了足夠的星象證據，於1530年左右寫成On the Revolutions of the Heavenly Spheres（星球運轉論，此書於哥白尼臨死前才印刷發行）後，才重見天日。再經過克卜勒（Johannes Kepler，1571～1630）之修正，與伽利略（Galileo Galilei，1564～1643）的鼓吹，才爲世人所接受。

本節要談的就是阿里斯達朱士的結果。其實，他並沒有計算出太陽與地球的距離。只算出此距離與地球到月球距離的比值。但在上節中，我們既然可以算出月球與地球之間的距離，我們就可以由阿里斯達朱士的結果，計算地球到太陽的距離。由於阿里斯達朱士的結果，在時間的順序上先出現，而上節測地球到月球距離的結果後來才有，所以歷史上並不認爲阿里斯達朱士測出了地球到太陽的距離。

另一件需要說明的是，有些讀者會認爲，上節測量月亮與地球距離的方法，也可以用來測太陽到地球的距離。因爲日蝕也可以用來做爲同時測量的信號，使我們測出 α 角與 β 角。從理論上講沒錯，但實際上測出來的數值，誤差會很大。原因是我們在地球上

（註9）　David Dietz的Story of Science（啓明書局有譯本，民國四十七年出版）中說，第一位提出繞日學說的是數學家畢達哥拉士（約西元前540年），但書中沒提出根據那些考古資料。

所選擇的基線太短。要知道地球到太陽的距離，要比地球到月亮的距離大許多（以目前我們所知的數據是約380倍）。地球上的基線最長是4000哩，地球到月亮的距離約爲此基線長的60倍，這樣比例的基線長還算是可以用的。但若用這樣長的基線來測太陽與地球間的距離，其倍數會高達23000倍，相差太大了，這樣測出來的數據的誤差就無法控制了。

讓我們回來談阿里斯達朱士的測量。他要測量的是地球到太陽的距離，與地球到月亮距離的比值。所以把問題三角化最自然的方法是，把太陽、月亮、與地球上的觀察者這三點構成的三角形加以確定，如下圖所示。

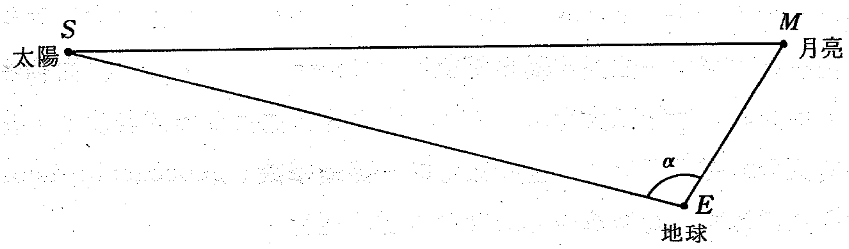

圖20 把問題三角化

這個三角形中已知的資料是什麼？那些資料可以測出來？即使我們知道$\overline{EM}$（地球到月亮的距離），而上圖中的α角也可以測出來，我們也只知道上圖中三角形的兩項資料，而確定一個三角形需要三項資料。怎樣找出第三項資料呢？想想看。

其實，阿里斯朱達士對上圖中的三角形，連兩項資料都不知道。他並不知道地球到月亮的距離，他只知道α角可以測出來。由此可以體會出阿里斯達朱士解本問題時，想出來的方法是多麼地巧妙！他的想法很單純，關鍵在於太陽、月亮與地球三點的相對位置並不固定，時時會起變化。他知道上圖中三角形另一項資料，一定要從角度上來找。於是他固定$\overline{SE}$與$\overline{EM}$，而讓M點圍繞E點旋轉。此時，$\angle EMS$也會跟着起變化。他

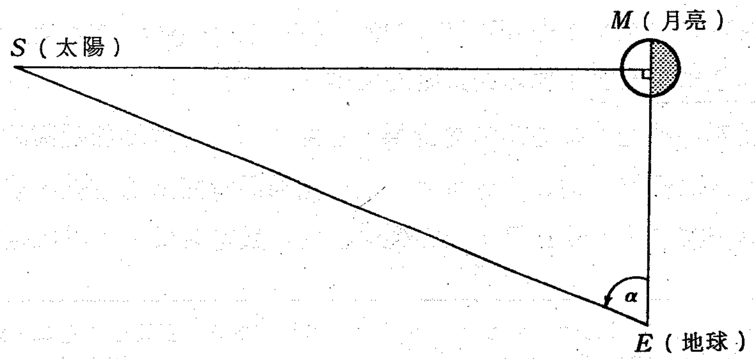

圖21 正確的三角化

問自己：當 $\angle EMS$ 是多少度時，我們容易找出 $\overline{EM}$ 與 $\overline{SE}$ 的關係呢？答案是 $\angle EMS = 90°$ 時，如上圖所示。

學過三角的讀者，很容易在上圖的情形下，寫出 $\overline{ES}$ 與 $\overline{EM}$ 的關係如下：

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{ES}} = \cos \alpha$$

而且在測出了 α 角之後，也不難隨手查表得到 $\cos \alpha$ 的數値。但想想，阿里斯達朱士並沒學過三角（他比三角學的發明早了 200年），更沒有三角函數表可以查閱。我們可以想像到，他能這樣構想來解題，實在不簡單，而且他後來的計算也一定非常辛苦。

阿里斯達朱士把問題如此設想之後，剩下來的問題是 $\angle EMS$ 何時會成直角？這個問題對他並不很難，對我們現代的一般人則很難。因爲現代人已經很少夜晚看月亮了，電視節目與各種活動佔據了我們太多的時間。但古代人，尤其是古代的天文學家如阿里斯達朱士之輩，夜晚除了看月亮星星之外，又能幹什麼？

爲什麼我們看到月亮，有時候是滿月，有時候是新月，有時候則月亮的一點影子都看不到呢？由於月亮是本身不發光的星球，我們看到的柔和月光，都是由月亮反射的太陽光。理論上，我們可以假定太陽離月亮非常之遠，所以照在月亮上的太陽光，可以視爲平行的光線。事實上，月球被太陽光所照亮的部分，比半球面也大不了多少。

如下圖所示，在 P_1 點的觀察者（假定完全透明，故不會遮住陽光照向月亮）看到的是滿月；在 P_2 點的觀察者，由於其視野包含了部分沒照明的區域，看到的是比滿月小，而比半月大的月亮；在 P_3 的觀察，由於其視野包含較少照明區域，而較多無照明區域

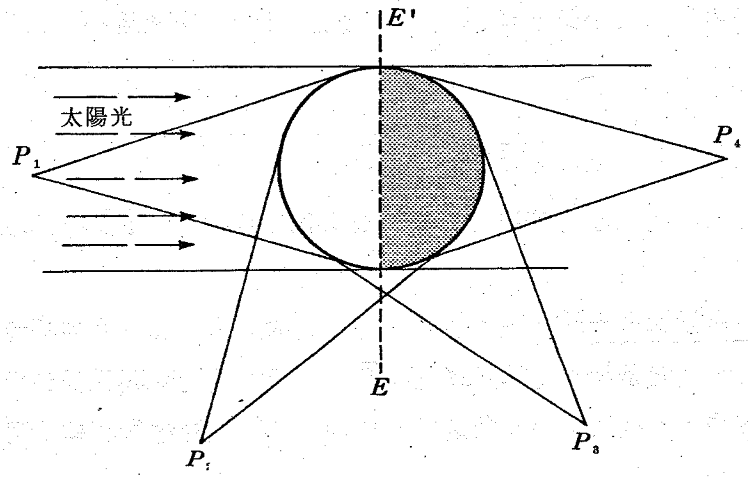

圖 22　月光的考察

，所以看到的是殘月（cresent，或譯爲新月）；在 P_4 點的觀察者，看到的是月球無照明的部分，所以看不到月亮，這就是由殘月到新月之間的時間；在那個位置（與太陽及月亮的相對位置）上，觀察者會剛好看到半月呢？

察際上的觀察者，是很難判斷在他的視野中，他是否剛好看到一半照明的區域，一半無照明區域的。但在理論上說，在上圖中的 $\overline{EE'}$ 線上的觀察者，剛好看到半月。此時，在圖21 中的 $\angle EMS$ 剛好是個直角。

當天空一碧無雲的時候，白天我們也多少能看到月球，尤其是清晨與黃昏的時分，即我們有時候能同時看見太陽與月亮。因此，我們可以找到同時看見太陽與月亮的時候，而且我們看到的月亮剛好是半月。這樣的機會並不常有，還得靠天氣幫忙（即視界很好的天氣條件），但是阿里斯達朱士就是等到這樣的時候，測量了圖 21 中的 $\angle MES$，即 α 角。

根據數學史書上的記載，阿里斯達朱士測出來的 α 角，是一個直角的 29/30，即 87°。如果我們查手頭的三角函數表，可得

$$\cos 87^\circ = 0.052$$

所以

$$\overline{ES} = \frac{1}{\cos 87^\circ} \times \overline{EM} = \frac{1}{0.052} \times \overline{EM} \approx 19 \times \overline{EM}$$

根據記載，阿里斯達朱士算出地球到太陽的距離（即 $\overline{ES}$），是地球到月亮距離（即 $\overline{EM}$）的 18 到 20 倍之間。可見他的計算，雖然沒有三角函數表可查，還算是很實在的。但他測出來的角度，則不很準確。近代有人重測，得到的角度是 89° 50′（非常之接近直角），而

$$\frac{1}{\cos 89^\circ 50'} = \frac{1}{0.0029} \approx 350$$

這個倍數，與目前我們知道的 380 倍（$\overline{EM}$ 約 240000 哩，而 $\overline{ES}$ 約 93000000 哩）才算接近。

這裡說明阿里斯達朱士的誤差，所以會這麼大的原因：其一是觀察者無法準確地確定，他所看到的剛好就是半月（即 $\overline{EM} \perp \overline{ES}$），而測量的時間又受到極大的限制（天氣好的早上或黃昏）；其二是當 α 角接近 90° 時，角度上的些微誤差（阿里斯達朱士的

測量誤差約為 2°50′)，會使餘弦函數的值得到甚大的誤差(註 10)。

§7　月球與太陽的半徑

希巴朱士(參看§2 的最後一段)是古希臘的天文學家、地理學家兼數學家。把地球的經線與緯線來分割，定出各地的經緯度以便利測量，就是他創出來的構想。這個想法後來經由孟尼勞士及托勒密的發展而完成。在托勒密的傳世名作 Syntaxis Mathematica (共 13 巨册)中，就列出了古希臘人知道的大部分地方的經緯度，這些地方的經緯度，當然與現在地圖上顯示的大不相同，因為作為基準的線不同(現在的基線是赤道為 0° 緯線，通過英國倫敦附近的格林威治天文台的經線為 0° 的經線，古希臘人還不知道有英國呢)。

希巴朱士為了測量的方便，也提出三角函數表的觀念，所以被認為是三角學的創始者。這個構想後來也是由孟尼勞士及托勒密完成，而收集在 Syntaxis Mathematica 中。這些已經在§2 略為交待，本文因不想涉及數學在地理學的應用，也不想談到三角學的發展，只好在此略過不談。希巴朱士在天文學上的貢獻是測出月球與太陽的半徑，下面讓我們看看，他是如何解決這些問題的。先談月球的半徑。

他的基本構想，還是把問題三角化。怎樣三角化呢？那三個點？由於要測的是月球的半徑，月球的球心應該是此三角形的一個頂點，而月球的半徑則應該是此三角形的一邊。地球上的觀察者的位置，當然也應該是此三角形的一個頂點，如此就構成一個三角形，如下圖所示。但是，此三角形中那些資料是可已知的，或可測出的呢？

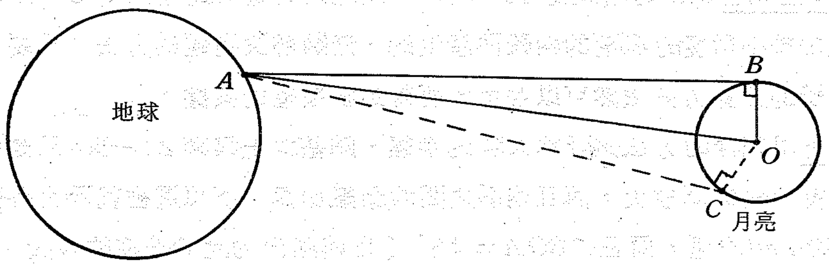

圖 23　月球的半徑，作為三角形的一邊

(註 10)　學過微積分的讀者一定非常清楚，cos x 的局部增量，就是它的微分 $-\sin x$ 的值，而 $\sin x$ 在 $x=90°$ 時取得極大值。尤其是我們要算的倍數，剛好是 cos x 的倒數，在 $x=90°$ 附近，剛好是由有限值，往∞大趨近的時候，倍數的差異才會這麼大。

地球到月球的距離$\overline{OA}$是已知的，$\angle ABO$可以假定為直角，這樣還缺一個條件。要測量的是$\angle BAO$，但此角能測量嗎？月球的球心O在那裡呢？由地球上的A點，對月球所張的視角$\angle BAC$是可以測出來的，但$\angle BAC$與$\angle BAO$的關係又如何？它們要有怎樣的關係時，才能由$\angle BAC$求得$\angle BAO$呢？

希巴朱士很快的得到答案，即A點若在地球與月球兩球心的聯心線上時（見下圖），$\angle BAO = 1/2\ \angle BAC$。他測出來的$\angle BAC = 40'$，即$\angle BAO = 20'$。現在比較精確的測量結果是$\angle BAO = 15'$，我們當然可以原諒希巴朱士的測量誤差。

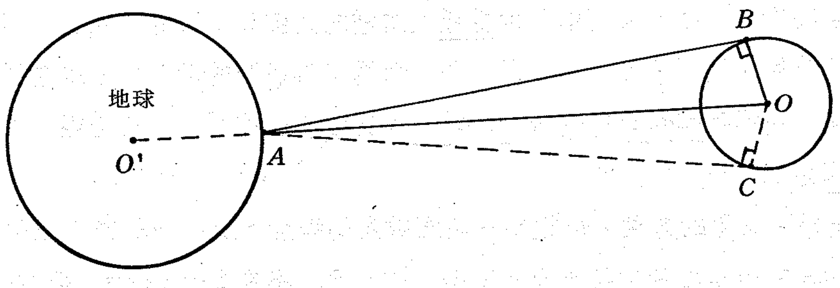

圖24　正確地三角化

有了這個測量結果後，希巴朱士開始用他的三角函數解此三角形，在直角三角形AOB中，$\overline{OA} = 240000$ 哩，所以

$$\begin{aligned}\overline{BO} &= 240000 \times \sin 20' \\ &= 240000 \times 0.0055 \\ &= 1330\ (\text{哩})\end{aligned}$$

如果以目前測出來的$\angle BAO = 15'$計算，則$\sin 15' = 0.0044$，月球的半徑應該只有1060哩。希巴朱士測出的結果是1330哩，誤差與眞值的比達到1/3。但是此項誤差的產生，是由於小角度的測量的困難而產生的，無關解決問題的方法。只要測量的儀器改進後，同樣的計算方式依然可以照用，而得到很精確的數據。

希巴朱士用同樣的方法來計算太陽的半徑，圖基本上與圖24一樣，只是代表地球的圓較小，代表太陽的圓放大，而且兩圓之間的距離加長，所以這裡就不另外給圖了。假設$\overline{AO} = 93000000$哩，而且$\angle BOA = 16'$（目前測出的比較準確的數據），則

$$\begin{aligned}\overline{BO} &= 93000000 \times \sin 16' \\ &= 93000000 \times 0.0046 \\ &= 430000\ (\text{哩})\end{aligned}$$

問題到此已經差不多解決，但是在圖24中，我們怎樣確定A點是在兩球的聯心線上

呢？如果A點不在兩球的聯心線上，則測出來的$\angle BAO$就不準確。當A點在兩球的聯心線上時，就是月球（或太陽）直照A點的時候。這樣的時刻並不很容易確定，這也可以說明希巴朱士爲什麼測出的結果有這麼大的誤差了。

希巴朱士把上述的方法，用在測量太陽與地球的距離上。在第6節中，我們談到阿里斯達朱士測出此項距離與地球到月球距離的比值，並利用此項結果來計算地球到太陽的距離。由於測量的誤差，導至計算出來的結果也不佳。希巴朱士的測法與上述的方法基本上不同，讓我們看看他的構想是如何的。

要把此問題三角化，地球到太陽的距離應該爲此三角形的一邊，地球與太陽的球心各爲此三角形的一頂點，但此三角形的另一頂點呢？爲了使得到的三角形能具備適當的已知資料，把地球的半徑當作此三角形的另一邊似乎是不錯的想法。但此半徑應該是怎麼樣的半徑呢？希巴朱士認爲，若選擇一半徑使此三角形有一直角，則問題會變得很單純（可利用三角函數的值加以計算）。於是他得到如下圖中的三角形。

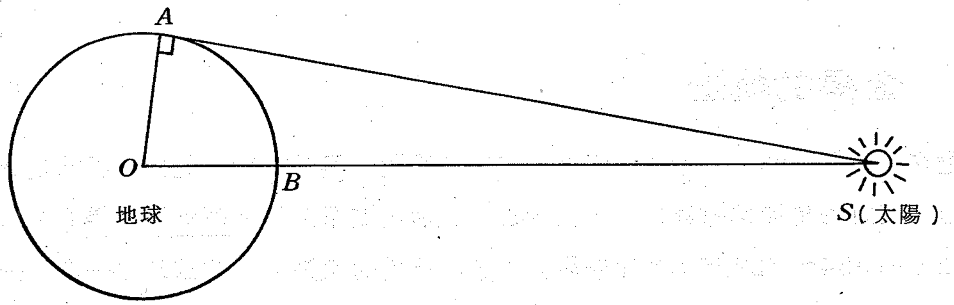

圖25　適當的三角化

在上圖中的$\angle OAS$若爲直角，則A點應該是僅僅能夠看到太陽的地點。在上圖的三角形中，有那些資料是已知，而那些資料是可以測得的呢？$\overline{OA}$可以假定爲4000哩，爲已知。若$\widehat{AB}$可以測得，則$\angle AOB$就可以計算出來。這樣，$\triangle OAS$中就有三項適當的資料可用，$\overline{OS}$也因此可以計算出來。但是，我們又怎樣知道B點（假定我們在A點觀察）在那裡？更不知道要如何測出$\widehat{AB}$的長。問題似乎不很樂觀，但希巴朱士是很有系統的幻想者，他想出了下列的解法：

希巴朱士說，假定B點在赤道上，而且選擇太陽直照赤道的時刻即每年的春分（spring equinox，約陽曆3月21日）與秋分（fall equinox，約陽曆9月21日）的正午時刻，找出A點，並測出A點的緯度（A點的緯度，就是圖25中的$\angle AOB$的度數。由於我們不想在本文中涉及測地學，緯度的測量方法在此省略）。按照現在測量的

結果，A點的緯度，即$\angle AOB$爲 $89°59'51''$。由此解出$\overline{OA}$的長爲

$$\cos\angle AOB = \frac{\overline{OA}}{\overline{OS}}$$

$$\begin{aligned}\overline{OS} &= \overline{OA} \div \cos\angle AOB \\ &= 4000 \div \cos 89°59'51'' \\ &= 4000 \div (0.000043) \\ &= 93000000 \text{（哩）}\end{aligned}$$

由於希巴朱士所處的時代，到不了現在緯度爲 $89°59'51''$ 的地方。所以希巴朱士並沒有眞的測量出來，而且希巴朱士的時代，三角函數表還很不完全，無法得到上面算式中的數值。但他提出的構想，我們現代人就可以使用了。這裡順便要提起讀者的注意，由於三角學的發展，測量的構想基本上也變得單純許多，這點可以由上面的幾個例子看出來。

§8 金星的軌道

上文中曾經談到，古希臘的學者相信繞地學說，換句話說，他們都認爲地球是宇宙的中心，其他的星球都繞着以地球爲中心的圓形軌道而運行。阿里斯多得（Aristotle，約西元前384～322年）爲此學說立下了哲學性的論點，他認爲星球一定是一個完美的形體（perfect body），因此一定是球體。而且因爲完美，所以其運動也一定是完美的運動（perfect motion），即一定是一圓上的齊一（等速）運動。這樣的論點，在現代會令有基本科學修養的讀者笑掉大牙。但他同時代的學者都認爲這樣的理由是足夠的。

行星的運轉是一個圓周上等速運動的論點，一直要等到一千七百年後，克卜勒提出行星運轉的三大定律後，才宣告滅亡。在那個時候之前，這個論點統治着天文學，而沒有多少人提出異議。一個很有趣的想法是，若阿里斯多得聽到行星的運轉軌道爲橢圓，且其中心的太陽在橢圓軌道的一焦點上，他一定會問：那什麼東西在此橢圓軌道的另一焦點上？換句話說，那個時代的人是無法接受如此不對稱（不完美）的事實的。

以地球爲中心，而各行星繞地球作圓周上等速運動的理論，其圖示如下圖。其實，由觀察星象所得的結果，並不完全吻合此項理論。所以，後來由希巴朱士、托勒密等人修正如下：一星球的運行軌道，若不是以地球爲中心的圓，則也是以其他星球爲中心的

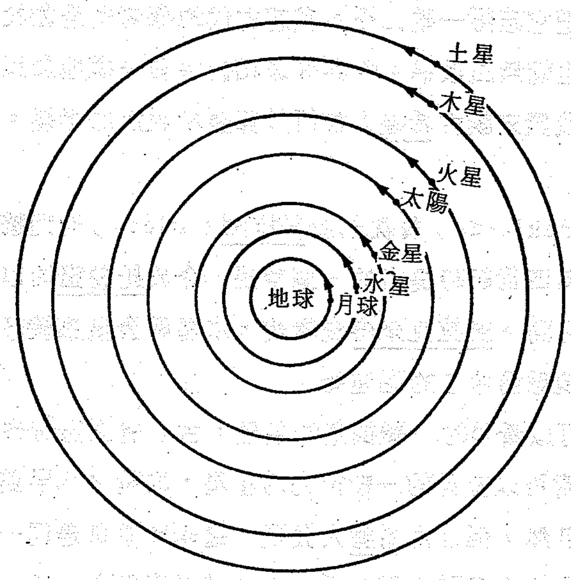

圖 26　地球為中心的運轉圖

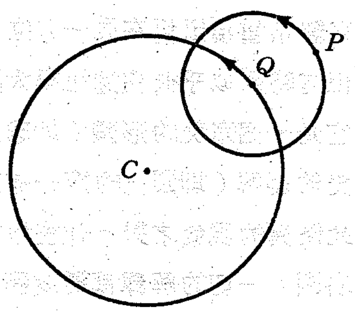

圖 27　環周小圓

圓，而此中心的星又繞着以地球為中心的圓而運行。如右圖所示，P 點繞 Q 點而轉，Q 點又繞 C 點而轉。他們稱 P 點的軌跡為**環周小圓**（epicycle）。

如果環周小圓的軌道理論，與所觀察得到的事實還不盡相符合時，他們試着以環周小圓的環周小圓來解釋所觀察的現象。如右圖所示，P 點繞 Q 點旋轉，Q 點繞 R 點旋轉，R 點又繞 C 點旋轉。圖 28 的情形是所謂兩層的環周小圓，到古希臘的後期，有人試圖利用十七層的環周小圓，來解釋所觀察到的現象。這樣的理論發展，已經完全違背了阿里斯多得當初試圖保持"完美"的運動的原意。更有甚者，這種理論已經複雜到無法計算的地步。所以，到底理論與實際觀察能否吻合，根本無從檢驗。

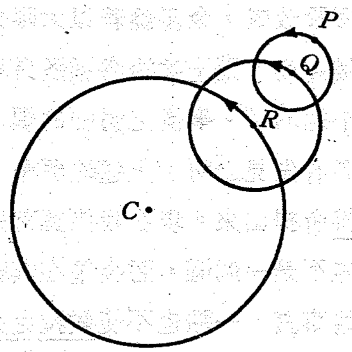

圖 28　兩層的環周小圓

筆者在年青時初次聽到這個理論時，當

然肅然起敬，然後就把它忘得一乾二淨。我想古代的學者也是如此，這樣的理論既然無法弄懂，無法檢查，也就無法改進。除非你像相信宗教一樣地加以信仰，不然是對人類毫無幫助的。下面，我們來談古希臘人如何計算金星軌道的半徑。讓我們先介紹一位古希臘的天文學家。

候拉克來得（Herakleids）曾就讀於柏拉圖（Plato）的門牆，也許也曾問難於阿里斯多得。他在西元前四世紀時提出的一個學說，介於托勒密的以地球爲中心的學說，與哥白尼的繞日學說之間。候拉克來得提議說，水星與金星都繞着以太陽爲中心的圓運轉，而太陽則繞着以地球爲中心的圓運轉。

在太陽下山時常可以看見的一顆很亮的星星，古人稱之爲黃昏之星（Evening star）；而在太陽升起時常可以看見的一顆很亮的星星，則稱之爲早晨之星（Morning star）。這樣命名似乎很自然，但當古希臘人發現，這兩顆原來是同一顆星時，他們眞是大吃一驚。這顆星就是金星（我國人稱之爲太白星或長庚星）。

金星的運轉軌道，雖然有其規律性，但也令人感到困惑。因爲由長期累積的觀察資料顯示：它經常重覆出現在同一方位上（相對於其他的定星而言）；它經常是非常接近太陽的，但有時候似乎很快速地與太陽同向而移動，而有時候却緩慢地與太陽背向而移動。如果它是一個完美的形體（即球體），繞着以地球爲中心的圓形軌道（完美的曲線），作完美的運轉（即圓上的齊一運動），則我們在地球上觀察所得的結果，不應該呈現上述如此怪異的現象才對。什麼地方出了毛病呢？

看了右圖，一切的解釋都變成顯然，即我們假定金星繞着以地球爲中心的圓形軌道運轉時，一切的毛病都出在這個假設上。如果把此假設改成，金星繞着以太陽爲中心的圓形軌道運動，則上述的各種怪異現象都再也自然不過的了。事後之明的麻煩，是它常阻礙我們有先見之明。上述的解釋，是由候拉克來得所提出來。現在我們雖然知道，金星的軌跡不是一個圓，而金星在其軌道上運動的速度也不是等速（即不是齊一的運動）。但這些事實，一點也不使候拉克來得的創見減色。令人驚訝的是，他的假設與觀察所得的事實，竟然如此相符合。

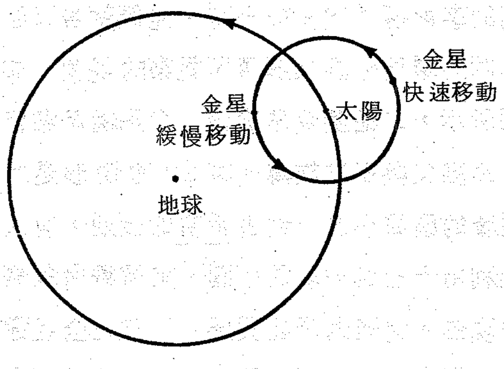

圖 29　假想的金星運轉軌道

由候拉克來得所提的第一個好的近似模型，我們可以問：假設金星的軌道是以太陽

爲中心的圓，那麼，此圓的半徑是多少？由此產生的問題是：如何決定此半徑？你要怎樣想，才能解決這個問題？請先仔細觀察下圖後，再想想看。

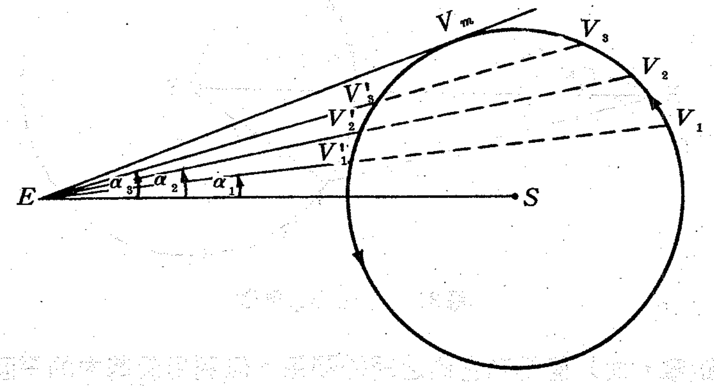

圖 30　持續的觀察與記錄，才能定出金星的極端位置

我們不難由上圖看到，金星與地球的聯線$\overline{EV_i}$，和太陽與地球的聯線$\overline{SE}$之間的夾角α_i，是隨着金星V在其軌道上的移動而改變的。特別當金星V在某些與地球相應的位置上時，有

$$\angle SEV_1 = \angle SEV'_1$$

$$\angle SEV_2 = \angle SEV'_2$$

$$\angle SEV_3 = \angle SEV'_3$$

$$\angle SEV_m = \angle SEV_m$$

即，當金星在V_m（m表示極大 maximum）的位置時，α角取得極大値。在此之前，α角是遞增的，而在此之後，α角爲遞減。但V_m在那裡呢？注意到，上圖中的弦$\overline{V_1V'_1}$，$\overline{V_2V'_2}$，$\overline{V_3V'_3}$越來越短，所以$\overline{EV_m}$是在一個極限位置上的，即爲該圓之切線。由此可知，當$\angle SV_mE$爲直角時，α角取得極大値，如下圖所示。

因爲SV與SV_m都是金星的圓形軌道的半徑，它們相等，所以

$$\frac{\overline{SV}}{\overline{SE}}=\frac{\overline{SV_m}}{\overline{SE}}$$

而且，$\triangle SV_mE$中的$\angle SV_mE$是個直角，我們有

$$\frac{\overline{SV}}{\overline{SE}}=\frac{\overline{SV_m}}{\overline{SE}}=\sin\alpha_m$$

$$\overline{SV}=\overline{SE}\cdot\sin\alpha_m$$

即金星圓形軌道的半徑，是地球與太陽的距離，乘上$\sin\alpha_m$。當然，我們還沒有充分

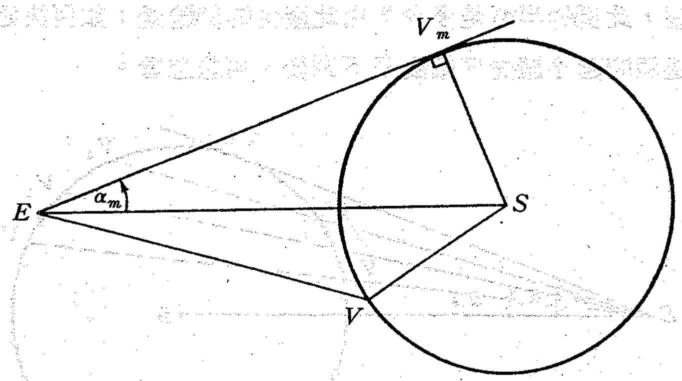

圖31 理想的三角化

的資料算出這些距離，而只能得到它們之間的關係。但利用最基本的平面幾何與三角的知識，就能得到這些結果，你不稍爲覺得吃驚嗎？

在上述的結果中，我們需要 α_m 的值。我們怎樣才能得到它？由金星在 V_m 位置時加以測量？那我們又從何而知金星是在 V_m 的位置呢？α 角取得極大值的時候？但我們又如何知道 α 角什麼時候取得極大值呢？當然，我們無法只做一次單一的觀察而得到。我們只有每天在太陽上升與下降的時分測量 α 角，常年累月地把測得的資料累積起來作比較，才知道 α 角何時由遞增變成遞減，這時的 α 角就是極大值了。科學的進步並不是一件很單純的事情，除了要有聰明的構思之外，還得加上堅忍不拔的苦幹精神。

參考文獻

1. Morris Kline, Mathematics, A Cultural Approach. Addison-Wesley, Inc., 1962.
2. Howard Eve, Introduction to the History of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
3. George Pôlya, Mathematical Methods in Science, The Mathematical Association of America, 1977.
4. Lancelot Hogben，大衆數學，徐氏基金會，1968.
5. David Dietz，科學的故事，啓明書局，1959.
6. Thomas Heath, A History of Greek Mathematics, Dover.