古希臘人的天文測量（上）（註1）

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

§1　為什麼古人要作天文測量

對古代人類而言，大自然中充滿了易怒而不可測的鬼神。人類一旦冒犯了它們，就施以無情的報復與懲罰，諸如狂風暴雨，閃電雷擊，山崩地裂，洪水海嘯等，都是人類無可抵禦的災難（註2）。命運是如此的無常，使人類對有規律的事物，感到特別的珍惜與安慰。在自然界的現象中，許多有明顯的規律可循。對這些規律的考察與掌握，就是文明的起源。下面舉例略述：

一個地區的天氣，也許在短期內變化莫測，驟冷驟熱，睛雨不定，容易使人不適而生病。但長期的觀察與記錄，使古人知道氣溫的變化也有其規律，這就是春、夏、秋、冬四季的周期更替。這種規律後來發展成為曆法，使農人知道何時播種，何時收成，而成為農業社會中人類生活的規範。

月亮的盈缺，其規律特別明顯。如果從一次月圓到第二次月圓，當作時間的單位（一月，英文為month，由moon月亮而來），則一年的四季約略每季三個月，一年12個月。這就是陰曆（我國古代稱月亮為太陰），或農曆（因與農業的密切關係，故名）的由來。後來人類發現，要製出準確的曆法，就得對日、月的運轉規律，作詳細的觀察計錄與計算。古埃及人按太陽運轉的周期製出太陽曆，一年是365天（有些考古證據顯示

（註1）　本文是由筆者於民國73學年下學期，在台北市和平國中一年級數學資優班，講授的數學補充教材的一部分改寫而成的。

（註2）　可由各古代文明的神話傳說得到印證。參看中國神話故事，河洛出版；及古希臘神話故事，坊間有數種可供參考。

，古埃及的僧侶知道一年爲 365 ¼天，但他們密而不宣。詳情請參閱徐氏基金會出版的大衆數學）。

日出與日落明顯地定出了白天與黑夜。古人日出而作，日入而息，即是照此規律而生活。但同一地區，在不同的季節裡，白天（或黑夜）的長度會有所不同，然而却依四季而呈規律的變化：夏至（約每年的陽曆6月21日）時白天最長，而後白天漸短，到冬至（約每年的陽曆12月21日）時白天最短，而後白天漸長。

製定曆法，需要準確地定出一天的長短（即眞太陽日的長短）。古人沒有現代人這樣製作精確的器具，他們怎樣定出一天的長短呢？從什麼時候算起，到什麼時候爲止，才算是一天呢？若從日出到第二天的日出，則日出的時候會隨季節而變化，這樣定顯然不好；從日落到第二天日落，也因同樣的理由而不佳。現代人的一天是從午夜算起，到第二天的午夜爲止。但午夜的時刻，是大部分人類（尤其是古人沒有方便的照明設備）在睡眠的時候，而且沒有明顯的天象標誌，作爲測量的基準，若沒有現代人這樣精確的鐘錶，是無法定出來的。

古人定出一天的時間時，是由前一天的“日中”到第二天的“日中”來計算的，日中就是正午的時刻，我國古代在早期的農業社會時，常“三（或五）日一市，日中而市”就是因爲正午是最容易準確定出來的時刻。正午怎樣定呢？只要你在水平的地面上（你知道怎樣測水平嗎？想想看），插上一枝鉛直的標竿，觀察標竿在日光下的影子，當影子最短的時刻，就是正午。後來有人注意到垂直於水平面的標竿，在陽光照射下的影子，其長短與位置有一定的變化規律。於是古人利用此規律製成了日規（或日晷，sundial）如圖1所示，現代人鐘錶的鐘面就是仿照日規而製成的。

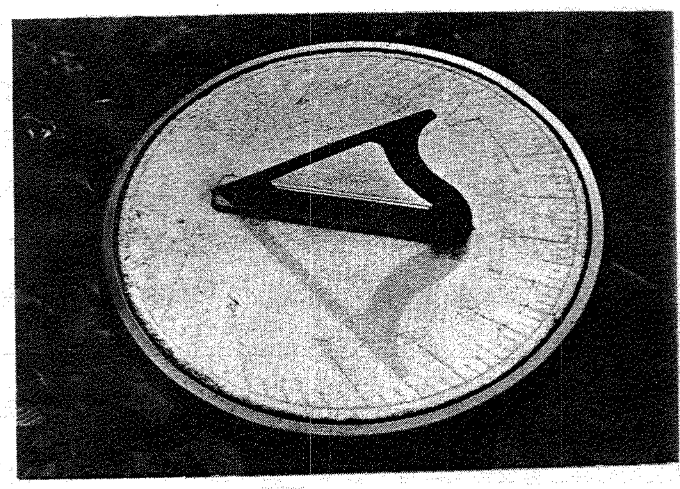

圖1　日規

太陽與月亮每天固定地從一定的方向升起，古人稱之爲東方，它們也固定地從一定的方向下降，古人稱之爲西方。古人利用這個規律定出了方位，在認路及與人互相溝通的時候非常方便。但是古人也注意到，日出與日落的方向，雖然大致上相差不多，却不是一成不變的。如圖 2 所示，連續三天在不同一地點拍攝的日出照片，顯示出日出的位置變動得很厲害。那麼，要怎樣才能準確地定出方位呢？古人用什麼方法？現代人又用什麼方法呢？

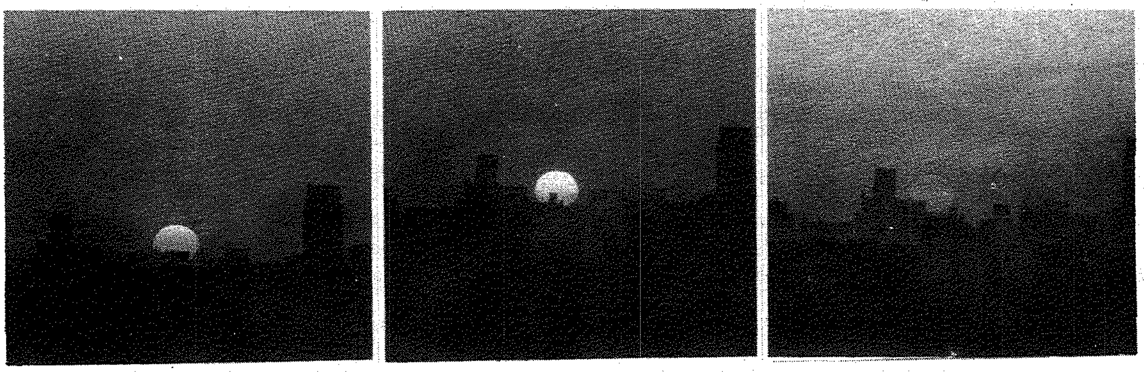

圖2　日出：從這三張在三天內（1970 年 2 月 10 ， 11 及 12 日 ）連續拍攝的照片中，可見到太陽昇起的位置每天都有一點改變。

現代人是以指南針、羅盤等儀器來幫助我們確定方位。古人沒有這樣的儀器，只好靠對日、月、星辰的仔細觀察。正午時刻，標竿的影子指的是正北（在北半球，在南半球則指正南）。夜晚時，北半球有北極星（ polar star ） 指出正北的方向，南半球也有南十字星座（ crux ）指出正南的方向。除此之外，尙有許多星星也很有規律地按固定的周期，出現在一些固定的方位上。古希臘人稱這些星爲遊星（ wandering stars ），以別於那些在固定方位上出現的定星（ fixed stars ）。古人出海捕魚，或航海貿易，在茫茫的大海上定航海的方向時，這些知識變成極端重要。

以上的幾段文字說明了，人類如何地利用自然界所顯現的規律而生活。尤其是日、月、星辰的運轉規律，是人類生活中必不可缺的事物。這種事實具體地反映在一些古老的迷信上：有人認爲天上的星辰與人的命運有極其密切的關係。這就是古今星象學（ Astrology ） 的背景哲學。星象學家一致地認爲，如果我們能對天上的星象知道得越多，則對於人世間的命，就能作更完美的詮釋。

到目前爲止，星象學雖然還沒有成功地應用天文知識的案例，但古代的星象學的興起，却達到了一個目的，即積極地鼓勵（ 刺激 ）了人類對天文知識的熱烈追求。人類對天上星辰的研究，本來淵自嚴肅而實際的動機。但加上濃厚宗教色彩的神秘熱情之後，

才變成人類日常生活中不可缺少的一部分。我們現代人的語彙中，還可以找到古人對行星崇拜的殘留證據，舉例如下：

星期日英文是 Sunday，即禮拜太陽的日子（日文為日曜日）；星期一為Monday，是月亮的日子（月曜日）；星期二為 Tuesday，源自法文的Mardi，即火星Mars 的日子（火曜日）；星期三Wednesday，源自法文的Mereredi，是水星Mercury的日子（水曜日）；星期四Thursday，源自法文的 Jeudi，是木星 Jupiter的日子（木曜日）；星期五 Friday，源自法文的Vendredi，是金星 Venus的日子（金曜日）；星期六Saturday是土星Saturn的日子（土曜日）。

古代的天象觀察，夾雜着濃厚的宗教色彩，以及神秘主義的迷信。經長期的過濾掉這些雜質之後，才發展成為天文的觀測。古希臘人在這方面成就輝煌（註3），他們測出了地球、月亮與太陽的半徑，它們之間的距離等重要的結果。以現代人的標準來衡量，他們測出的結果實在太過粗糙，誤差甚大。但這項缺點，並不致使他們的成就因而減色。

古希臘人所使用在天文觀測上的儀器，並不比目前中小學生能拿到手的儀器更好。現在的普通高中學生所學到的數學知識，也遠比古希臘數學家更多。但是，我們的高中學生，能解決古希臘數學家所面對的天文測量的問題嗎？不能，為什麼如此？我們的數學教育毛病何在？筆者以為，目前的學生學到的是考試的數學，死的知識。本文的目的，在追朔古希臘數學家在天文測量的活動與成就。希望透過這些數學應用的算法實例，使數學教學更加活潑，學生對數學更感到有趣。

§2　把問題三角化

我們如何測出A、B兩點的距離？是不是手拿着卷尺或繩索，直接由A點拉到B點？如果A、B兩點相距不遠，此法倒還可行。但是，若A、B兩點相距甚遠，或如天文測量中那樣，是兩顆星星之間的距離，則這種做法就顯然不通。那麼，兩點的距離該如

（註3）　在我國古代的數學發展史中，天文與曆法的製作是唯一的原動力。譬如說，我國最古的算經“周髀算經”可以說是一部天文測量的書。東漢末年的蔡邕在介紹當時天文學的辰別時）約公元178年）說：“言天體者有三家，一曰「周髀」、二曰「宣夜」、三曰「渾天」”。古代的天文學家的觀測，主要在地上立一標竿，稱為「測日影表」，簡稱「表」。“髀者表也”，正是測日影的意思。其他如劉徽（南北朝人）的海島算經中也有測望術與重差理論。詳情見李儼的中國古代數學簡史（九章出版社），或吳俊雄的“出入相補原理”（數學傳播第12期，P.7）。

何測量呢？

古希臘人想出了一個系統的方法，叫做**把問題三角化**（triangulation），即把要測的距離當作一個三角形的一邊，只要我們有辦法能確定此三角形，則此邊長就能計算出來。如圖3所示，三角形ABC一旦確定，則其任意兩頂點之間的距離也隨之確定，因此可由已知的資料加以計算。

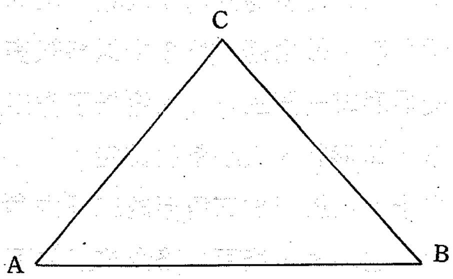

圖3　三角形的構成要素是什麼？

如何才能確定一個三角形？三角形的構成要素又是些什麼？如果你不很健忘，當能記得小學數學課本中曾經談過這些材料。三角形的構成要素是其三邊和三個內角。但是，一定得知道此六項資料，才能確定一個三角形嗎？當然不必。平面幾何中有下列三條定理：

① 如果兩個三角形的三邊對應相等，則此兩個三角形為全等（S.S.S）。換句話說，由已知三邊長而作出的任意兩個三角形，一定是全等的，即已知三邊長後，此三角形已經確定。取三根細木條，當作已知的三邊，如圖4的方式連續成一個三角形，則這樣子作出來的三角形，其形狀、大小都已確定。

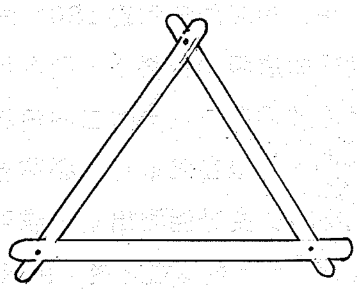
圖4　用三根木條作出一個三角形

② 如果兩個三角形的兩邊及其夾角對應相等，則此兩個三角形為全等（S.A.S.）。換句話說，已知兩邊及其夾角而作出的任意兩個三角形，一定是全等的，即已知兩邊及其夾角後，此三角形已經確定。取兩根木條，連結其一端點如圖5，當作一個三角形的兩邊。若固定此兩邊的夾角，則此兩木條的另外端點的連線，就是此三角形的第三邊（圖5中以虛線表示）。這樣子作出來的三角形，其形狀、大小都已確定。

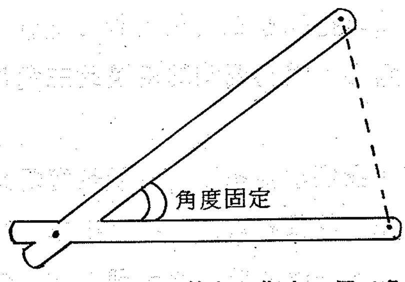

圖5　用兩根木條及其夾角作出一個三角形

③ 如果兩個三角形的兩角及其夾邊對應相等，則此兩個三角形為全等（A.S.A）。換句話說，已知兩角及其夾邊而作出的任意兩個三角形，一定為全等，即已知兩角及其夾邊後，此三角形已經確定。取一根木條當作一個三角形的一邊。若此邊與另兩邊所

夾的兩角（即夾此邊的兩角）固定，但其和小於180°時，另兩邊（圖6中以虛線表示）會相交而形成一個三角形。這樣子作出來的三角形，其形狀、大小都已確定。

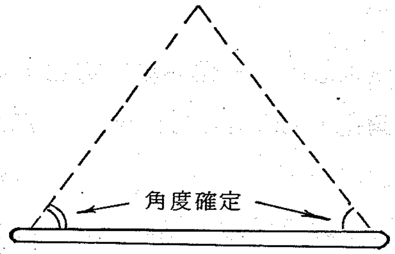

圖6　用一根木條與夾此邊的兩夾角，作出一個三角形

事實上，由於一個三角形的三個內角和爲180°，上述的第③條可以略作修正如下：若兩個三角形的任意兩角帶一邊對應相等，則此兩個三角形爲全等（A.A.S）。這樣的結果使用起來更加方便。

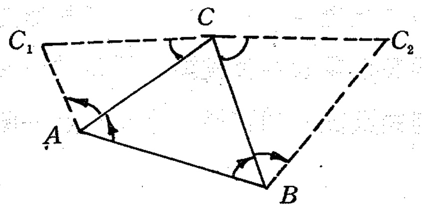

圖7　基線的一再利用

以上說明了，要確定一個三角形，只要知道此三角形的三個適當的資料就已足夠。讀者不難注意到，這三個適當的資料中，有一項一定是邊長。若我們只知道一個三角形的三個內角（由三角形內角和爲180°的定理，我們其實只知道兩個資料），則我們只能確定其形狀（若兩個三角形的三內角對應相等，則此兩個三角形爲相似三角形），而不能確定其大小。所以在測量時，必需有一條**基線**（base line），即此三角形的某一邊長，而這條基線的長度是能測出來，或可以計算得到的。

當一條基線$\overline{AB}$已然確立之後，由A及B到遠處明顯目標C的視線，使我們能測出$\angle ABC$與$\angle BAC$，見圖7。$\overline{AC}$與$\overline{BC}$即可利用三角計算出來。這些已測定過的線段長，又可以當作基線來測量其他的點，如圖7中的C_1與C_2等，而得到下一步測量可用的基線$\overline{AC}_1$，$\overline{CC}_1$，$\overline{CC}_2$，$\overline{BC}_2$等。如此測量可以繼續下去。

在測量時把問題三角化，利用上述的三個定理來確定一個三角形時，第①條定理是不可能用到的。因爲要測的就是此三角形的一邊長，已知道了此邊長，還需要把問題三角化嗎？

其次，我們想要指出，測量長度要比測量角度困難許多，而且測量時的誤差也較大（卷尺、繩索等都有重量，拉不出眞正的直線段，所以當要測的距離一長，誤差就很大了）。因此，上述的第②條定理，在測量的使用上，比起第③條定理，用到的時候少；除非要測的三角形是個等腰的三角形，或其中兩邊都可以靠計算而得到，只有在此兩種情況下，第②條定理才會使用到。

角度的測量，既然要比長度的測量用的時候較多，因此我們要對角度的測量說幾句

話。當我們要準確地測量一個角$\angle COS$(見圖8)時，視線$\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OS}$要瞄得很準。古代的作法是在O點放一個細長的圓柱管，在此管的兩端加上交成十字的細線。當管兩端的十字交點，與要測的目標成一直線時，視線就很準確了。近代的作法只是把上述的圓柱管，改成望遠鏡，如此對遠處的目標較方便，其基本原理與古代是一致的。

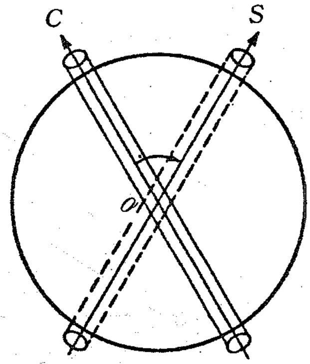

圖8　準確地測量一個角

另外一件測量時要注意的事情是，不管我們使用的儀器如何改進，測量(長度或角度)時的誤差，總是無法完全避免的。所以，無論是近代或古代的測量員，都採取一樣的措施，即在測量一個量時總要測上好幾次，然後以幾次測量的平均值做爲測量的結果。

測量出一些資料之後，就得解一個三角形。古希臘人怎樣解一個三角形呢？即他們由一個三角形的三項適當的資料，確定此三角形之後，如何求得此三角形的其他資料？現代的高中學生可以利用三角學中的一些結果，來做這些計算。讓我們略述於下：

一．如果已知一個三角形的兩邊a與b，及其夾角θ(見圖9)，求其第三邊x。

此時最方便的方式爲直接使用餘弦定理，得到(請參看高中數學課本)

$$x=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

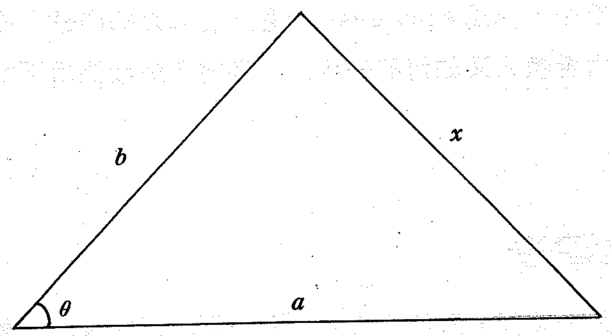

圖9　已知兩邊夾角解一個三角形

二．如果已知一個三角形的兩角β與γ，及其夾邊a，求γ角的對角x，如圖10所示。

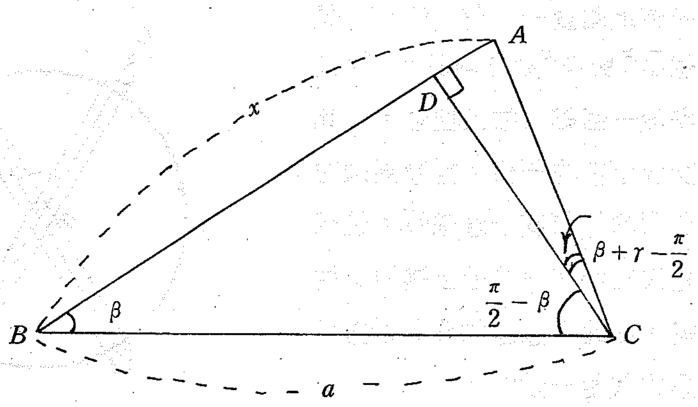

圖10　已知兩角夾邊解一個三角形

此時，設由γ角的頂點C向其對邊作垂線，得垂足D，則有

$$\begin{aligned} x &= \overline{BD}+\overline{DA} \\ &= a\ \cos\beta+\overline{CD}\cdot\ \tan\left(\beta+\gamma-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= a\ \cos\beta+a\cdot\sin\beta\ \cdot\tan\left(\beta+\gamma-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

這些計算用到三角函數，但我們知道古希臘早期並沒有三角的結果。三角學的最早結果公認是由希巴朱士（Hopparchus ，約公元前140年）開始的，經過孟尼勞斯（Menelaus of Alexdrandia，約公元100年）的發展，最後由托勒密（Claudius Ptolemy ，約公元85～165年）總其成，整理成十三巨册的Syntaxis mathematica （數學總集，後來傳入阿拉伯人手中，稱爲Almagest ，意爲最偉大的作品）而流傳於後世（註4）。在希巴朱士之前，古希臘人又如何解一個三角形呢？讓我們用下節的具體例子來加以說明。

§3　隧道之建造

古希臘早期的某一城鎮，內於人口的增長，而需要找尋新的水源。很不幸的，找到

（註4）　此書雖然名爲數學總集，却是一本天文測量的書，如我國的周髀算經一樣。事實上，早期的數學發展受惠於天文甚多，中外相同。當時的許多數學家，都兼做天文測量的工作，他們常爲了解決天文測量的問題，而發展出數學做爲工具。本書不但包含了相當完整的三角函數表，且包含許多由孟尼勞斯發展出來的球面幾何學的結果。此書到十六世紀的克卜勒（ kepeler，公元1571～1630）之前，是典型的天文學著作。

的新水源（一個湖泊）與此城鎮之間，有高山阻隔，如圖11所示。除建造一條隧道通過山腹之外，別無他途引水取用。爲了減少施工時間，他們決定由山的兩頭同時動工挖掘。於是問題變成為：如何才能使隧道成一直線，且在山腹中相遇？工程的設計要如何確定兩頭挖掘的方向？如果由你來做設計工作，你將如何進行呢？

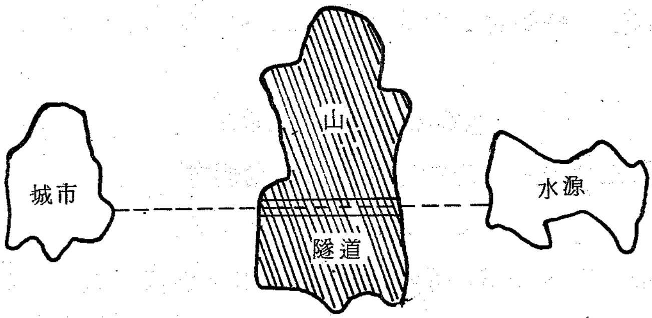

圖11　建造一個隧道

要記得，古希臘人並沒有現代高級工具，如無線電與望遠鏡等以資運用。雖然如此，他們還是想出辦法，成功地解決了此問題，即他們由兩頭挖的隧道，實際上在山腹中相遇了。他們怎麼能做到的？你要不要先動腦筋想想，然後再看下文。

當然，本問題有其他的複雜性。譬如說，如果湖泊的地勢不比城高，則水就不可能順着築好的渠道往下流，因而產生新的困難。但爲了使我們能專注於本問題的要點，讓我們忽略由地勢產生的支節，而把問題簡化如下：如圖12所示，平面上兩點 C（城市）與 S（水源）之間有山阻隔，而無法互相看到，問如何確定線段 $\overline{CS}$？

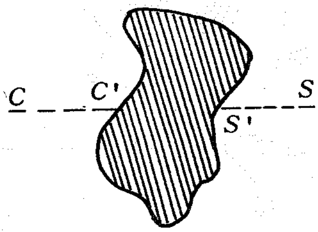

圖12　如何確定隧道的路線

設線段 $\overline{CS}$ 與山交於 C' 與 S' 點，如圖12所示，則上述的問題是一個幾何問題：當我們無法直接連接 $\overline{CS}$ 時，如何作出（或確定）$\overline{CC'}$ 與 $\overline{SS'}$？

在幾何上，當我們無法直接連接兩點時，一定要另找一點當作媒介。如圖13所示，設 O 爲山外之一點，且我們可以連接 $\overline{CO}$ 與

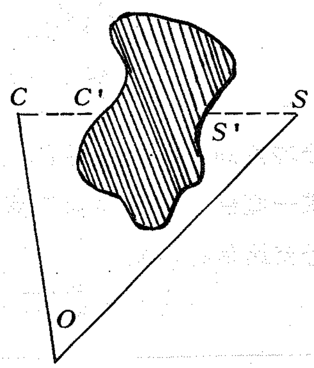

圖13　把問題三角化

$\overline{OS}$ 。你能從圖13中得到什麼暗示，而作出 $\overline{CC'}$ 與 $\overline{SS'}$ 嗎？想想看。

圖13中的△COS是否可以確定？那些資料是可以測量的？顯然，$\overline{OC}$、$\overline{OS}$與$\angle SOC$是可測量的，兩邊夾角的條件足以確定△COS。假定$\overline{OC}$爲2哩，$\overline{OS}$ 爲 3哩，$\angle SOC = 53°$，則我們可以在紙（或如古希臘人那樣，在沙盤）上作業，作出一個較小的相似三角形$C_1O_1S_1$。譬如說，作$\overline{O_1C_1} = 20$ 吋，$\overline{O_1S_1} = 30$ 吋，$\angle S_1O_1C_1 = 53°$，則

$$\triangle C_1O_1S_1 \backsim \triangle COS$$

如圖14所示。由相似三角形對應角相等的性質，我們有

$$\angle C = \angle C_1 \text{，} \angle S = \angle S_1$$

由此，我們可以測量$\angle C_1$ 與$\angle S_1$ 而得到$\angle C$與$\angle S$ 。這樣就確定了$\overline{CC'}$ 與$\overline{SS'}$的方向，而解決了問題。上述就是古希臘人的作法，你說巧不巧（註5）？

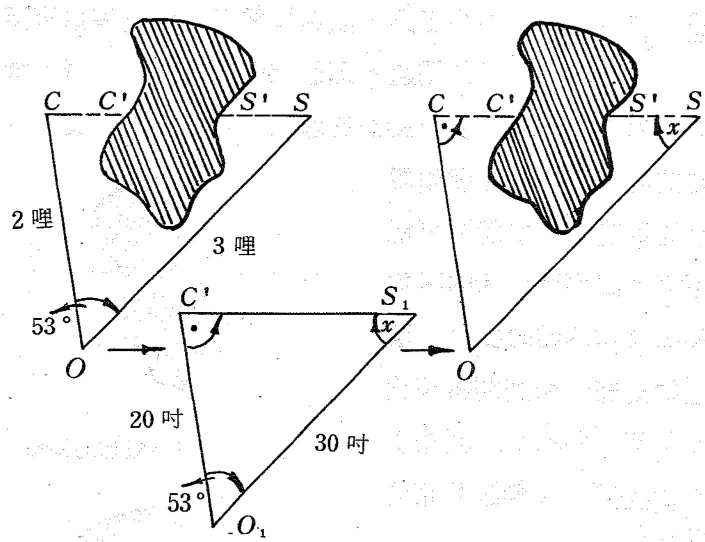

圖14　用相似三角形的方式解一個三角形

讀者不難體會到，由於直線CS之確定，不但由兩邊一起動工挖掘的隧道能在山腹中相連，且成一直線。因此整個工程的工作量也減至最少。事實上，古希臘人還利用相似三角形三邊成比例的性質

$$\overline{CS} : \overline{C_1S_1} = \overline{CO} : \overline{C_1O_1} = \overline{OS} : \overline{O_1S_1}$$

（註5）　詳情請參閱B.L.vander Waerden作的Science Awakening P.102～104。

而算出了$\overline{CS}$的長，另外測量出$\overline{CC'}$與$\overline{SS'}$的長度，而求出了隧道的長度

$$\overline{C'S'}=\overline{CS}-\overline{CC'}-\overline{SS'}$$

並由此估計施工的日期（假定已知工作人數及每人每日的平均工作量），在嚴格的施工控制下，如期完成了這個隧道工程。

由這個實例可以看到，早期的古希臘人雖然沒有三角學的知識，但他們還是有相似三角形的幾何結果，可加以利用。所以，當他們解一個三角形的時候，一定要畫出一個相似三角形來測量、計算。不難想到，這樣方式測出來的結果，誤差一定很大。因此，我們對他們測出來的結果，不能用目前我們的標準去衡量。我們要學的是他們應用數學結果到測量上的方法，而不是他們測得的結果。

§4　地球的半徑

如上所述，測量一定要有一條基線，而天文測量的基線則一定要在地球上建立。地球上兩點間的距離，常不能直接測量，而要靠間接的計算。所以最方便的方式，是要靠地球的半徑作爲最原始的基線才行。

當我們問地球的半徑是多少時，我們已然假設地球是一個很圓的球體了。這個假設是否正確？並不完全正確。現在我們知道地球不很圓，它在南北極的方向稍偏，而在赤道方向稍長，但差異還不十分大（直徑長約差27哩）。所以，把地球看成一個球體，是很近似的看法。在數學中解決問題時，常需要把問題理想化(或簡化）後，才能開始動手。不然像這樣複雜的問題，開始就無法動手。

測量（或計算）出地球的半徑是一拉脫身（Eratothene，約西元前280～195年）的傑出成就。他是古希臘文化中心亞歷山大城有名的圖書館（註6）的管理員，據說他對當時的各種學術知識樣樣精通，他被認爲是數學家、天文學家、地理學家、歷史學家、哲學家、詩人、甚至於運動名將。我們對他的其他能耐暫時都不感興趣，目前只想追究：他怎樣測出了地球的半徑？

一拉脫身的想法很單純，就是想辦法把求地球半徑的立體幾何的問題，轉變成平面

（註6）亞歷山大大帝建立了橫跨歐、亞、非三大洲的大帝國後，建都於三大洲的交點附近，定名爲亞歷山大城。他的後繼者遵照他的設計藍圖，把亞歷山大城發展成爲當時的文化中心，設立大學、博物館、動植物園、圖書館（都是世上首創），延聘各地專家學者前來主持。當時的圖書館有75萬卷藏書，都是手抄本（當時印刷術未發明），可見其規模之浩大。

幾何的問題，所以他用一個假想的平面去切割地球。當一個平面與一球面相交不止一點時，它們的交點構成一個圓。讀者可以用刀切小玉西瓜，或柳橙等球形水果驗證一下。由於要求的是地球的半徑，所以地球的半徑與地球的球心O，也應該出現在此平面上。

通過地球球心O點的一個平面，與地球而相交得到的圓，叫做地球上的一個**大圓**（great circle）。例如，赤道（eguator）就是一個大圓；另外，通過地球南北極的大圓也分成兩條經線（meridian of longititude），譬如通過台南外海的是東經120°的經線，與通過加拿大東北角Novascotia及New Foundland兩大島之間的西經60°的經線，合起來也是地球上的一個大圓。地球上除這些外，還有許多大圓。

設A、B是球上兩點，如果它們與球心O不共直線，則此三點決定的平面，與球面相交得到的大圓，就是通過A、B的大圓。此時，A與B把此大圓分成不同大小的兩個圓弧，小的弧記成$\overset{\frown}{AB}$。弧長$\overset{\frown}{AB}$是A,B兩點間最短的球面距離，換句話說，此球面上通過A、B兩點的各條球面路徑中，最短的路徑就是$\overset{\frown}{AB}$。

如果球面上的兩點N，S與球心O成一條直線，則任一個通過直線NS的平面，與球面相交後都得到通過N，S兩點的一個大圓。此時，N與S把每一個大圓都分成相等的半圓。這些相等的半圓的長度，還是N與S的最短球面距離。

由於一拉脫身是個地理學家，他知道尼羅河概略是由南往北流的，亞歷山大在尼羅河口，而在上游有個城叫做錫恩（Syene）。他假想來切割地球的平面，就是由亞歷山大A，錫恩S與地球球心O所決定的平面。讓我們把此平面切割地球所得的大圓畫在圖15，圖中的θ是弧$\overset{\frown}{AS}$所對的圓心角。

一圓的圓周長是半徑γ的2π倍，所以圖15中的$\overline{AS}$，γ與θ有下列的關係

$2\pi\gamma : 360° = \overset{\frown}{AS} : \theta$，即

$$\gamma = \frac{\overset{\frown}{AS}}{2\pi} \times \frac{360°}{\theta}$$

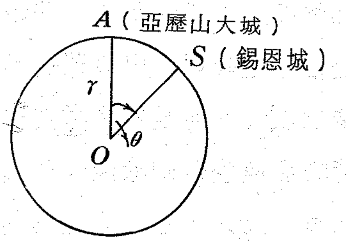

圖15　穿過球心的地球橫截面

於是一拉脫身就得想辦法測出$\overset{\frown}{AB}$與θ。埃及是當時非常開發的國家，錫恩（現在埃及的Aswan 水壩附近）到亞歷山大有一條馬路相通，其間的距離約為5000 stadia（為staduim的複數形式，stadium是古希臘的長度單位，約合559呎，註7）。一拉脫身把這個距離當作是$\overset{\frown}{AS}$的長度（實際上的弧長要比5000 stadia短一些）。

一拉脫身怎樣測θ角呢？因為他是地理學家，且博聞廣記，所以他知道錫恩城有一

座深井，井中的水只有在每年夏天最長的白天（即夏至）的正午時分，才能被太陽光照射到，即此時的陽光是直照錫恩城的。他假定太陽在無限遠，所以陽光是平行線。所以，他選擇這個特別的時刻，在亞歷山大城測出，陽光與垂直於水平面的標竿之間的夾角 θ' ，如圖16所示。

當然，他沒有正確的鐘錶來告訴他何時是正午。但他知道，當垂直於水平面的標竿的影長最短的時候，就是當天的正午時分了。他測出來的 θ' 是 $7°12'$ 。由於 θ' 與 θ 是兩平行線之間的同位角，因此相等，即 $\theta = 7°12'$。所以

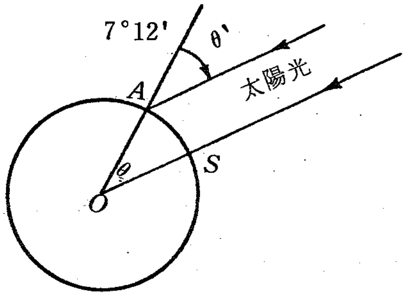

圖 16　平行線的應用

$$\text{地球半徑} \approx \frac{5000}{2\pi} \times \frac{360°}{7°12'} \ \text{stadia}$$

$$\approx \frac{5000}{2\pi} \times \frac{360°}{7°12'} \times \frac{557}{5280} \ \text{哩}$$

$$\approx 4200 \ \text{哩}$$（註 8 ）

目前大家所接受的地球半徑的數值是，在赤道方向為 3963 哩 ，而在南北極方向則短了 13.5 哩。一拉脫身測得的數值，以他當時所能使用的儀器而言，誤差可以算是很小的了。我們並不因這點小誤差，而減少對一拉脫身巧妙構想的欣賞與尊敬。

【待續】

（註 7 ）　Stadium與現代長度單位的換算有三種說法，即等於 559 呎， 607 呎，與 630.8 呎。這些都是根據不同的考古資料考證出來的數據。這裡採用 559 呎，是根據Howard Eve 的書 Introduction to the History of Mathematics , Holt-Rinehart-Winston , 1976年第四版。

（註 8 ）　由此可以計算出地球赤道的長是 $4200 \times 2\pi \approx 26000$ 哩。後來的古希臘地理學家 Poseidonius（約公元一世紀）與托勒密合作，重新測量得到地球赤道的長為 17000 哩。這項結果與一拉脫身的結果相差甚多，與真值 25000 哩的誤差看來，是一拉脫身的測量結果較佳。據說哥倫布決定航行地球一周時，所根據的數據是 17000 哩。一個有趣的想法是，他若根據比較接近真值的一拉脫身的結果，他是否還有勇氣作那次歷史性的長程航行呢？