

# 國中生的比例概念發展<sup>(\*)</sup>

林福來 郭汾派

國立臺灣師範大學數學系

林光賢

國立政治大學應用數學系

## 摘 要

利用抽樣筆測與面談的方法，我們研究了國中生比的概念和比例的推理能力的發展情形。

本文將討論下列問題：

1. 學童處理比例問題的解題策略。
2. 比和比例的瞭解層次。
3. 各年齡群國中生對比和比例的瞭解層次分佈。
4. 比的概念與比例推理的認知需求。

同時，我們將比較我國與英國學童在比例推理能力方面的文化差異。

我們發現約有 16 % 的國中生，一再地使用一種錯誤的解法：加法策略來處理比例問題。進一步我們探討此類學生的解題特性，再根據認知衝突、具體操作圖像學習、電算器輔助學習及比例的新式皮亞傑教學法等學理，擬定了一套補救教學教案，希望能幫助加法策略者改正其不正確的比例推理方法。英國人 Hart 博士實驗成功的教案是主要參考資料。

(\*) 本研究受國科會經費補助

專題計畫編號 NSC 73-0111-S003-01  
74-0111-S003-02

## 一、研究目的

本研究的目的有三：

1. 了解國中生解比例問題的過程與策略。
2. 探討國中生比的概念與比例推理能力的發展情形。
3. 診斷比例的錯誤推理並發展補救教案。

## 二、研究理念

1. 從學生的觀點來看：概念了解是否有發展層次。〔Hart. (1981a)〕
2. 在適當的年齡條件下，學生概念了解的發展呈均勻性，並只受教學有限度的影響。  
○ (Kuchemann, 1981)
3. 了解學生思考過程與策略對教學有啓示性。
4. 促使認知與概念了解的改變，皮亞傑理論中的平衡模式與認知衝突是重要的理念。  
○〔Hart (1984), Booth (1984), Bell et al (1980)〕

## 三、研究方法與步驟

### 甲、方法：筆測與面談

爲了解全國國中生對比例的了解情形，有必要用筆測的方法。爲深入了解學生的解題過程與策略，臨床面談法比較有效。

### 乙、進行步驟

#### A. 擬定試題

1. 分析國內教材中（含國小、國中）關於比例所涉及的各種概念。
2. 研讀有關的國內、外文獻，選取適當的試題。
3. 綜合上述結果，試擬“前試測”題目，經小組討論後暫定。
4. 在臺北市進行班級性的“前試測”及選樣面測。
5. 根據“前試測”及面測的資料，修改試題。

#### B. 試測

1. 在臺北區的國中，依系統抽樣的方法，抽樣 550 位學生進行試測。
2. 從不同年齡群、不同能力群中，選樣 30 人，進行面測。
3. 試測的資料分析。
4. 根據試測的結果，再修改試題。

#### C. 全國抽樣筆測及選樣面測

1. 依分區比例抽樣的方法，在全國國中一、二、三年級的學生中抽測約 3000 位學生。

2. 選樣 45 人進行面測。
3. 資料處理、分析。

## 四、結 果

### 甲、試 題

比例概念的試題，包含兩部分：一部分是將英國 CSMS 小組的比例試題（Hart, 1981b）中國化並且部分增刪，另一部分是仿 Noelting（1980a,b）的「橘子汁問題」的姊妹題「酸梅湯問題」。

選定英國 CSMS 的比例試題，原因是將國內國中數學教材中，有關比例概念的教材整理分析後，我們發現，除了分數、相似三角形和數值三角外，CSMS 的比例試題已經涵蓋所有教材中所需的比例概念。分數涉及的範圍太廣，宜獨立於比例之外，相似三角形以更基本的相似圖形的題目取代，這已涵蓋於 CSMS 的試題中。關於數值三角，國中生要到三年級選修數學中才學得到，對於國一、二的學生而言太難，故不宜包含於試題中。

Noelting（1980a,b）以橘子汁問題測比例推理能力，他的報告完全嵌入 Piaget 的理論架構中。對照於 Piaget 的認知發展階段，Noelting（1980a,b）將比例推理能力的層次完全以 Piaget 的階段模式及代號表示。

將英國 CSMS 的比例試題跟 Noelting（1980a,b）的橘子水問題混合在一份測驗上，原意是這兩種問題雖然都是比例概念的試題，但解題的結構却有根本的差異。英國 CSMS 的試題一般而言都是求比例第四項的問題，而 Noelting（1980a,b）的橘子水問題，則是給定兩個數對，比較這兩個數對的可能的對應比的問題，例如 3 杯橘子汁對 4 杯水，跟 2 杯橘子汁對 3 杯水，那一種橘子汁較濃。這兩種不同結構的比例推理問題之間的關聯性，目前 Gagne 與 Noelting（1980）已著手研究。我們將兩種題目都選，也就是希望能分析它們之間的關聯性，同時這兩種題目也都可當作筆測的工具。〔參閱林福來（1984）〕

### 乙、學生的解題策略與錯誤分析

根據學生筆測的表現與面談的結果，將學生的解題策略，盡量依照解題時的起始想法分類，成功與失敗的策略，分別說明如下：

#### A. 成功的策略：

##### 1. 公式法（濃度概念）

利用比例公式  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  求解其中的未知項的方法。

（一致使用者  $\frac{223}{2880}$ ；國一 7，國二 29，國三 187）

##### 2. 單價法

例如：

“8人份的玉米湯，需清水2公升，要做4人份的玉米湯，需清水\_\_\_\_\_公升”。

如果想法是：

$$\text{每人份需 } \frac{2}{8} \text{ 公升，}$$

$$4 \text{ 人份需 } \frac{2}{8} \times 4 = 1 \text{ 公升}$$

那麼這答案就歸為單價法。

(一致使用者  $\frac{97}{2880}$ ；國一 36，國二 42，國三 19)

### 3. 倍數法

在上例中，如果想法是：

8人是4人的兩倍

8人需水2公升，所以4人需水1公升

那麼這答案就歸做倍數法。

(一致使用者  $\frac{112}{2880}$ ；國一 56，國二 38，國三 18)

### 4. 疊加法

在蟒蛇問題中，甲、乙、丙三條蛇身長分別是15尺、10尺、5尺，丙蛇餵兩個雞蛋，甲、乙蛇需餵幾何？學生的演算式為：

$$2 + 2 = 4$$

$$2 + 2 + 2 = 6$$

此時，學生的思考方式是“丙蛇5尺吃兩個蛋，乙蛇比丙蛇多5尺，所以要多吃2個；甲蛇又比乙蛇多5尺，所以還要再加2個”。

這種思考方式，稱為疊加法。

另一個例子：

“8人份的玉米湯需水2公升，

4人份的玉米湯需水\_\_\_\_\_公升，

6人份的玉米湯需水\_\_\_\_\_公升”。

如果學生做完4人份需1公升的水，接著想“6人比4人多2人，2人是4人的一半，所以6人份需  $1 + 0.5 = 1.5$  (公升)”。我們稱這種想法為折半疊加法，同樣歸入疊加法。

### 5. 去掉比值中1:1的等價量後，再比較。

例如：在(2,4) vs. (3,5)中

學生想法的運算式為：

$$(2,4) - (2,2) = (0,2)$$

$$(3,5) - (3,3) = (0,2)$$

$(2,2)$  比  $(3,3)$  少，同加 2 杯水後， $(3,5)$  “較酸”。

學生的說法是“甲班和乙班都多放 2 杯水，可是乙班比甲班多放一杯酸梅汁，所以乙班較酸”。

這種思考方式非常複雜，很多學生如此推理，在最後考慮時，由於水對酸性是負作用，容易搞混，常常出錯。

6. 機械式地比較  $\frac{a}{b}$ ， $\frac{c}{d}$  的大小。

例如：在  $(2,4)$  vs.  $(3,5)$  中

有些學生在回答為什麼時，作了如下的運算：

$$\begin{array}{r} \frac{2}{4} \quad \frac{3}{5} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \times 5 = 10 \\ \searrow \quad \swarrow \\ 3 \times 4 = 12 \\ 12 > 10 \end{array}$$

所以乙班較酸”

臺北區試測時，發現一些這樣的運算式，特挑出來面測，對答的紀錄如下：

師：“你為什麼這樣相乘？”

生：“要比較  $\frac{2}{4}$  與  $\frac{3}{5}$  的大小”。

師：“這樣相乘後，為什麼就可以用來比較大小？”

生：“不知道”。

..... (稍停)

生：“老師教的”。

資料處理時，特地将“直接交叉相乘，再比較大小”，的解答方式歸做機械式地比較  $\frac{a}{b}$  與  $\frac{c}{d}$  的大小。這些答案有一部分是學生只記住這種操作法，而不知其所以然。

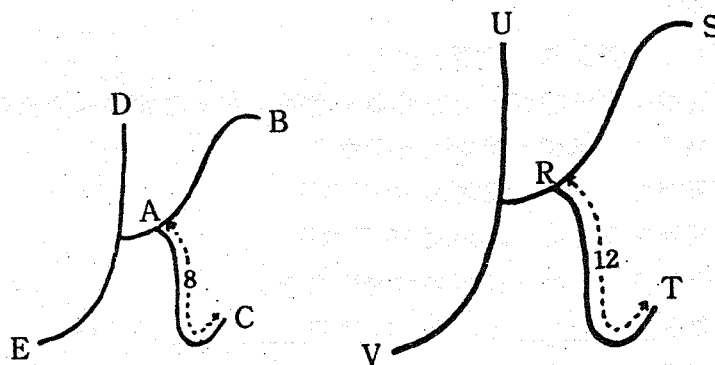
## B. 失敗的策略

### 1. 加法策略

例如：

六、下面兩個“K”字形狀一樣，但其中一個比另一個大。已知 AC 是 8 個單位長，RT 是 12 個單位長

(1) 如果曲線 AB 是 9 個單位長，那麼曲線 RS 有多長？\_\_\_\_\_



如果解題的思考方式是

“RT 比 AC 多 4，所以 RS 也比 AB 多 4，  
故  $RS = 9 + 4$ ”

那就稱此種解法為加法策略。

(一致使用者  $\frac{468}{2880}$ ；國一 198，國二 155，國三 115)

## 2. 資訊誤留

例如：

動物園中另有丁、戊、己三條鰻魚，身長如下：

25 公分 己  
15 公分 戊  
10 公分 丁

餵食鰻魚的蚯蚓長度，依照鰻魚的身長而定。

①如果丁鰻魚得到 2 公分長的蚯蚓，那麼該餵己鰻魚幾公分長的蚯蚓？

己鰻魚\_\_\_\_\_。

②如果戊鰻魚得到 9 公分長的蚯蚓，那麼該餵己鰻魚幾公分長的蚯蚓？

己鰻魚\_\_\_\_\_。

解②時，學生演算如下：

$$9 + 2 = 11$$

所以，己鰻魚吃 11 公分”。

學生的想法是“己鰻魚比戊鰻魚多 10 公分，而在①中，丁鰻魚 10 公分長吃 2 公分的蚯蚓，所以當戊吃 9 公分長的蚯蚓時，己該吃  $9 + 2 = 11$  (公分)”。

換句話說，學生解完①後，誤將“10 公分長的鰻魚吃 2 公分的蚯蚓”，這資訊保留到底下第②小題，而將原本該獨立處理的問題中的數據混用了。

資訊誤留這種行為，在解下列兩個獨立的一次方程式：(i)  $a + 3 = 8$  求  $a$  與(ii)

$x - 6 = a$  求  $x$  時，會將(ii)的答案寫成  $x = a + 6 = 5 + 6 = 11$ 。

### 3. 忽略資訊

解題時，將重要的資訊忽視不顧。例如：

五、某廠牌的綜合果汁罐頭，含有鳳梨、橘子、芒果和檸檬四種水果，綜合的方式是：

如果用 1 斤鳳梨，就該用 5 斤橘子

如果用 3 斤檸檬，就該用 10 斤橘子

如果用 5 斤芒果，就該用 15 斤橘子

在此綜合果汁中，考慮鳳梨和檸檬的成份：

如果用 \_\_\_\_\_ 斤鳳梨，就該用 \_\_\_\_\_ 斤檸檬。

再考慮芒果和檸檬的成份：

如果用 \_\_\_\_\_ 斤芒果，就該用 \_\_\_\_\_ 斤檸檬。

鳳梨和檸檬的成分，將答案寫做“1 斤鳳梨，用 3 斤檸檬”，這種答案是學生將做為媒介的橘子的用量 5 斤和 10 斤完全忽視得到的。

### 4. 加減法（數型）

不按比例增、減，而是隨意加一點或減一點來當做比例問題中的未知項。例如：

二、(1)動物園的水池中有甲、乙、丙三條蟒蛇身長如下：

15 尺 \_\_\_\_\_ 甲  
10 尺 \_\_\_\_\_ 乙  
5 尺 \_\_\_\_\_ 丙

餵食蟒蛇的雞蛋數量，依照蛇的身長而定。

(2)假如餵給乙蛇 12 個雞蛋，那麼應該餵給甲蛇幾個雞蛋？ 甲蛇 \_\_\_\_\_。

(3)假如餵給甲蛇 9 個雞蛋，那麼應該餵給乙蛇幾個雞蛋？ 乙蛇 \_\_\_\_\_。

解(2)時，演算如下：

$$12 + 1 = 13, \text{ 答甲蛇 } 13 \text{ 個。}$$

想法是甲比乙長，所以也要多吃一點，就隨意加一個。

解(3)時，演算如下：

$$9 - 1 = 8, \text{ 答乙蛇 } 8 \text{ 個。}$$

想法是甲比乙長，甲吃 9 個，乙該吃少一點，就減去一個吧！

國中生以加減法解題時，加減多少通常是由題目中的資料再配合自己熟知的數型，像 2、4、6 或 3、6、9 等所共同決定。底下這位同學是典型的例子：

學生編號：315 SF. 國三，IIA，Level II（加法策略者）

1. 二(1)① 甲 乙 丙

蟒蛇問題 15 10 5

$x$  2

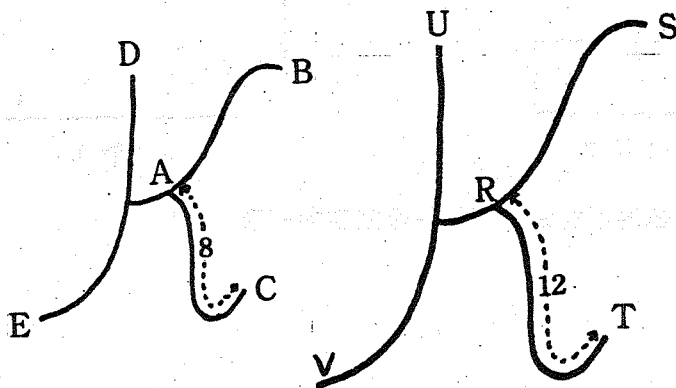
解： $x = 6$ ，因為 2、4、6。

|          |    |    |     |
|----------|----|----|-----|
| 2. 二(2)① | 丁  | 戊  | 己   |
| 鰻魚問題     | 10 | 15 | 25  |
|          | 2  |    | $x$ |

解： $x=6$ ，因為 2、4、6。

面談後發現此生上題二(1)①的答案只是剛好碰對。

3. 六(1)解：已知  $AB = 9$ ，所以  
 $RS = 9 + 3 = 12$



想法：RT 比 AC 多一倍

(一倍就是 4、8、12 中的 4)

所以 RS 也比 AB 多一倍

( $AB = 9$ ，一倍就是 3、6、9 中的 3)

六(2)解：已知  $UV = 18$ ，所以

$$DE = 18 - 6 = 12$$

想法：AC 比 RT 少一倍

(一倍就是 4、8、12 中的 4)

所以 DE 也比 UV 少一倍

( $UV = 18$ ，一倍就是 6、12、18 中的 6)

## 5. 比例項錯置

例如在綜合果汁的問題中，學生的答案是“1 斤鳳梨用 6 斤檸檬”。想法是“橘子 10 斤是 5 斤的兩倍，所以檸檬需用  $3 \times 2 = 6$  (斤)”。這就是比例項錯置產生的答案。

## 6. 圖形概念的差錯

### ① 封閉性

例：



(甲圖)



(乙圖)

甲、乙兩圖大小不同，形狀一樣，試完成乙圖。

解：(a)



(甲圖)



(乙圖)

(b)



(甲圖)

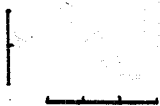


(乙圖)

兩種答案，學生都認為不封閉的不是一個完整的圖形。

② 連通性

例：



(丙圖)



(丁圖)

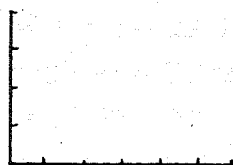
丙、丁兩圖大小不同，形狀一樣，試完成丁圖。

一般學生都忽略不連通的間距也要一起放大。

解：(a)



(丙圖)

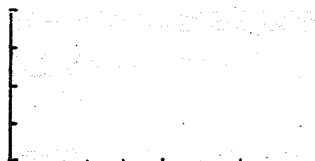


(丁圖)

(b)



(丙圖)



(丁圖)

(c)



(丙圖)

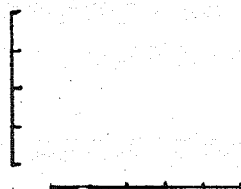


(丁圖)

(d)



(丙圖)



(丁圖)

### ③ 相似、全等混淆

例：



(甲圖)



(乙圖)

甲、乙兩圖大、小不同，形狀一樣，試完成乙圖。

解：(a)



(甲圖)

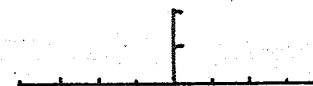


(乙圖)

(b)



(甲圖)



(乙圖)

兩種答案都是取乙圖水平線的一段，配合甲圖，畫出全等圖形。

### C. 一些個案的想法

1. 國三，林同學，屬第Ⅲ層次。

林同學對酸梅湯問題：(3,7) vs. (5,11) 這一題的說明如下：

“因兩邊各減2，甲為1:5，乙為3:9=1:3所以乙較酸”。

林同學相當一致地解每一酸梅湯問題時，都先將甲、乙兩班的數據減掉1:1的等價類，然後再比較兩班的酸度。

2. 國一，黃同學，為一錯誤樣本。

酸梅湯問題：甲 vs. 乙為(2,4) vs. (3,5)

黃同學說明如下：

“他們加的水都比本身多2杯，但甲只有2杯酸梅汁，乙却3杯酸梅汁，所以乙酸”。

這是標準減掉1:1的等價類再比較的例子。

3. 國三，高同學，屬第Ⅰ層次

酸梅湯問題，甲 vs. 乙為(3,7) vs. (5,11)

高同學的說明如下：

“因甲的兩倍多 1，乙的兩倍多 1，所以成分一樣多，所以一樣酸”。

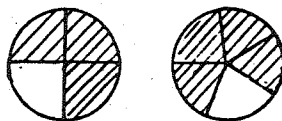
高同學的想法，涉及減掉 1：2 的等價類，即先將題目中的量降低，接著犯了加法策略的錯。

#### 4. 國二，林同學，屬第Ⅱ層次

酸梅湯問題，甲 vs. 乙為 (12, 15) vs. (6, 8)

林同學的解法如下：

$$\frac{12}{15} \frac{4}{5}, \frac{6}{8} \frac{3}{4}$$



因為  $\frac{1}{4}$  比  $\frac{1}{5}$  大，所以乙酸。

基本上，林同學是以較具體的圖形來比較分數的大小。林同學保留了學習分數時的圓形圖的影像。

根據林同學的想法，應該可得正確答案，即

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$  甲班的酸梅汁較多。

林同學錯在最後的推理，他的思考路線較複雜。（林同學的部分答案卷見附錄）

#### 5. 國二，余同學

酸梅湯問題，甲 vs. 乙為 (7, 3) vs. (14, 6)

余同學的演算說明如下：

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ 3 \overline{) 7} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.3 \\ 6 \overline{) 14} \\ \underline{12} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

因為甲的成分  $2.3 \cdots 1$ ，乙的成分  $2.3 \cdots 2$  所以乙較酸”。

顯然地，余同學錯在餘數的表示上，其實兩班的量為  $\frac{0.1}{3}$  與  $\frac{0.2}{6}$ ，應該一樣才對。

#### 6. 國二，梁同學

酸梅湯問題，甲 vs. 乙為 (5, 3) vs. (8, 5)

梁同學的說明如下：

$$5 \times 1.5 = 7.5, 3 \times 1.5 = 4.5$$

7.5 比 4.5 和 8 比 5 一樣所以一樣酸”。

梁同學解題時，先通分，再犯加法策略的錯。

7. 學生對  $a:b$  的感覺

國二，翁同學

已知  $a:b = 2:3$

問 1： $a=2, 10, 100$ ，求  $b=?$

答： $b=3, 15, 150$

問 2：求  $a^2:b^2$ ， $a+1:b+1$ ， $a-1:b-1$ ， $5-a:5-b$

答： $a^2:b^2 = 4:9$

$a+1:b+1 = 3:4$

$a-1:b-1 = 1:2$

$5-a:5-b = 3:2$

### 丙、比例概念的了解層次

A. 試題難易度（如下頁）

B. 試題層次

將一份試卷內的各個問題，分成具有難易層次的組群，英國 CSMS 小組的處理方法是，每一組群內的問題之間，需滿足下列條件：

- (a) 難易度很接近。
- (b) 題與題間的齊性係數  $\phi$  在可接受的範圍內。
- (c) 同一層次內的問題，與較易及較難的層次的問題，應該都可以連貫（link）（利用  $\phi$  值或 H 值）。
- (d) 具有共同的數學特性。
- (e) 如果一學生在某一層次中，可答對  $2/3$  以上的題目，就應該可以答對每一較簡易層次中的題目  $2/3$  以上（錯誤樣本不能超過  $7\%$ ）。
- (f) 對於不同年齡群的樣本，以上面同樣的方法分析，應該沒有大差異。

根據 CSMS 的處理原則，我們將第一大題至第七大題中的 25 個小題，分成四個組群，每一組群的難易度區間與數學特性，如下列兩表所示：

N = 2880

| 題 號      | 全 國 抽 測 難 易 度 (%) |            |            |               | 英國CSMS<br>難易度<br>(13歲~15<br>歲) | 臺北難易度<br>(一、二、三<br>年級混合) |
|----------|-------------------|------------|------------|---------------|--------------------------------|--------------------------|
|          | 國 中<br>一年級        | 國 中<br>二年級 | 國 中<br>三年級 | 混合(一、<br>二、三) |                                |                          |
| 一(1) i   | 70                | 73         | 77         | 73            | 95                             | 85                       |
| ii       | 72                | 78         | 80         | 77            | 95                             | 87                       |
| (2) i    | 54                | 59         | 67         | 60            | 85                             | 71                       |
| ii       | 52                | 58         | 66         | 59            | 78                             | 70                       |
| iii      | 20                | 24         | 35         | 26            | 26                             | 37                       |
| 二(1) ① i | 82                | 86         | 88         | 85            | 85                             | 88                       |
| ii       | 76                | 78         | 82         | 79            | 72                             | 81                       |
| ②        | 49                | 54         | 60         | 55            | 50                             | 68                       |
| ③        | 49                | 57         | 68         | 58            | 50                             | 67                       |
| ④        | 61                | 1          | 73         | 65            | 50                             | 74                       |
| (2) ①    | 47                | 49         | 58         | 51            | 50                             | 68                       |
| ②        | 32                | 39         | 50         | 40            | 30                             | 54                       |
| ③ i      | 35                | 41         | 51         | 42            | 30                             | 54                       |
| ii       | 35                | 42         | 50         | 43            | 30                             | 54                       |
| 三(1) i   | 64                | 65         | 70         | 66            |                                |                          |
| ii       | 60                | 59         | 64         | 61            |                                |                          |
| (2) i    | 50                | 48         | 55         | 51            | 72                             | 59                       |
| ii       | 46                | 44         | 50         | 47            |                                |                          |
| (3) i    | 19                | 19         | 34         | 24            | 13                             | 22                       |
| ii       | 18                | 18         | 32         | 23            |                                |                          |
| 四        | 44                | 47         | 59         | 50            | 32                             | 61                       |
| 五(1)     | 28                | 33         | 42         | 35            | 32                             | 49                       |
| (2)      | 13                | 17         | 27         | 19            | 13                             | 30                       |
| 六(1)     | 24                | 24         | 38         | 29            | 20                             | 36                       |
| (2)      | 25                | 29         | 41         | 32            | 20                             | 38                       |
| 七(2)     | 49                | 51         | 62         | 54            | 45                             | 68                       |
| (3)      | 55                | 53         | 62         | 57            | 39                             | 66                       |
| (4)      | 28                | 32         | 42         | 34            | 30                             | 60                       |
| 八(1)     | 76                | 84         | 88         | 83            |                                |                          |
| (2)      | 27                | 34         | 48         | 36            |                                | 39                       |
| (3)      | 45                | 53         | 66         | 55            |                                | 57                       |
| (4)      | 34                | 37         | 51         | 41            |                                | 41                       |
| (5)      | 29                | 39         | 55         | 41            |                                | 52                       |
| (6)      | 21                | 27         | 42         | 30            |                                | 37                       |
| (7)      | 23                | 29         | 43         | 32            |                                | 37                       |

| 層 次       | 難易度區間       | 題 號                                                         |
|-----------|-------------|-------------------------------------------------------------|
| Level I   | 65 % ~ 85 % | 一(1) i , 一(1) ii , 二(1)① i , 二(1)① ii , 二(1)④ , 三(1)        |
| Level II  | 51 % ~ 60 % | 一(2) i , 一(2) ii , 二(1)② , 二(1)③ , 二(2)① , 三(2), 七(2), 七(3) |
| Level III | 34 % ~ 50 % | 二(2)② , 二(2)③ i , 二(2)③ ii , 四 , 五(1), 七(4)                 |
| Level IV  | 19 % ~ 32 % | 一(2) iii , 三(3), 五(2), 六(1), 六(2)                           |

| 層 次       | 數 學 特 性                          |
|-----------|----------------------------------|
| Level I   | 無需求比值。含 2 倍、3 倍、一半等簡單的倍數觀念。      |
| Level II  | 比值易求。可用折半疊加法處理，像 2 : 3, 2 : 5 等。 |
| Level III | 需求比值，涉及分數或有限小數的運算。               |
| Level IV  | 需知道比例式的必要性，題目中數據複雜，或求單位比值的動機很弱。  |

各層次中  $\phi$ - 值的平均數如下：

| 層 次       | 平 均 數 | 中 位 數 |
|-----------|-------|-------|
| Level I   | 0.31  | 0.24  |
| Level II  | 0.38  | 0.36  |
| Level III | 0.50  | 0.47  |
| Level IV  | 0.51  | 0.51  |

CSMS 的報告中指出，當  $\phi$  在 0.4 左右，就是可被接受的分類。

## 丁、國中生比例概念的了解情形

### A. 各年級學生的層次分佈

比例問題的四個層次，題目數分別有 6, 8, 6, 5 題。一個學生如果會做某層次問題中的  $\frac{2}{3}$  左右，我們就稱他對比例概念的了解已到達此層次。實際的檢驗標準如下：

| 層 次  | I   | II  | III | IV  |
|------|-----|-----|-----|-----|
| 通過標準 | 4/6 | 5/8 | 4/6 | 3/5 |

如果一個學生達不到第 I 層次，即 6 題中做對題數不到 4 題，就歸到第 0 層次。

如果一個學生到達的層次有跳躍現象，例如到達第 I 及 III 兩層次，却沒到達第 II 層次，就稱此生為一錯誤樣本。

一個學生到達第 III 層次，是指他通過第 I、II、III 層的標準，餘類推。

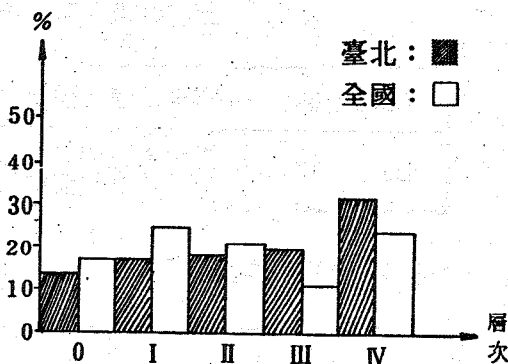
去掉約 7% 的錯誤樣本後，各年級學生的層次分佈如下：

混合（一、二、三年級）：

臺北：N = 508 人

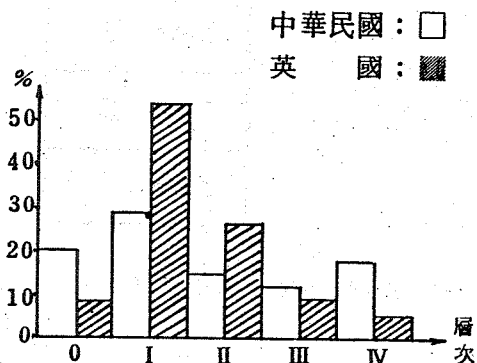
全國：N = 2880 人

| 層 次 | 0  | I  | II | III | IV |
|-----|----|----|----|-----|----|
| 臺北% | 13 | 17 | 18 | 20  | 32 |
| 全國% | 17 | 25 | 22 | 12  | 24 |



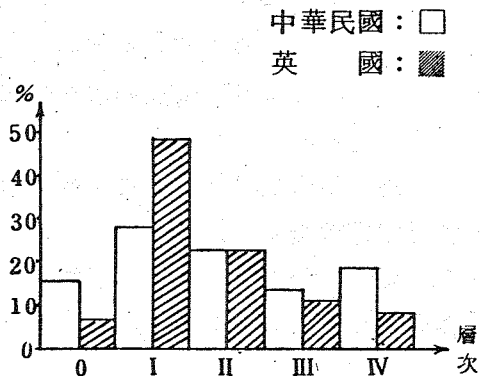
國一：

| 層 次   | 0  | I  | II | III | IV |
|-------|----|----|----|-----|----|
| 中華民國% | 20 | 28 | 14 | 12  | 17 |
| 英 國 % | 7  | 53 | 26 | 9   | 5  |



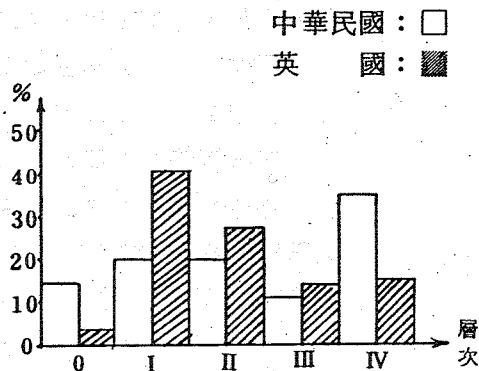
國二：

| 層次    | 0  | I  | II | III | IV |
|-------|----|----|----|-----|----|
| 中華民國% | 16 | 28 | 23 | 14  | 19 |
| 英國%   | 7  | 49 | 23 | 12  | 9  |



國三：

| 層次    | 0  | I  | II | III | IV |
|-------|----|----|----|-----|----|
| 中華民國% | 14 | 20 | 20 | 11  | 35 |
| 英國%   | 3  | 41 | 27 | 14  | 15 |



## B. 比例概念的成長

將我國國中生的比例概念的了解層次分佈圖，進一步改成下列的層次累積表：

|               | 國一   | 國二   | 國三   | 混合   |
|---------------|------|------|------|------|
| Level I 或以上   | 80 % | 84 % | 86 % | 83 % |
| Level II 或以上  | 52 % | 56 % | 66 % | 58 % |
| Level III 或以上 | 29 % | 33 % | 46 % | 36 % |
| Level IV      | 17 % | 19 % | 35 % | 24 % |

從上表中，可看出：

1. 第0層次的學生群，在國一、二、三分別有20%，16%，14%。也就是這層次的學生群，在國中階段，對比例概念了解的能力，增進的很有限，進步到第Ⅰ層或更上層的學生百分比不高。

2. 國一到國二這一年，每一層次的學生往上一層次發展的百分比，在2%到4%之間，成長相當緩慢。

3. 國二到國三這一年，成長顯著。

從第Ⅱ層起，分別有10%，13%，16%的學生群往更高層次發展。

### C. 各層次學生的案例

#### 1. Level I

例1：學生編號：219 SF      ⅡA, Level I

- 折半、疊加（第一，二(1)①題）
- 兩倍      （第三題）
- 加減2      （二(1)②，③）
- 加法策略（四、六(1)、八）
- 忽略資訊（二(2)、五、七）

例2：學生編號：223 SF      ⅡA, Level I

特點：除了兩倍外，沒有倍數概念

- 疊加法（內插法） $\begin{cases} 2 \text{ 與 } 1 \text{ 之間爲 } 1.5 \\ 4 \text{ 與 } 2 \text{ 之間爲 } 3 \end{cases}$
- 加減法一數型 2,4,6（二(1)對，二(2)錯）
- 加法策略（四）
- 實測（K字問題）

答： $RS=5$ ，量得4，拉長得5。

#### 2. Level II

例：學生編號：122 HS      Level II

- 加減法（二(2)、六(2)）
- 單價法（二(1)②、③）
- 不連通的部分保長（三(2)）
- 加法策略（三(3)、六(1)）
- 高矮先生問題：

答：6個。

說明：因為火柴是直的，但迴紋針是一個圈一個圈的，假如把迴紋針拉直，差不多也跟火柴一樣直。

- 比例項錯置 (五)
- 沒有百分率的概念 (七)
- 酸梅湯問題：

(1) 甲班 vs. 乙班為 (2,2) vs. (3,3)

答：乙班較酸。

因為乙是 3 杯酸梅對 3 杯水，但酸梅有酸性，水卻沒有滋味，所以用下去還是酸梅比較酸。

(2) 甲班 vs. 乙班為 (12,15) vs. (6,8)

答：甲班較酸。

因為甲班 12 杯酸梅 15 杯水，我們假如拿乾乾的一粒酸梅在吃，酸的要命，所以甲班比較酸。

### 3. Level III

例：學生編號：103 SF      III B, Level III

- 單價法 (一、二(2)、四、五)
- 倍數法 (二(1)①, ②, 六(1))
- 加法策略 (二(1)③)
- 比例項錯置 (六(2))
- 在同樣多杯酸梅汁下，比較甲、乙的水。

### 4. Level IV

例 1：學生編號：305 LJ      III B, Level IV

特點：一致地以“公式法”解題。

例 2：學生編號：207 SF      III B, Level IV

- 公式法 (四、六)
- 單價法 (一(1)、一(2)、二(2))
- 連比法 (二(1))
- 疊加法 (一(2) iii)
- 倍數法 (三)

## 戊、比例推理的認知需求

本節中，我們將根據這次實驗的資料，討論影響學生進行比例推理的一些因素。

### A. 概念結構

比例問題的概念結構就是比值。Noelting 研究比例推理能力時，採用的工具是固定試題的結構，每一道題目的情境都是比較兩壺橘子水的橘子味道的濃淡，而將比例概念的結構，即不同的比值，當做變因，此變因再配合受測者的解題策略，就組成一套可以檢驗 Piaget 認知發展理論中各個操作期的工具。

Noelting 的研究是一個很具代表性，純粹以概念結構當變因的比例推理能力的研究方式。

此次全國抽測，試卷上的第八大題就是 Noelting 模式的問題。七個小題間只有比值是變數，這七小題全體樣本的難易度，由小而大排列如下：

30, 32, 41, 41, 55, 83

這數列中各項間的差值，就是比值的變化對我國國中生比例推理能力的影響。

比值的變化，影響國中生比例推理能力，從試卷上的第一到第七大題的難易度，也都可以看出。例如第一大題的(1) ii 與(2) ii，唯一的變因也是比值，如下表：

| 題 號     | 數 學 式           | 比 值     | 難易度 |
|---------|-----------------|---------|-----|
| —(1) ii | $8 : 4 = 4 : x$ | $2 : 1$ | 77  |
| —(2) ii | $8 : 6 = 4 : x$ | $4 : 3$ | 59  |

難易度相差 18 %。

#### B. 試題結構

##### 1. 數的種類

例如，—(2) i 與—(2) iii。這兩個試題情境一樣的問題，其關係如下：

| 題 號      | 數 學 式                     | 概念結構    | 難易度 |
|----------|---------------------------|---------|-----|
| —(2) i   | $8 : 6 = 2 : x$           | $4 : 3$ | 60  |
| —(2) iii | $8 : 6 = \frac{1}{2} : x$ | $4 : 3$ | 26  |

這兩題的變因，只有 2 與  $\frac{1}{2}$  的差別，可是對全體國中生而言，難易度相差高達 34 %。

國一、國二、國三各年級，此二題的難易度差，分別是 34 %，35 %，32 %。由此可知，這兩題中整數與分數（或小數）的變化，對各年級學生的比例推理能力的影響差不多一樣。

##### 2. 試題的表現方式

###### (i) 具體性

例如，三(1)與三(2)這兩題，關係如下：

| 題號   | 給定圖形                                                                              | 數學式             | 概念結構 | 難易度 |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------|-----|
| 三(1) |  | $4 : 8 = 2 : x$ | 兩倍   | 66  |
| 三(2) |  | $3 : 6 = 2 : x$ | 兩倍   | 51  |

這兩題的唯一變因，就是要求補畫相似圖形時所給定的圖形的差異。三(1)這圖對學生而言較具體，三(2)則較難以掌握，兩題的難易度相差 15 %。

## (ii) 蟒蛇問題與 $K$ 字問題

例如，二(1)②與六(1)，兩題的關係如下

| 題號    | 數學式                | 概念結構        | 難易度 |
|-------|--------------------|-------------|-----|
| 二(1)② | $10 : 15 = 12 : x$ | 約分, $2 : 3$ | 55  |
| 六(1)  | $8 : 12 = 9 : x$   | 約分, $2 : 3$ | 29  |

這兩個問題的數學式與概念結構差異極微，造成難易度相差 26 % 的原因，主要是兩題的表現方式。我們將此差異分成下列幾點來談：

### (a) 內在量與外在量

蟒蛇問題中，所要求的是吃雞蛋的個數，對於蟒蛇而言是身長以外的外在量。

$K$  字問題中，所要求的是  $K$  字中的某一部分的長，對於  $K$  字而言是其內在的量。

外在量的分配是學生比較習慣，常常處理的問題。這是造成外在量的分配較容易的原因之一。

### (b) 疊加性

在蟒蛇的問題中，答案可以經由疊加法求得，即要求 15 尺的蟒蛇所吃的雞蛋個數時，只要將 5 尺與 10 尺蟒蛇所吃個數相加即可。

$K$  字問題，答案無法利用疊加法求得，小的  $K$  字加上它的一半，並不會變成較大的  $K$  字。實際上，從兩個相似的  $K$  字，根本難以引起小的  $K$  字疊加成大的  $K$  字的想法。

### (c) 單價法

蟒蛇問題，學生有 9 % 以單價法求解。以 5 尺（或 1 尺）蟒蛇所吃的雞蛋數，當單位比值是很自然的想法。

$K$  字問題，由於是求  $K$  字的一個內在量，兩個  $K$  字間兩段已知長的曲線，無法促成以單價法解題的聯想。

本實驗，試卷內的試題情境力求生活化。題目的安排次序，大題之間由易而難，每一大題中的各小題也都由易而難排列。希望試題情境的設計與題目次序的安排，都對學生的比例推理能力有正面的影響。

## 己、中英學生比較

### A. 試題難易度的比較

英國 CSMS 測得的難易度分佈於 13 % 到 95 % 之間，在 50 % 到 72 % 間出現明顯的斷層。

我國測得的結果，試題的難易度分佈於 19 % 到 85 % 之間，沒有顯著的斷層現象。

將相對的問題，我國學生的答對率減去英國學生的答對率所得的數列，表示於下表。

觀察下表，可以看出：

(i) 最簡易的比例問題，英國學生比我國學生表現好很多。

下表中，數據—18 到—25 所對應的試題，就是英國學生表現遠優於我國學生的問題。這幾題的題號分別是一(1)~(i)，(ii)；(2)~(i)，(ii)及三(2)。問題中涉及的比例概念是 2 倍及一倍半的操作，且解題時，只需進行小的整數的運算，屬於比例問題中最簡易的。

| 區 間       | 難 易 度 的 差 值        |
|-----------|--------------------|
| 15 ~ 19   | 15, 18, 18         |
| 10 ~ 14   | 10, 11, 12, 12, 13 |
| 5 ~ 9     | 5, 6, 7, 8, 9, 9   |
| 0 ~ 4     | 0, 0, 1, 3, 4      |
|           |                    |
| —20 ~ —16 | —19, —18           |
| —25 ~ —21 | —25, —22, —21      |

造成這種現象的原因，值得進一步探討，以下是其中的部分因素。

#### (a) 解題習慣的問題

在第一大題的(2)中，如果直接由 8 人份所需的水來求 6 人份所需的水，以公式法單價法或倍數法解題，就涉及比值  $\frac{4}{3}$ ，這是相當難的比例概念。如果以折半疊加法來處理，將 6 人看成是上一題 4 人的一倍半，那就簡單多了。根據表(二)知，以疊加法解題的學生只占 1 %。可是在英國 CSMS 的報告中，英國“大部分的學生以折半疊加法”〔Hart. (1981), P.90〕解此題，解題方法不同，使本題的難度發生變化。

資料處理時，發現我國學生以公式法、單價法及倍數法解此題的學生有  $\frac{1}{4}$ 。可能我國學生比較習慣在紙上列演算式計算，解題的習慣偏機械化，比較不習慣在腦中思考、推理，直接解出答案。

## (b) 操作型試題

第三大題(2)，只涉及 2 倍的簡單比值，但我國答對率只 51 %。

本小題中的圖形是相離的縱、橫兩線段，如果這兩線段連接在一起，就變成三(1)了。三(1)與三(2)的答對率相差 15 %，可見相離造成的影響很大。

操作型的問題，國內教學時較少處理。反觀英國，在她們的教材中，有很多操作型的問題。(例如，SMP 教材)這也是造成我國學生因較不熟悉試題的情境，而表現較弱的原因。

## (c) 應用題

第一大題是個生活化的問題，對我國學生而言，這是一個應用題。文字敘述題向來是國內學生較懼怕的，尤其是低成就的學生更甚，這也是造成表現弱的原因。

反觀英國，她們平常教學相當強調解題活動 ( Problem-solving )，較能接受文字敘述題。

## (d) 放棄數學

資料處理發現空白或亂猜的答案，在一(1)，(2)及三(2)共 5 個小題的百分比分別是：25 %，22 %，37 %，39 %，35 %。

這些人中，可說絕大部分是放棄學習的，可能看到此份包含數字的試卷，就想成是數學，數學則早已是放棄的科目。否則普通的國中生，看懂第一大題的題意來作答，至少第(1)小題是可以輕鬆地解出的。

(ii) 大部分比例試題，我們學生比英國學生表現稍好。

除了上述的一(1)，(2)及三(2)外，其餘問題我國學生都比英國學生表現稍好。

我國學生高英國學生最多的是兩個相差 18 % 的問題；四及七(3)。

第四題，以高先生與矮先生為背景的問題，在臺北區試測後，就發現同樣的現象。

第七題的(3)，英國學生的失誤類型中，有一種是學生一看到百分比的題目，直覺的反應就是進行除以 100 的運算。以本小題為例，學生的解法是  $\frac{800}{100} \times 24 = 192$ 。這種錯誤的

百分比在英國有：

| 13 歲羣 | 14 歲羣  | 15 歲羣 |
|-------|--------|-------|
| 7.4 % | 10.4 % | 8.8 % |

反觀我國，在臺北區試測及全國抽測試閱的 200 份卷子中，這種差錯發生的頻率微乎其微，因此在答案類型中，根本沒有列入。

英國學生此種特異行為的表現，可能是造成兩國學生此題答對率相差 18 % 的原因之一。

第二題的(1)－④連比問題，全國抽測時的問題已將英國CSM'S 的原題修訂過，本不

能直接比較。我們將其放在一起只供參考，兩者都是照 1 : 2 : 3 的連比做分配的問題。

除了上述兩道我國答對率高於英國 18 % 及英國遠優於我國的最簡易題外，其餘占大多數的 17 個試題，我國學生的表現都略優於英國學生，答對率的差，從 0 到 12 %，呈均勻分佈。

(iii) 試題根據難易度大小所排出的題目次序，我國與英國相當一致。

#### B. 了解層次的分佈的比較

(i) 第 0 層次的百分比，我國遠高於英國。

三個年級在第 0 層次的學生百分比，我國比英國分別多 13 %，9 %，11 %。這種現象絕不是因我國學生的資質比英國學生差很多的緣故。很值得深究其中的道理，學生的解題態度，我們對低成就學生的教育，考試導向的教學方法……等，都是可能的原因。

(ii) 第 I 層次的百分比，英國遠高於我國。

三個年級在第 I 層次的百分比，英國比我國分別高 25 %，21 %，21 %。

如果將第 0 層次及第 I 層次的學生歸做低成就的學生群，那麼我國與英國的百分比有：

|      | 一年級 | 二年級 | 三年級 |
|------|-----|-----|-----|
| 中華民國 | 48  | 44  | 34  |
| 英 國  | 60  | 56  | 44  |

英國的低成就羣，各個年級都高我國 10 % 以上。英國的低成就羣集中在第 I 層次，也就是大部分低成就的學生還是可以成功地處理有關 2 倍、3 倍或一半等倍數簡單，數值也簡單的問題，可是我國學生就不見得。

英國中學教育，各科能力分組上課是普遍的方式，透過能力分組上課，教給學生可以學會的教材，培養他們基本的解題信心，可能是我國與英國低成就羣的分佈差異的原因之一。

(iii) 高層次的學生羣我國遠多於英國。

比例概念較深的第 III、第 IV 層次，我國的學生羣比英國多。尤其是最高的第 IV 層次，我國高英國的百分比，一、二、三年級分別為 12 %，10 %，20 %。

如果將第 III 及 IV 兩層次的學生羣視為高能力羣，那麼兩國學生的百分比為：

|      | 一年級 | 二年級 | 三年級 |
|------|-----|-----|-----|
| 中華民國 | 29  | 31  | 46  |
| 英 國  | 14  | 21  | 29  |

## 庚、加法策略羣

在  $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$  的比例問題中，如果以  $d = c + (b - a)$  的方法求第四比例項，就稱此種解法為加法策略。

在比較  $\frac{a}{b}$  與  $\frac{c}{d}$  的比值的問題中，如果從  $b - a$  與  $d - c$  的大小關係來判斷  $\frac{a}{b}$  與  $\frac{c}{d}$  的大小，同樣也叫做以加法策略解題。

換句話說，加法策略就是以加、減代替乘、除求解比與比例問題的一種解題方法。

加法策略可說是處理比例問題時，最常見的一種失誤，在許多比例問題中，我國學生以加法策略處理的，占總人數的 1/4 左右。（參閱林福來等 (1985), P.16-17）。

我們選加法策略出現頻率較高的下列九題當檢驗工具。將其中 6 題或 6 題以上，都使用加法策略解題的學生羣，叫做“加法策略羣”。

九題的題號為：

三(3)，四，六(1)，六(2)，八(2)，八(4)，八(5)，八(6)，八(7)。

(1) 各年級加法策略羣的百分比如下：

| 年級 \ 題數 | 至少六題 |
|---------|------|
| 一年級     | 20.8 |
| 二年級     | 16.1 |
| 三年級     | 11.9 |
| 全體      | 16.3 |

從上表可看出，三個年齡的加法策略羣共占全體的 16.3%。隨著年齡的增長，每年遞減約 5%。

(2) 加法策略羣在各年級的分佈，如下表：

|     | 加法策略羣人數 | 百分比 (%) |
|-----|---------|---------|
| 一年級 | 198 人   | 42.3    |
| 二年級 | 155 人   | 33.1    |
| 三年級 | 115 人   | 24.6    |
| 全體  | 468 人   | 100     |

(3) 加法策略羣的了解層次分佈如下表：

| 年級 \ 層次 | 0    | I    | II   | III  | IV  | 合 計   |
|---------|------|------|------|------|-----|-------|
| 全 體     | 14.1 | 40.4 | 34.0 | 10.3 | 1.3 | 100 % |

由上表可看出，各年級的加法策略羣有 70 % 以上集中在第 I，II 兩層次。

最高的第 IV 層次中，各年級都還有少數幾位是加法策略者。

第 0 層次的學生，也有 14.1 % 很一致地使用加法策略解比例問題。這跟英國 CSMS 所測得的結果不同，英國學生屬於第 0 層次的，多不會以加法策略解題。

(4) 各年級“加法策略羣”的地理環境分佈：

| 年級 \ 地域 | 城 市            | 鄉 村              | 偏 遠              | 合 計 |
|---------|----------------|------------------|------------------|-----|
| 一年級     | 22             | 30               | 8                | 60  |
| 二年級     | 23             | 17               | 7                | 47  |
| 三年級     | 15             | 19               | 7                | 41  |
| 全 體     | 60<br>( 16 % ) | 66<br>( 13.4 % ) | 22<br>( 13.9 % ) | 148 |

註：( ) 內的數指占各地區總樣本的百分比。

從上表可看出，加法策略羣並不受地理環境的影響，在城市、鄉村與偏遠地區，所占百分比都很接近。

### 辛、診斷與補救教學構想

一般來說，學生處理某種概念的問題時，如果某一特定型式的錯誤在所有錯誤中占有極高比率，比如說超過一半，那麼此種錯誤就有必要進一步探討其成因與特性，然後設計教案進行補救教學，加法策略就是需要診斷、補救的錯誤。

#### A. 加法策略的成因

向來研究比例推理能力的學者，都發現過加法策略這種案例。而且很重視加法策略這種思考方法。

Piaget 與 Inhelder ( 1958, PP.164-181 ) 在“平衡桿”的實驗報告中，曾指出加法策略是具體操作後期 ( II B ) 的特徵之一。Noelting (1980) 在「橘子水問題」的實驗中發現除了形式操作後期 ( III B ) 的人外，其他各層次的人都可能使用加法策略。

加法策略到底是認知發展的一個階段，還是一種錯誤的解題策略而已呢？

Karplus (1970) 在其「高先生、矮先生」的實驗中，由於在七個不同國家的實驗結果

，發現屬於加法策略這一層次的人數不夠多，由此認為加法策略不該是認知發展過程的一個階段（Hart, 1981a）。

Karplus, Pulos 和 Stage (1980) 提出，面對比例問題時學生所使用的方法，有時是爲了克服題目的障礙。學生可能因題目型態的影響，促使他們使用加法策略。這種看法對我國學生而言，是可以驗證的，像 *K* 字題，就是此種題目類型。另外，從我們跟學生的面談中，也可證實這一點。

在臺北區試測時，一位國三學生，她除了三(3)這題產生困擾外，整份卷子都答對，面測紀錄片斷如下：

師：妳在旁邊計算  $\frac{5}{3} = \frac{x}{2}$ ， $x = \frac{10}{3}$  怎麼把它擦掉，而把答案寫成 4 呢？

生：3 格對 5 格，比不出來，除不盡啊！題目中說兩個圖形一樣，所以我想己圖是戊圖的放大，可是那裡有人放大小數倍的？所以都用少一格的做法，2 比 3 少 1，4 也比 5 少 1。

這位同學爲了克服圖形放大一定是 2 倍、3 倍、一倍半等的成見，促使她使用加法策略解題。

Hart 從學生的錯誤分析中發現，以加法策略解題的學生，主要受了「乘就是重覆相加」的既存觀念所支配，所以習慣用加法代替乘法做運算。Hart (1984) 在她的研究計畫 SESM 中，也在做加法策略的補救教學策略，顯然 Hart 也認為加法策略是一種錯誤的解題方法而已。

#### B. 加法策略者的解題特性

(1) 可處理一半、2 倍、3 倍等簡單倍數的比例問題。

根據加法策略羣，對第一大題玉米湯與第二大題鰻魚、蟒蛇問題的筆試所測得的資料，加法策略羣中有 69 %  $\left(\frac{2}{2}\right)$ 、89 %  $\left(\frac{1}{1}\right)$  與 80 %  $\left(\frac{1}{1}\right)$  分別會做折半、兩倍與三倍的問題。

(2) 不會求比值。

因爲加法策略羣約有 88 % 在第 0，I 或第 II 層次，這兩層次的問題，不求比值也可處理，因此對於上述(1)、(2)中的簡易比值還會求，但對於“3 如何變成 5”或“7 如何變成 3”的比值問題就不會求。

(3) 不會分數運算。

下面兩個案例都是面測的結果。

例 1：學生編號 218SF，國二，II B，加法策略者。

特點：分數運算只會加減，乘除仍以通分運算。

$$4 \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

例 2：學生編號：220SF，國二，II B，L.2（加法策略者）

特點：分數加、乘均錯，不會化成小數。

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{3 \times 2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{3} = 0.6$$

$$\frac{1}{3} = 0.25$$

例 3：學生編號：319SF，國三，II B，加法策略者。

分數運算不會

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{15}$$

比例錯置

3 是 2 的  $\frac{2}{3}$  倍

(4) 逃避乘法

例 1：學生編號：319SF，國三，II B，加法策略者。

在鰻魚問題中，5 公分的鰻魚餵 3 公分的蚯蚓，25 公分的鰻魚餵  $3+3+3+3+3=15$

例 2：學生編號：319SF，國三，II B，加法策略者。

在高、矮先生問題中，6 分給 4，得 1 剩 2，2 分給 4，得  $\frac{1}{2}$ ，所以 1 火柴 =  $1 \frac{1}{2}$  迴

紋針，6 根火柴為  $1 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} = 9$ 。

### C. 補救教學的構想

根據加法策略者的解題特性，設計教案進行補救教學，目前正在進行中。

Piaget 理論中的平衡模式與認知衝突是促使認知概念改變的有效過程。教案的設計，一直遵照此理論。

Gold (1978) 曾根據 Case (1975, 1978) 的新式 Piaget 教學法，進行比例單元教學實驗。除了認知衝突與平衡模式外，Case 強調：

- (1) 立即回饋；即學生必須有資源自己檢查自己的答案是否正確。
- (2) 學生必須能感覺到，為何他的策略解題無效，而被教的策略解題成功，必要時可跟老師討論。
- (3) 減少學習中的記憶量至最低。

Gold 教比例問題的方法是以關鍵概念“對每一”(for every)當做解題策略，而不用特別的計算法。如此，學生在學習中的記憶量自然減至最低，符合 Case 強調的原則。

因此在整個補救教學過程中，一律以單價法或倍數法來教比例問題的解法。問題情境則以圖形的放大、縮小為主。

江南青(1984)曾根據此理念在台北市進行小型教學實驗。有關補救教學的實驗，將另文報導。

### 參考資料

1. 江南青(1984)：比例概念的診斷與補救，師大碩士論文。
2. 林福來(1984)：青少年的比例概念發展，科教月刊，73期 pp. 7-26。
3. 林福來、郭汾派、林光賢(1984)：國中生的比例概念發展，國科會專題研究計畫報告，計畫編號：NSC 74-0111-S003-02。
4. Bell et al (1980): A Review of Research in Mathematical Education, Section A: Research on Learning and Teaching, Shell Centre for Mathematical Education, univ. of Nottingham, June pp. 149-161.
5. Booth, L. (1984): Algebra: Children's Strateges and Errors, NFER-NELSON.
6. Gagné, L. & Noelting, G. (1980): The Development of Proportional Reasoning in Four Different Contexts, P.M.E. (TV), pp. 126-135.
7. Hart, K. M. (1981a): Hierarchies in Mathematics Education, ESM, V. 12, #2, pp. 205-218.
8. Hart, K. W. (ed. 1981b): Children's Understanding of Mathematics: 11-16, John Murray, London.
9. Hart, K. M. (1984): Ratio: Children's Strateges and Errors, NFER-NELSON.
10. Karplus, R. & Petersen, R. (1970): Intellectual Development Beyond Elementary School 11. Ratio, a Survey, Science Curriculum Improvement Study, Lawrence Hall.

of Science, University of California, Berkley. May.

11. Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. K. (1980): Early Adolescents' Structure of Proportional Reasoning; in Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley, California. pp. 136-142.
12. Küchemann D (1981): Cognitive Demand of Secondary School Mathematics Items, E.S.M., 12, pp. 301-316.
13. Noelting, G. (1980a): The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part I — Differentiation of States, Educational Studies in Mathematics, V. 11, #2, pp. 217-253.
14. Noelting, G. (1980b): The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part II — Problem Structure at Successive Stages; Problem-Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring, Educational Studies in Mathematics, V. 11, #3, pp. 331-363.
15. Piaget, J. & Inhelder, B. (1958): The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence, Basic Books, Inc., U.S.A.