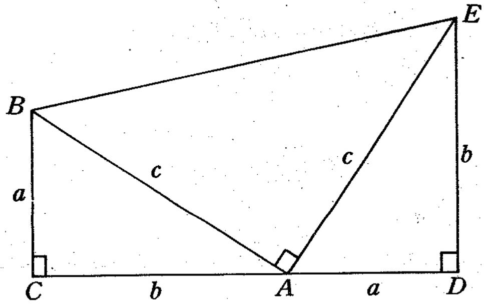
從直角三角形所引發的問題

賴漢卿

國立清華大學數學系

我在清華大學暑期進修班，今（74）年夏季上分析原理一課的最後一堂，學員們要求我，隨意談談與國中、高中生要如何啓發他們，從一個問題去聯想一些可發展的問題。這是我們身爲數學老師應該時常留意的，而且也不是一件容易隨時可引導的事情，但在許多經驗與統合的過程中，用些時間細細推敲，或參照些資料，都會有很大的幫助。下面內容是應學員們的要求，在我課堂中講述的一些發想，我想藉科敎月刊披露出來，讓更多的中學老師，能在敎學的過程中增加一些輕鬆的談話資料，或當做某單元之敎材的參考。

在中學的基礎數學中，最能引發或訓練學生思考能力的，我想很多人都會同意，平面幾何該算是最好的一單元或說一門課，其中直角三角形所涉及的性質則扮演著很重要的角色。談到直角三角形，每個學生都知道有個畢氏定理，我們自己也叫它爲商高定理，其故事來源我不在此涉及。我們就從這個定理：**直角三角形斜邊的平方等於兩直角邊之平方和**，的最簡單證明法開始。其證明雖有種種不同的方法，其中以三個直角三角形構成如下圖形的梯形來證明最爲容易：



圖一

從圖一中，容易看到：梯形的面積恰好等於此三個三角形的面積之和；即

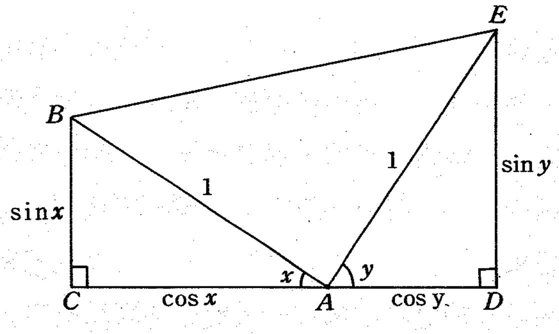
$$梯形\ BCDE = \triangle BCA + \triangle ADE + \triangle AEB,$$

所以 $$\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

故 $$a^2 + b^2 = c^2$$

我們觀察圖一，稍作變化將可證明三角的半角公式；二角和之正弦公式；以及幾個代數不等式。

1° 首先取 $c = 1$；$\angle BAC = x$，$\angle EAD = y$ 以及 $\angle BAE$ 都是任意角，則圖一演變成:



圖二

實則取直線 CD 上之任意一點 A，作 $BC \perp CD$，$ED \perp CD$，以 A 爲中心，單位長爲半徑作半圓交 BC 及 DE 於 B，E 則得圖二。

則很容易證明二角和的正弦公式：

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

（但 $0° < x < 90°$，$0° < y < 90°$）

證明　因 $\angle BAE = 180° - (x+y)$，且

梯形 $BCDE = \triangle BAC + \triangle BEA + \triangle AED$

故（梯形面積爲（上底＋下底）·高/2）

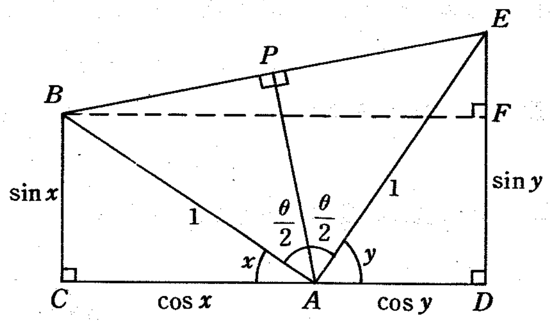
$$\frac{1}{2}(\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\,1 \cdot 1 \cdot \sin(180° - (x+y)) + \frac{1}{2}\cos y \sin y$$

即（經簡化後）

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

2° 如果從圖二的點A作$\angle BAE$的角平分線AP交BE於P。



圖三

令$\angle BAE=\theta$，則由於等腰三角形，頂角之平分線垂直平分其底邊，乃知$AP\perp BE$且$BP=PE$。現在由圖三，我們可用來證明半角公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

證明 過B作DE的垂線，F表其垂足，則由畢氏定理得

$$BE^2=BF^2+FE^2$$

今 $BE=2BP$，$BF=CD$，$FE=DE-FD$，$FD=BC$，$BP=\sin\dfrac{\theta}{2}$，則

$$\begin{aligned}4\sin^2\frac{\theta}{2}&=(\cos x+\cos y)^2+(\sin y-\sin x)^2\\&=2+2(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\\&=2+2\cos(x+y)\\&=2-2\cos(180°-(x+y))\\&=2-2\cos\theta\end{aligned}$$

故 $$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

3° 回到圖一的情形，我們很容易看到

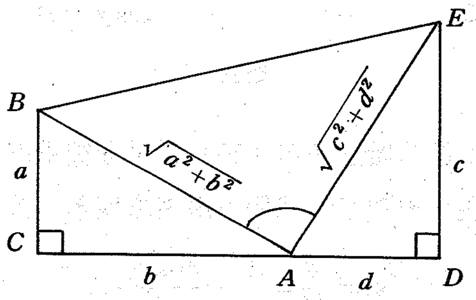
$BE=\sqrt{2}C=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$，且$BE\geqslant CD$，即$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a+b$，故證明了下面不等式，

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

注意此不等式於 $BE=CD$ 時，成爲等式，換句話說，此不等式的“ = ”成立的充要條件是：

$a=b$（即 $BCDE$ 爲平行四邊形）

4° 對於任意兩個直角三角形 ABC 及 ADE（如圖一所置）



圖四

直角邊長示之如圖四，則斜邊分別爲 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{c^2+d^2}$，

$\triangle ABE=\frac{1}{2}AB\cdot BE\sin(\angle BAE)$，於是

$$\text{梯形}\,BCDE=\triangle BCA+\triangle ADE+\triangle BAE$$

即 $\frac{1}{2}(a+c)(b+d)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin(\angle BAE)+\frac{1}{2}cd$

但 $0<\sin(\angle BAE)\leqslant 1$，所以

$$\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd)+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

化簡得下列 Cauchy-Schwary 不等式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ad+bc)^2$$

其中 a，b，c，d 爲任意正實數。

注意：在此不等式中的“ = ”成立的充要條件如何？顯然是在上述引述中的 $\sin(\angle BAE)=1$，

即 $\angle BAE=90°$，此時爲 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$

故“＝”成立若且唯若

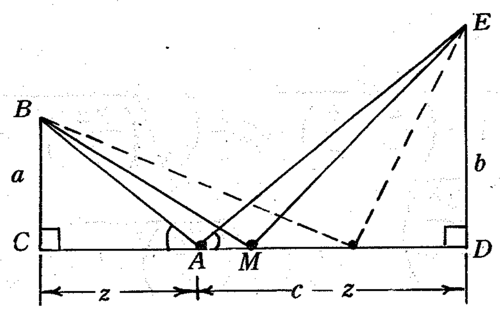
$$a : d = b : c$$

5° 從圖一中，如果我們固定CB與DE 而讓A當做動點在CD線段中任意變動，則此圖形可做爲證明某一不等式的有利方法之一，事實上是有利於證明下面的不等式：

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}{2} \geqslant \sqrt{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$

（其中x ，y爲任意正數）。

這個題目的來由，在物理上可看作有一光源由B發射，經平滑面CD 的A點反射到E所經過的距離$BA+AE$一定比由E到CD上的其他點再到E的距離要來得小，參照下圖五。



圖五

即入射角＝反射角（$\angle BAC=\angle EAD$）時，$BA+AE$ 比從B到CD 上的其他點M再到E的長度要來得小，

即 $$BA+AE \leqslant BM+ME$$

我們取M爲CD 之中點（爲特別的點）來比較即可。

取 $BC=a$，$ED=b$，$CD=c$，$CA=z$

則 $AD=c-z$，並取 $CM=MD=\dfrac{C}{2}$。

於是因入射角等於反射角，所以

$$\triangle BCA \backsim \triangle ADE\ ,\ \frac{a}{z}=\frac{b}{c-z}\left(=\frac{a+b}{c}\right)$$

或
$$z=\frac{ac}{a+b},\ c-z=\frac{bc}{a+b}$$

利用畢氏定理：

$$BA=\sqrt{a^2+\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2}=\frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

同樣的

$$AE=\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

結果由 $BA+AE\leqslant BM+ME$ （等號成立的充要條件是A恰好是CD之中點時，即$a=b$時）得

$$\sqrt{(a+b)^2+c^2}\leqslant\sqrt{a^2+\frac{c^2}{4}}+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{4}}$$

兩邊除以c便得

$$\sqrt{1+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{2b}{2}\right)^2+1}\right)$$

或
$$\sqrt{1+\left(\frac{\frac{2a}{c}+\frac{2b}{c}}{2}\right)^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{2a}{c}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{2b}{c}\right)^2+1}\right)$$

令
$$x=\frac{2a}{c},\quad y=\frac{2b}{c}$$
，則

$$\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}{2}$$

注意：此不等式的等號成立的充要條件爲$x=y$（即在引導過程中$a=b$或A爲CD之中點）。

上面幾個問題是利用一個圖形的變化，推導三角公式及不等式證明的一種方法。由此理念與啓發，尙有許多類似的思考方針，可引導我們創新的某種思路。

本文資料取自下面參考文獻：

A.Weiner, President Garfield's Configuration, The Mathematics Teacher, Vol. 75, No.7 Oct. 1982.