規律的尋求(四)

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

阮貞德

國立臺灣大學數學系
高中數學資優計畫專任助理

筆者按：本文是由年長的筆者（黃）於民國74年9月4日，在台北市的和平國中二年級數學資優班，上數學補充課程時的教學實錄改寫而成的。本文的部分教材取自美國數學教師協會（NCTM)出版的1983年Yearbook, The Agenda In Action , p.70～78。

一、有趣的身份證號碼

今天的課題是兩則數學謎題。下面這則謎題，原來刊登在1978年12月出版的Scientific American（P, 23）中Martin Gardner 的專欄“數學遊戲”（Mathematical Games）。爲了減少一些與數學無關的說明，我們將它改成下列比較合乎我們國情的形式（我國每個人都有唯一的身份證號碼，此號碼除第一個是英文字母外，後面是一個九位數）：

> 有個人的身份證號碼很有趣，由1到9的九個數字都出現，而且從左邊算起，前兩位數可被2整除，前三位數可被3整除，前四位數可被4整除，………，前九位數（即整個號碼）可被9整除。請你猜猜看，這個號碼是什麼？

是的，這個謎題就是要我們猜一個長長的九位數。有人問道：滿足這樣條件的號碼（即九位數）可不可能有兩個？這是很好的問題，我的答覆是：我只知道有一個，並不清楚

是否會有兩個。也許在我們解這道題的過程中，會一併回答這個問題。有沒有人願意試試運氣，隨便猜一下？有人猜是123456789，這倒是很方便的猜測。讓我們檢查一下：

$$12 \div 2 = 6, 123 \div 3 = 41, 1234 \div 4 = 308 \text{ 餘 } 2,$$

顯然不行。還有人願意再猜嗎？這次有人要試 123654789，大家替他檢查看看。啊！很好，已經有人按電算器檢查出不行了，什麼地方不行？除以7時不行，讓我們算算看：

$$123654789 \div 7 = 176749 \text{ 餘 } 4$$

其實，像這樣的"猜測法"也是數學解題（problem solving）的一種方法，許多人常使用，但並不很管用。讓我告訴你們一種稍為有效的猜測方法，我們姑且稱之為"有系統的猜測法"，這個方法是我在這個暑假與女兒玩遊戲時發現的。我女兒今年才六歲，最近剛上小學，我們玩的遊戲是"買東西"，形式如下述：

她常拉我說：老爸，我撿到3塊錢，我們一起去買東西。我問她：你要買什麼？她說：買臭豆腐。我問：買臭豆腐一盤要8塊錢，你的錢夠不夠？她說：不夠。我問：那你猜猜看，還要多少錢才夠，猜對才給你買。於是她就開始猜了，首先她猜2塊錢。我給她2塊錢，叫她連她自己的3塊錢一起算，看看是不是8塊錢。如果是，就一起去買；如果不是，就把2塊錢收回來，叫她重新猜。那個時候，她雖然不會加減法，但她會數，所以這個遊戲可以玩下去。

她開始玩這個遊戲時，並沒有任何的解題策略，只是隨便亂猜。有時當然很快就猜對，但有時則會重覆猜（譬如說，第一次猜6，不對。以後又猜了好幾次也沒猜對，但她忘了她曾猜過6了，所以再次猜6）。由於她撿到的錢（都是大人洗衣服前忘了拿出口袋的零錢），每次不一樣，而要買的東西也不一定同樣的價錢，所以她死記上次猜對的數目也沒用。但這個遊戲玩久了，她慢慢發展出一套有效的策略，就是有系統的猜測法：她首先猜1塊，不對時再猜2塊，不對時再猜3塊，……，每次增加一塊錢，最後她一定會猜對。這種方法在解一些數學題目時是很有威力的，譬如說下列的年齡算題目：

已知父現年比子現年的5倍少3歲。4年後，父年比子年的3倍還多5歲，問父、子現年各多少歲？

這樣的問題對各位當然是很單純的，因為你們都學過代數。只要用 x 代表未知數列式，立刻可以解出來如下：

令 x=子現年，則父現年為 $5x-3$。

4年後，子年為 $x+4$，父年為 $5x-3+4=5x+1$，

所以，
$$5x+1=3(x+4)+5$$
$$5x+1=3x+17$$
$$2x=16$$
$$x=8$$

故知子現年爲 8 歲，父現年爲 $5\times8-3=37$ 歲。

但對沒學過代數的小學生，這樣的問題就很困難。要他們隨便猜，不見得容易猜到正確的答案。可是，他們要是知道上述的“有系統的猜測法”,則要得到答案也不挺麻煩。他們可以列表如下：

現年	子	1	2	3	4	5	6	7	8
	父	2	7	12	17	22	27	32	37
4年後	子	5	6	7	8	9	10	11	12
	父	6	11	16	21	26	31	36	41
對或錯		×	×	×	×	×	×	×	√

由此可知，這種猜測的方法還是蠻有效的，至少要比隨便猜要有效很多。現在讓我們看看，這種猜測法是否可以用到身份證號碼的謎題上。有人說可以，怎樣用法？從 123456789 開始，一路增加，下一個數是 123456798，再下一個數是 123456879，……。暫停，不要一下子就開始檢查。讓我們先算算，如果從頭猜到尾，總共有多少數要猜。首先，1 到 9 共九個數字都可以放在（左邊）的第一位，所以有 9 種可能性。放好第一位後，還剩八個數字可以放在第二位，故有 9×8 種的可能性。放好前兩位後，剩下七個數字可放在第三位，故共有 $9\times8\times7$ 種可能性。如此繼續算下去，共有三十六萬二千八百八十種可能性：

$$9!=9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=362880$$

如果要算到很後面才對，我們願意這樣猜下去嗎？有人建議寫一個電腦程式算。可以，你們回家後可以自己做。在這兩堂數學課裏，我要你們自己用腦子想。頭腦一定要多鍛練，才不會生銹。讓我們先檢討一下，爲什麼這個方法在前面的問題中有效，而在這個問題上失效了呢？對了，前面的問題中，我女兒要買的東西不會太貴，兒子的年齡也不可能超過 20 歲（不然父親年齡就快接近 100 歲了），所以猜幾次就猜出來了。但是，這個問題中要猜的可能性太多了，因此方法失效。

二、善用問題中的條件

我們能不能利用問題中所給的條件，減少一些可能性呢？順便想想看“有系統”這三個字，對我們這個題目，是否也有一些幫助？

有人建議先畫出九個格子，再用英文字母代替各位上的未知數字，還有人說第五位的數字是5。好，讓我們先在黑板上把這些寫下來：

A	B	C	D		E	F	G	H
□	□	□	□	5	□	□	□	□

為什麼第五位的數字是5呢？因為能被5整除的整數，其個位數的數字只可能是0或5，而0不出現，所以是5。很好，我們有沒有辦法，仿照這種方式，來確定其他各位的數字呢？

能被2整除的條件是什麼？其個位數字一定是偶數，即0，2，4，6或8，所以B只可能是2，4，6或8。這個條件雖然不很好，但至少我們減少了許多可能性。有人建議說，能被4，6或8整除的整數，其個位數也得為偶數。很好，讓我們把這些條件寫下來

A	B	C	D		E	F	G	H
□	□	□	□	5	□	□	□	□
	2		2		2		2	
	4		4		4		4	
	6		6		6		6	
	8		8		8		8	

我們能從這裏看出什麼嗎？有人說，偶數2，4，6，8都用光了，所以A，C，F，H只可能是奇數，即1，3，7，9。這樣，我們已經把可能性減少很多，只剩下A!×4! = 24×24 = 576 種可能性。由此可見，只要我們肯有系統的思考，善用題目裏所給的條件，即使只用到一點點，在解題上也已有很大的進步。576種可能性，比起上面所說的36萬多種是少了很多，但還是超過我們能實質去各別檢驗的程度。所以，我們還得繼續減少其可能性。

能被3整除的條件是什麼？大家都知道，是各位數字的和可被3整除。為什麼是這樣？你們知道理由嗎？學數學不是只記得許多的數學結果，而且要知道其道理，這樣才算學得好。下面，我把道理講一遍，希望以後大家能改變“知其然，而不知其所以然”的學習態度。假定這個數 k 能寫成下列形式（下面的 a_i 都是0到9之間的數字）

$$k=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\times10+a_0$$
$$=a_n\times(10^n-1)+a_{n-1}\times(10^{n-1}-1)+\cdots\cdots+a_1(10-1)$$
$$+(a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0)$$
$$=9m+(a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0)$$

由於上式中，10^n-1，$10^{n-1}-1$，…，$10-1$等都是9的倍數，所以寫成$9m$的形式。這個數k若能被3整除，則$k-9m=a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0$也能被3整除。這個道理並不難，懂了沒有？有人說，如果k被9整除，仿照上述的說法，其各位數字的和$a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0$也能被9整除。很好，道理是不是一樣呢？還沒想通的人，自己回去好好想一想。

我們雖然知道了這條規則的道理，但這條規則在這個題目上似乎不好用。因爲它對尾數的限制，並不能提供比我們已知的更多的資訊。這種情況在數學解題中是常發生的，有的條件好用，有的不好用，這是正常的現象，不用見怪。好，我們跳過這個條件不用，先看看能被4整除的條件是什麼？

能被4整除的條件大概不能只看最末尾的數字，對了，看它的末尾兩位的數字，其末尾的兩位數應該要能被4整除才對。理由是什麼？有沒有人自告奮勇，上台講給大家聽？怎麼舉手的都是男生？不行，這年頭男女平等，我一定要訓練你們這些女生講話，說不定將來中華民國的第一位女總統就出在你們班上。好，我們請這位個子最小的女生講給大家聽：假定這個數k可以寫成下列的形式（其中a_i都是0到9之間的數字）

$$k=a_n\times10^n+\cdots\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$
$$=(a_n\times10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2)\times100+(a_1\times10+a_0)$$

由於100是4的倍數，若k能被4整除，則$k-(a_n\times10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2)\times100=a_1\times10+a_0$也能被4整除。說得很好，大家給她鼓勵鼓勵。

道理說淸楚了，這個條件又要怎麼用呢？有人說把可能的末尾兩位數統統列出來。會不會很多呢？不會！好，那我們就列在黑板上

12，16，32，36，52，56，72，76，92，96

爲什麼24，28…… 這些4的倍數沒列出來呢？因爲C（即第三位數）只能是個奇數。好，從這個結果我們能發現什麼規律？只有2和6出現在第四位數（即D）。眞好，我們又減少了一半可能性，使可能的數目變成只有288種了：

A	B	C	D		E	F	G	H
□	□	□	□	$\boxed{5}$	□	□	□	□
1	2	1	2		2	1	2	1
3	4	3	6		4	3	4	3
7	6	7			6	7	6	7
9	8	9			8	9	8	9

讓我們繼續用整數能被 6 整除的條件。有沒有人知道這樣的條件？沒有！能被 6 整除的整數，能不能被 3 整除呢？能！那我們可不可以用這個條件呢？想想看！讓我給你們一個提示：前三位數是 3 的倍數，而

$$k = A\times 10^5 + B\times 10^4 + C\times 10^3 + D\times 10^2 + 5\times 10 + E$$
$$= (A\times 10^5 + B\times 10^4 + C\times 10^3) + (D\times 10^2 + 5\times 10 + E)$$
$$= 3m + D\times 99 + 5\times 9 + (D + 5 + E)$$

看出什麼結果嗎？有人說，D+5+E 能被 3 整除，對不對？對。為什麼呢？理由大家都清楚嗎？清楚就好了。現在讓我們把中間可能的三位數，都列出來：

252　254　256　258

652　654　656　658

這些數當中，可以去掉那些？有人說，252 或 656 不可能出現。為什麼呢？因為數字重覆了。還有那些數可以去掉？254，256，652，658，為什麼這些數可以去掉？因為它們都不能被 3 整除。由此知道，中間的三位數只可能是 258 或 654 兩種可能：

A	B	C	D		E	F	G	H
□	□	□	□	$\boxed{5}$	□	□	□	□
1	2	1		258		1	2	1
3	4	3		654		3	4	3
7	6	7				7	6	7
9	8	9				9	8	9

能被 7 整除的條件是什麼？沒人知道嗎？好，這個條件本來就不好用，我們乾脆跳過去，先看能被 8 整除的條件吧！有人知道吧？是的，其末尾的三位數能被 8 整除。為什麼？這次輪到男生，請這位大塊頭的男生來講：把整數 k 寫成下列形式（其中 a_i 是 0 到 9 之間的數字）

$$k = a_n\times 10^n + \cdots\cdots + a_3\times 10^3 + a_2\times 10^2 + a_1\times 10 + a_0$$
$$= (a_n\times 10^{n-3} + \cdots\cdots + a_3)\times 10^3 + (a_2\times 10^2 + a_1\times 10 + a_0)$$

由於 $10^3 = 1000 = 8\times 125$ 是 8 的倍數，所以若 k 為 8 的倍數，則

$$k-(a_n\times10^{n-3}+\cdots\cdots+a_3)\times10^3=a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$

也是8的倍數。講的很好，大家也給他鼓勵鼓勵。現在讓我們把這個條件拿來用在這道問題上。怎麼用？有人建議把第六、七、八三位數的所有可能情形都列出來，會不會太多？不會就列吧！

812	832	872	892
814	834	874	894
816	836	876	896
412	432	472	492
416	436	476	496
418	438	478	498

我們不列818,414 ……等是因為有重覆的數字出現。這些數當中，那些是8的倍數？不是8的倍數時，就可劃去。劃去後，剩下那些數？

816	832	872	896
416	432	472	496

從這裏我們可以看到什麼？有人說，G（即第八位上的數字）只能是2或6，由於2和6已被D（即第四位上的數字）和G用光，B（即第二位上的數字）只能是4或8。還有人說，其實第六、七、八三位上的數，沒有上述的8種可能性。為什麼？因為要跟前面第四、五兩位上的數字不重覆才行。譬如說，832,872,416,496 都不應該出現，若與第四、五位連在一起會變成25832,25872,65416,65496。把這些數扣除，第四到第八位只剩下列4種可能

A B C D　E F G H

□□□□5□□□□□

1	4	1	25816	1
3	8	3	25896	3
7		7	65432	7
9		9	65472	9

能被9整除的條件，上面已經討論過了，怎樣用呢？有人建議只看末尾的三位數，這個三位數一定能被9整除嗎？不一定，但這個三位數一定能被3整除。為什麼呢？因為9的倍數也一定是3的倍數，前六位數也是3的倍數，所以後三位數是3的倍數，道理清楚嗎？道理清楚了後，就要考慮如何使用。怎樣用？把末尾三位的可能情形列表如下

163　961　321　721

167　963　327　723

169　967　329　729

161,969,323,727 都沒有列出來，原因是大家都清楚的，這裏不再多說。上述的各數當中，把不是3倍數的劃去，剩下那些？只剩下五種可能性：

963　321　327　723　729

把這個結果，跟前面的結果合起來知道：從第四位數開始到第九位數上的數字，只有下列的五種可能情形

A B C D　E F G H

□□□□$\boxed{5}$□□□□

1 4 1　258963

3 8 3　654321

654327

7　7　654723

9　9　654729

現在，我們可以把前3位數放進來組合了。譬如說，在258963前面的三位數，可能是那些數？還沒有用到的是那些數字？只有1,4和7，所以只有兩種可能性，即147或741。仿照這種方式，我們把可能的情形減少到下面的十個數目：

147258963	741258963
789654321	987654321
189654327	981654327
189654723	981654723
183654729	381654729

三、結果的檢驗

把可能情形減少到十種之後，已經可以動手檢查了。檢查時，我們是否要每個條件都用到呢？不用。例如，前兩位數是2倍數，前四位數能被4整除的條件等，都已經用過了，所以這些條件都不必再加檢查。那麼，還沒有用到的條件是那些？是前三位數能被3整除，前七位數能被7整除，整個號碼能被9整除，這三個條件。

首先，讓我們來看前三位數能被3整除的條件。啊！已經有人宣告這個條件，檢查沒問題。你是怎樣檢查的呢？哦！是把這些數的前三位數加起來，再用3除：

$1+4+7=12$，$7+8+9=24$，$1+8+9=18$，$1+8+3=12$

這些數都是3的倍數，所以這個條件沒問題。很好，再想想看，有沒有其他的道理可以告訴我們，這些計算的檢查是沒有必要的？想不出來嗎？讓我告訴你們：因爲1到9這九個數字都出現一篇，且 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$，是3的倍數，而我們也知道上述的十個數，後六位數能被3整除（請回憶一下前面的過程），所以其前三位數一定可以被3整除。這個道理是不是充分呢？是否淸楚呢？好，大家都淸楚就好了。

其次，讓我們再檢查整個號碼是否能被9整除的條件。想想看，上段所說的道理，是否對這個條件一樣說得通呢？可以，爲什麼呢？這位小男生是否向大家說明：因爲1到9的九個數字都出現一篇，而且由1加到9的和是45，是9的倍數，所以不管它們怎樣排列，都一定是9的倍數。道理很簡單，是不是？

最後，我們要檢查前七位數能被7整除的條件。檢查這個條件時，我們有兩種方式。一種方式是拿上述十個數目的前七位數，直接用7去除，看看那些能被7整除。這是比較直接的方式，尤其是帶了電算器來上課的同學更是方便。另一種方式是仿照檢查其他條件的方式，把能被7整除的整數的條件明確的表達出來，再用來檢查。既然我們是在上數學課，我們不妨用點時間，來學一點東西，即採用後一種方式。

整數能被7整除的條件是什麼？這個條件是比較偏的結果，在數學上並沒有重要性也不好用，所以知道的人也不多。一般這種條件都是利用該數很接近10，100，1000，……等的倍數來敍述的。譬如說，上面我們用到 $10=9-1$ 來敍述3與9倍數的條件。現在我們也採用相似的方式來說明：因爲 $100=98+2=7\times 14+2$ 假定 k 是一個四位數，把它寫成下列形式（其中 a_i 爲0到9之間的數字）

$$
\begin{aligned}
k &= a_3\times 10^3+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0\\
&= (a_3\times 10+a_2)\times 100+(a_1\times 10+a_0)\\
&= (a_3\times 10+a_2)\times(98+2)+(a_1\times 10+a_0)\\
&= 7m+(a_3\times 10+a_2)\times 2+(a_1\times 10+a_0)
\end{aligned}
$$

所以，k 能被7整除的充分必要條件是 $(a_3\times 10+a_2)\times 2+(a_1\times 10+a_0)$ 能被7整除。由此，我們可以把一個整數，由個位開始，每兩位一節的方式劃分，由左邊最高位的一節開始，乘上2加上下一節。如果得到的數是一個兩位數，就繼續上述的步驟往下節移；如果得到的數是個三位數，則分節做上述的步驟，直到得到個兩位數爲止。這樣做下去，直到最後得到一個兩位數爲止。在上述的這些過程中，我們顯然也可以隨意扣除7的一些倍數，而不會影響最後的結果。讓我們用上面十個數中的第一個與最後一個，即147258963與381654729的前七位數，來做示範：

① $1'47'25'89$ $\rightarrow 1\times 2+47=49$ $\rightarrow 49-7\times 7=0$

$\rightarrow 0\times 2+25=25$ $\rightarrow 25-7\times 3=4$ $\rightarrow 4\times 2+89=97$

$\rightarrow 97-7\times 13=6$

6 不能被 7 整除，故 1472589 不是 7 的倍數。

② $3'81'65'47$ $\rightarrow 3\times 2+81=87$ $\rightarrow 87-7\times 12=3$

$\rightarrow 3\times 2+65=71$ $\rightarrow 71-7\times 10=1$

$\rightarrow 1\times 2+47=49$ $\rightarrow 49-7\times 7=0$

所以 3816547 能被 7 整除。

由上述的兩個例子可以看到，這個檢驗條件用起來不像其他的那麼好用。而且，我們也檢查出上面列出的十個數目字中的最後一個，滿足了題目中所要求的所有條件。但是，我們並不確定這道問題是否有兩個答案，或更多答案。所以，我要求各位利用上述 7 的倍數的檢查法，來檢查其他的八個數目的前七位數，當做對此檢驗法的練習。

檢查的結果怎麼樣？沒有其他數目的前七位數是 7 的倍數。所以，身份證號碼的問題只有一個答案，就是 381654729。

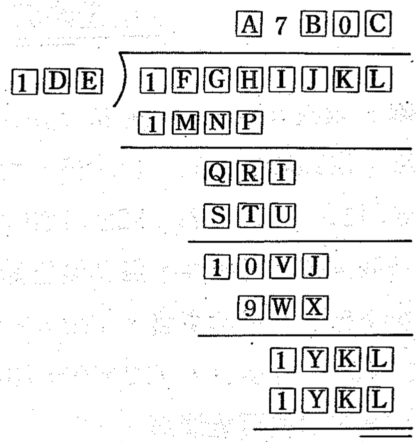
四、孤獨的七

上面我們猜了一個謎題，下面還要再猜一個謎題。這兩個謎題的性質雖然不同，味道却是相似的。下面這道謎題的名稱，聽起來有點憂鬱，叫做“孤獨的七”（七與妻同音），形式如下：

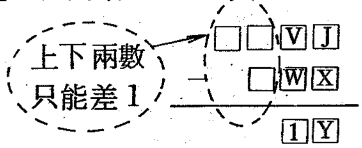
```
          □7□□□
      ──────────
□□□ ) □□□□□□□□
      □□□□
      ──────────
        □□□
        □□□
        ────────
        □□□□
         □□□
         ───────
          □□□□
          □□□□
          ══════
```

這是一道整數的除法題目，整個兒的除法直式中只出現了一個數字，那就是7。因此，這道題目的名稱由來就一目了然了。題目是要我們在這個除法直式的空格中，塡上適當的數字，而完成這道除法。看起來有點難，其實並不很難，我相信各位都有能力可以解決這道題目的。爲了方便，各位可以自由地與鄰近的同學互相討論，但不可太大聲，以免干擾別人的思路。現在，剩下來的時間大概做不完這題了，大家回去再做，做完繳來。下一次上課，我要找一位同學上台來講這道題目。

大家繳來的“孤獨的七”的作業，看起來都做得很好。爲了確定起見，我還是請一位同學上台講給大家聽。下面，我們就來聽這位戴眼鏡的女生講解：這道題目的名稱雖然是“孤獨的七”,但我很快的就給一些空格塡上了數字，如下所示。其他沒辦法立刻塡上適當數字的空格，我用英文字母塡入，討論時比較方便：



首先，我要解釋已經塡入的數字。商的十位數字是0，這從直式的形式立刻看出來，不用再加解釋。除數的百位數字爲什麼是1呢？因爲7乘上這個三位數（即除數）的積，仍然是個三位數，而$7 \times 143 = 1001$，所以商不能比142更大。由此可以推論得到，除數的百位數字是1，而且被除數的最高位上的數字是1，這個數字下面的空格也非1不可，最下兩行（因爲整除，這兩行的數字是一樣的）的千位數字也是1。倒數第四行的數目，其千位數字爲什麼是1？而其百位數字爲什麼是0？同時，倒數第三行數目的百位數字爲什麼是9呢？因爲若不這樣，則9的下面應該還有空格才對（如下圖所示）：



解本道題目的關鍵在於 $S \leqslant 8$（這裏的英文字母，請參看除法直式），因爲 $9 \geqslant Q$，而 $Q - S \geqslant 1$。由此知道，7乘上除數的積不超過900，B乘上除數的積介於900與1000之間，而A與C乘上除數的積都超過1000，故 $A = C = 9$，$B = 8$，這樣，我們可以把上面除法直式寫爲下式：

```
              9 7 8 0 9
       ________________
1 D E ) 1 F G H I J K L
        1 M N P
        -------
          Q R I
          S T U
          -------
          1 0 V J
            9 W X
          -------
            1 Y K L
            1 Y K L
            =======
```

現在我要決定除數的範圍，因爲8乘上除數的積介於900與1000之間，而 $125 \times 8 = 1000$，而 $112 \times 8 = 896$，所以除數一定小於125，而大於112。這裏總共有113，114，115，116，117，118，119，120，121，122，123，124，共十二個數要試。我也嘗試用其他的方式，想辦法減少這些可能性，但其他已知的條件，都沒辦法幫這個忙。譬如說，用7乘上除數的積不超過900的事實，$129 \times 7 = 903$，只能得到除數小於129；用9乘上除數的積大於1000的事實，$112 \times 9 = 1008$，得到除數大於112；比上面的範圍更大，所以沒辦法減少這些可能情形。

於是，我開始試算。我的運氣很好，由最大的124開始，一下就中獎了，試算的結果如下：

```
              9 7 8 0 9
       ________________
1 2 4 ) 1 2 1 2 8 3 1 6
        1 1 1 6
        -------
          9 6 8
          8 6 8
          -------
          1 0 0 3
            9 9 2
          -------
            1 1 1 6
            1 1 1 6
            =======
```

我試用其他的數來試算，都產生矛盾的現象。下面，我以120爲例來作說明：

```
          9 7 8 0 9
      ________________
120 ) 1 □ □ □ □ 0 8 0
      1 0 8 0
      ________________
        □ □ □
        8 4 0
        __________
        1 0 □ 0        這裏不管塡上那
          9 6 0        個數字都不對。
        __________
          1 0 8 0
          1 0 8 0
          ========
```

其他的可能性的試算式子，都與這個試算式一樣，在某個地方會發生矛盾，這裏就不一一列出來了。

五、結　　語

本文所處理的問題，是數學教育中所謂的數學解題。這個形式的教學是美國這幾年來最熱門的一個課題。處理的教材並不特別；重點是在處理手法，如何引導學生思考。在實際教學時，筆者採用的是蘇格拉底對話錄的形態，即師生問答方式，中間有些時間留給學生計算，討論。在寫本文時，我們覺得保持課堂上教學實錄的方式，比較能保留這種精神，這種文章讀起來是有點怪怪的，但對筆者而言是一種嘗試。對話中的語氣會加修飾，推理過程也會加以簡化，如此才能縮短篇幅。