

哈雷彗星的軌道及計算法

何耀坤

臺南市私立光華女中

彗星的出現曾經有記錄的總數，至 1972 年止共有 1800 個，其中對軌道有計算的為 924 個，當中大部分是自 1700 年以後出現的。1700 年以前的彗星對位置觀測個案少，有記錄的當中其位置記不正確，而且大部分缺軌道計算。例如於 1900 年以前出現而有記錄的彗星約有 1000 個，其中已知軌道的只有 80 個，其中 24 個是哈雷彗星，並且是事後逆算的。

關於彗星的運動和軌道，自牛頓以來有許多觀測研究，至於彗星物理現象的研究是近年開始的，這對探索行星間空間有重要意義。彗星是富有魅力的天體，最近對彗星的物理觀測較熱門，但在基本上要把握彗星的運動和位置。彗星運動的研究現在大略完成，但對實際計算及處理龐大數量計算仍多。過去出現的彗星中仍有許多未計算軌道的，至於彗星的力學，天體軌道論及計算法仍有許多未解決課題。

一、彗星的軌道

牛頓在其著書「自然哲學的數學原理」(Principia) 的第三篇中記述「彗星以太陽為焦點作橢圓軌道運動，但很接近於拋物線」。哈雷(Edmond Halley) 將自 1337 至 1698 年間出現的彗星記錄 24 個，並求其拋物線軌道於 1705 年出版。當中發現自 1531 年，1607 年和 1682 年的彗星軌道很相似。他認為這三個彗星是同一個而以 76 年為週期出現，並預言這彗星會在 1759 年再出現，即是有名的哈雷彗星。果然這彗星於 1759, 1835, 1910 年出現，下次是明年二月九日會通過近日點。現在用的橢圓軌道計算法是高斯(Gauss 1777 ~ 1855) 於 1801 年發表，成為現在計算彗星軌道的基本。

1. 橢圓軌道

彗星按照軌道週期可分為短週期彗星（週期 200 年以下的）和長週期彗星（週期 200 年以上的），哈雷彗星是屬於前者。短週期彗星軌道為橢圓，其長徑之半稱半長徑（圖 1 的 a ），太陽在其中一個焦點上（據 Kepler 的行星運動第一法則）。長徑之中央點是軌道中心，其與太陽之距離和半長徑之比稱離心率(e)，哈雷彗星之 $e = 0.967$ 。在橢圓軌道時離心率比 0 大，比 1 小。

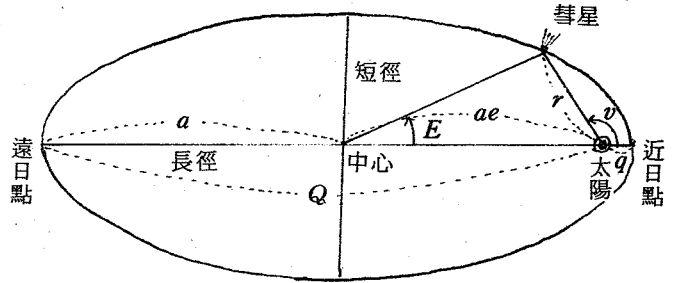


圖 1 橢圓軌道 a = 軌道半長徑 e = 離心率 q = 近日點距離
 Q = 遠日點距離 v = 真近點角 r = 日心距離

半長徑以天文單位 (AU) 表示，可決定軌道之大小。設近日點距離為 q ，那麼可成立下列關係。

$$q = a - ae = a(1 - e), Q = a + ae = a(1 + e), \text{ 及 } q + Q = 2a$$

Q 為遠日點距離，又 $a = q \div (1 - e)$ ，因在長週期軌道時 e 很接近 1，所以 a 值很大。能知 a ，就可求週期（以年表示） P ，那麼 $P = a \sqrt{a}$ （據 Kepler 行星運動第三法則）。例如設 $a = 100$ AU，那麼 $P = 100 \times \sqrt{100} = 1000$ 年。

太陽至彗星之連線稱動徑（圖 1 的 r ），又稱日心距離， v = 真近點距離角， e 為離心率，那麼

$$r = a(1 - e^2) / (1 + e \cos v)$$

設 E = 離心近點距離角，那麼

$$r \cos v = a(\cos E - e), r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

天體軌道在一平面上時，這平面稱天體軌道面，在軌道焦點上有太陽。地球的軌道面也是一個平面，稱黃道面。彗星軌道面不一定和黃道面同一，如圖 2 和黃道面有傾斜。太陽系內的天體軌道面的傾斜和方向，以黃道面為基準表示。彗星軌道面和黃道面交接直線稱交線，而太陽在交線上。彗星從黃道面南側向北進點稱昇交點，在 180° 相反方向有降交點，彗星從降交點，自黃道北側通過南側。昇交點位置在黃道面上，從春分點

和時針移動相反方向的角度稱昇交點黃經（在圖 2 中的 Ω ）。春分點是在春分時的太陽方向，是表示天體位置的重要基準點。彗星軌道面在交線和黃道面交叉，和黃道面的傾斜度稱黃道夾角（圖 2 中以 i 表示）。軌道面傾斜結果，彗星運動方向和地球運行方向會相反。黃道夾角比 90° 小時稱順行軌道， 90° 至 180° 時稱逆行軌道，哈雷彗星的黃道夾角為 162° ，所以是逆行軌道。

（圖 3）

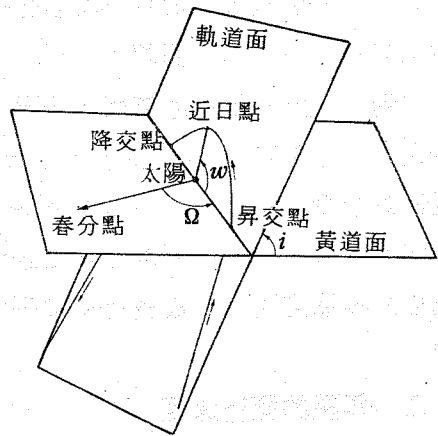


圖 2 彗星的軌道

彗星軌道位置決定後還要知道彗星通過近日點時間，這樣才能完全明白彗星的運行。譬如說軌道位置如火車鐵路位置，近日點通過時間如火車時間表。若能知天體公轉週期就能知彗星的角速度，那麼可計算任何時間的彗星位置。彗星軌道還有一種傾斜，是半長徑之方向，是以軌道面上的近日點方向表示。於圖 2，沿彗星運行方向自昇交點至近日點之角度（以 w 表示的）稱近日點引數。根據近日點引數(w)和昇交點黃經(Ω)以及黃道夾角(i)等三角度可決定彗星軌道，特稱角度要素，都以黃道面和春分點為基準。

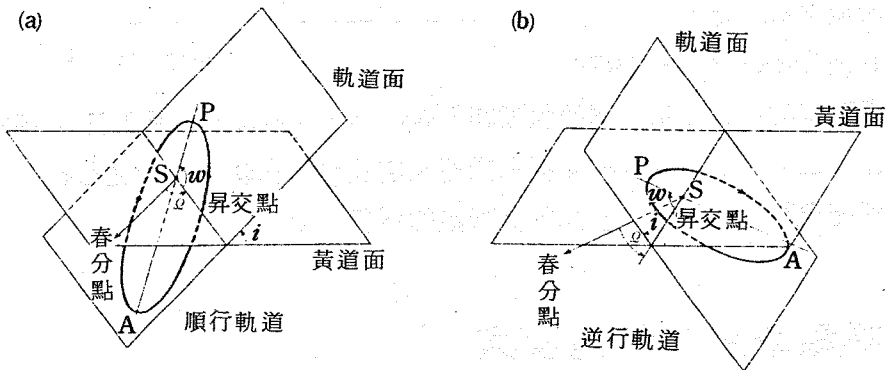


圖 3 軌道面的配置

2. 彗星軌道的特徵

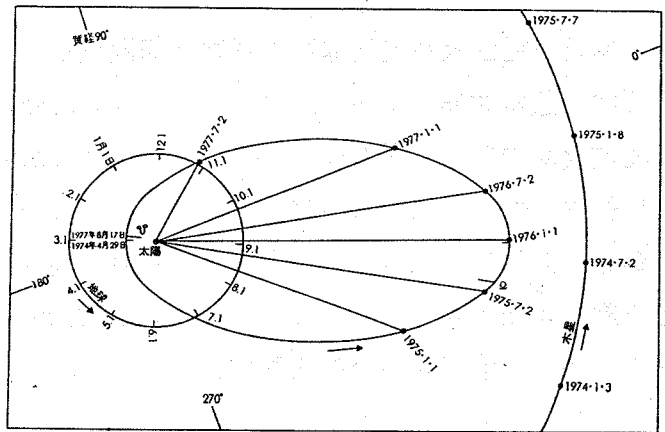
彗星接近太陽時才會現出光亮，所以在遠方的彗星或在太陽附近時無法觀測。長週期彗星的遠日點分布大略平均，但多在太陽運行背點為中心的方向。短週期彗星的遠日點集中於黃道面，少有離黃道面 30° 以上的。這是短週期彗星受行星的攝動（引力影響），尤其受木星和土星之影響較大。長週期彗星的黃道夾角多在 120° 至 150° 之間，而且其近日點引數多在 0° 至 180° 之間，所以過去發現彗星地點多在北半球。短週期彗

星的近日點引數集中於 0° 附近和 180° 附近，這是受行星攝動影響以及其近日點和遠日點也分布於黃道面的明證。

彗星的近日點距離方面，1至2 AU的彗星最多，比7 AU大的未發現。在長週期彗星之中，比1 AU大的較少，大部分彗星近日點距離比1 AU小。可是在短週期彗星之中近日點距離比1 AU小的稀少，多在1至2 AU間。原因是屢次接近太陽的短週期彗星比長週期彗星消耗多，所以近日點距離較小的很少。近日點距離大的彗星少接近地球，因為離太陽遠方而暗，被發現機會少。

3. 彗星的運行速度

彗星的運行速度根據Kepler第二法則：「行星的動徑所描的面積之變化比率為一定」，又稱面積速度一定的法則。所謂行星動徑是連結太陽和行星之直線，又稱日心距離。行星移動時動徑又移動，而以太陽為中心形成扇形，其扇形面積的增加速度不管動徑之增減常為一定。



5. 昇交點黃經 Ω 6. 黃道夾角 i

彗星軌道由 Ω , i , w 三個而決定，再加上近日點通過時間 T ，就能確實決定彗星位置。例如哈雷彗星

$T = 1910$ 年 4 月 20 日

$P = 76.1$ 年

$\Omega = 57^\circ.8464$

$i = 162^\circ.2151$

$w = 111^\circ.7146$

$e = 0.967298$

下表是江氏 (T. Kian) 和約曼斯 (Donald K. Yeomans) 所計算的過去哈雷彗星的接觸軌道要素，他們追溯到公元前 315 年計算哈雷彗星的軌道。現在的彗星軌道計算能對應到公元前 1054 年的記錄。

表 1 哈雷彗星的接觸軌道要素

年	近日點通過 (ET)	q (AU)	e	P	ω	Ω	i	元 期 (ET)
1910 II	1910 Apr. 20.17771	0.5871888	0.9672968	76.08	111.71703	57.84670	162.21507	1910 May 9.0
1835 III	1835 Nov. 16.43871	0.5865423	0.9673860	76.27	110.68555	56.80251	162.25518	1835 Nov. 18.0
1759 I	1759 Mar. 13.06075	0.5844466	0.9676792	76.89	110.68990	56.52871	162.36893	1759 Mar. 21.0
1682	1682 Sep. 15.28069	0.5826084	0.9679230	77.41	109.20541	54.85222	162.26569	1682 Aug. 31.0
1607	1607 Oct. 27.54063	0.5836150	0.9674895	76.00	107.53140	53.05354	162.90204	1607 Oct. 24.0
1531	1531 Aug. 26.23846	0.5811975	0.9677499	76.50	106.95724	52.31044	162.91385	1531 Aug. 14.0
1456	1456 Jun. 9.03257	0.5797014	0.9679974	77.10	105.81647	51.15021	162.88607	1456 Jun. 28.0
1378	1378 Nov. 10.68724	0.5762013	0.9683723	77.70	105.27668	50.30348	163.10897	1378 Nov. 5.0
1301	1301 Oct. 25.58194	0.5727097	0.9689307	79.14	104.48199	49.43575	163.07179	1301 Nov. 9.0
1222	1222 Sep. 28.82294	0.5742108	0.9688444	79.12	103.83087	48.58845	163.18782	1222 Oct. 15.0
1145	1145 Apr. 18.56090	0.5747921	0.9687853	79.02	103.68573	48.33830	163.22004	1145 Apr. 2.0
1066	1066 Mar. 20.93405	0.5744956	0.9688655	79.26	102.45543	46.90873	163.10814	1066 Mar. 8.0
989	989 Sep. 5.68757	0.5819144	0.9678887	77.14	101.46581	45.84533	163.39474	989 Aug. 19.0
912	912 Jul. 18.67429	0.5801559	0.9680692	77.45	100.75913	44.93122	163.30679	912 Jul. 14.0
837	837 Feb. 28.27000	0.5823182	0.9678055	76.90	100.08403	44.21516	163.44258	837 Mar. 10.0
760	760 May 20.67126	0.5818368	0.9678541	77.00	99.98016	43.97218	163.43860	760 Jun. 2.0
684	684 Oct. 2.76682	0.5795841	0.9681495	77.62	99.13197	43.08465	163.41338	684 Sep. 29.0
607	607 Mar. 15.47581	0.5808315	0.9680396	77.47	98.78209	42.54593	163.47190	607 Mar. 18.0
530	530 Sep. 27.12998	0.5755915	0.9687113	78.90	97.56504	41.26006	163.38977	530 Oct. 8.0
451	451 Jun. 28.24911	0.5737438	0.9689123	79.29	97.01122	40.49602	163.47468	451 Jun. 25.0
374	374 Feb. 16.34230	0.5771940	0.9685857	78.76	96.49409	39.86451	163.53760	374 Mar. 1.0
295	295 Apr. 20.39842	0.5759148	0.9687528	79.13	95.22565	38.39767	163.36268	295 Apr. 25.0
218	218 May 17.72347	0.5814660	0.9679755	77.37	94.13158	37.19436	163.56891	218 Apr. 29.0
141	141 Mar. 22.43405	0.5831377	0.9678439	77.23	93.67835	36.50620	163.43259	141 Mar. 24.0
66	66 Jan. 25.96014	0.5851046	0.9675458	76.55	92.63672	35.41600	163.57158	66 Feb. 6.0
12 B.C.	-11 Oct. 10.84852	0.5871999	0.9673664	76.33	92.54399	35.19064	163.58392	-11 Oct. 8.0
87 B.C.	-86 Aug. 6.46171	0.5856047	0.9676769	77.12	90.76383	33.30553	163.33505	-86 Aug. 23.0
164 B.C.	-163 Nov. 12.56604	0.5845170	0.9676686	76.88	89.09882	31.35152	163.69946	-163 Nov. 15.0
240 B.C.	-239 May 25.11796	0.5853647	0.9675871	76.75	88.09919	30.09811	163.46207	-239 Jun. 7.0
315 B.C.	-314 Sep. 8.52367	0.5874295	0.9673085	76.17	86.86997	28.83174	163.59479	-314 Sep. 29.0

三、哈雷彗星的軌道特徵

哈雷彗星是唯一自公元前就有觀測記錄的週期性彗星，觀測期間集中在春季和秋季（表1），因為哈雷彗星的近日點方向和該時期地球在軌道上的位置略一致。哈雷彗星的軌道在許多週期彗星之中屬於特異的，例如其軌道黃道夾角為 162° ，其運行方向和大部分行星的公轉方向相反。如此的逆行軌道的週期彗星，除哈雷彗星外只有三個而已。哈雷彗星的近日點距離為 0.59 AU ，比其他的週期彗星短。以前被認為哈雷彗星的核半徑比其他彗星大，但是根據最近的推定半徑在2至3公里之間，和普通的彗星核差不多。因為其近日點距離小，所以每次回歸時出現壯觀的形狀。

圖5是約曼斯和江氏在1981年發表過去3300年間的哈雷彗星軌道要素之變化。週期（ P ）變動大的時期大多和地球有異常接近，看起來近日點引數（ w ）和昇交點經度（ Ω ）略相等增加。但是根據東京天文台古在由秀台長的計算， w 在 47° 至 133° 之間，黃道夾角（ i ）也在 164° 至 123° 之間，有大的變動。雖然在圖5所表示的哈雷彗星軌道似很安定，無論過去或將來，和地球異常接近機會很多。今後對哈雷彗星的軌道的長期變化，不易很精確地計算出來。哈雷預言於1759年會再出現的彗星，事實上有一年之計算誤差。因為牛頓和哈雷時代對天體軌道計算未有攝動理論，這是後來由法國 Lagrange（1736—1813），Laplace（1749—1827）及英國 Hamilton（1805—1865）等數學家發展出來的。

四、彗星軌道計算法

彗星軌道由 P （或 a ）， e ， Ω ， i ， w ， T 等六值而定，為決定這六值最少要有六項觀測資料。天文觀測不能直接測定其距離和長度，只能觀測角度。在天球上假設如地球的經緯度的座標稱赤道座標，即是赤經和赤緯，由此兩值決定彗星在天球上的位置，要觀測六值要有三組的位置觀測。以如此方法所定的軌道稱接觸軌道，這六值稱接觸軌道要素。由天體位置觀測而計算實際軌道稱決定軌道，這些要經過複雜計算。最近由於電子計算機普及，

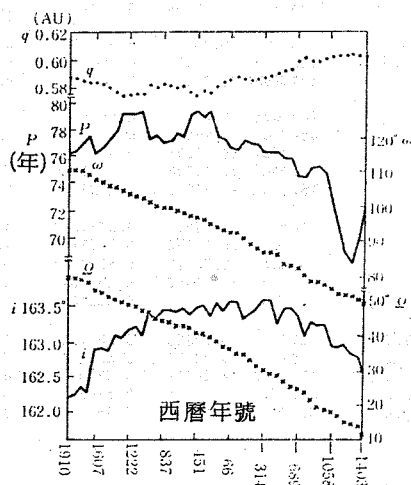


圖5 哈雷彗星的軌道要素之變動

不但天文學家，在一般業餘天文人士中也有人會操作這計算。

1. 天體軌道論

所謂彗星觀測是和已知位置的恒星比較而測定彗星位置，這是從地球看的彗星方角，但要知以太陽為原點的地球的位置和觀測時間。現在天文學對地球軌道之大小及位置已知正確，所以能知和彗星的距離就能計算彗星軌道。圖 6 中，地球至彗星之距離為 Δ （地心距離），地球和太陽距離為 R （既知）， Δ 和 R 之角度為 ψ ，從觀測得知。 r 為彗星的動徑，能知 Δ 就可知彗星的空間位置及 r 。得知 r 就能算出彗星軌道，但最重要的 Δ 難從觀測得知。將來也許要靠電波觀測科技才能正確測出彗星的地心距離，那麼彗星軌道能更簡單地算出。

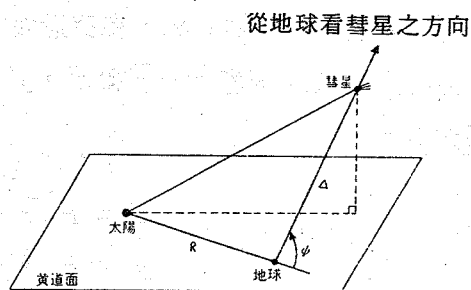


圖 6 太陽、地球、彗星之位置關係

2. 軌道決定原理

彗星軌道面是通過太陽的一個平面，根據這原則可假定彗星軌道上的三點座標間成立的幾何條件（圖 7），這是於直交座標的表示平面的公式之應用。其次是根據 Kepler 的第二法則，可求算連這三點和太陽的三支動徑所組合的三個扇形面積，以及各時間間隔之間所成立的关系。這是根據橢圓或拋物線的性質，將軌道上各點和太陽所連的扇形和三角形之面積之比，用動徑和時間計算。圖 7 中，設時間 t_1 和 t_2 的彗星位置各為 C_1 和 C_2 ，那麼扇形 $C_1 S C_2$ 的面積和三角形 $C_1 S C_2$ 的面積之比，由 r_1 和 r_2 及 $(t_2 - t_1)$ 可求出。

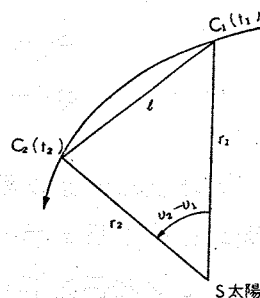


圖 7 軌道面上的扇形和三角形

3. 需要三項觀測

彗星軌道要素有六個，從三次的彗星位置觀測，每次得彗星的座標值兩個（赤經和赤緯），一共得六個座標值，從這六個數值可算出六個軌道要素。

4. 彗星的空間座標和天球上的位置

自軌道要素，於圖8中假定計算出 r 和 f （真近點離角），在軌道面內取直交座標系 $\bar{x} \cdot \bar{y}$ ，那麼

$$\bar{x} = r \cos f, \quad \bar{y} = r \sin f \quad \dots\dots\dots(1)$$

以太陽為中心，春分點方向為 x' 軸，黃道面垂直方向（向北取正）為 z' 軸，在黃道面內為 x' 和 z' 軸左方向為 y' 軸，那麼 $\bar{x}$ ， $\bar{y}$ 和 x' ， y' ， z' 之間的關係如下。

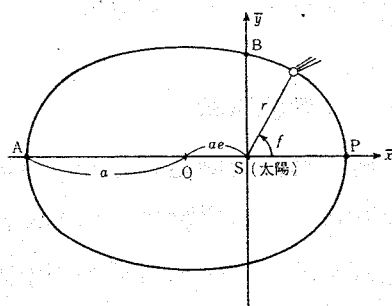


圖8 橢圓軌道和座標

$$\left. \begin{aligned} x' &= P_x \bar{x} + Q_x \bar{y} \\ y' &= P_y \bar{x} + Q_y \bar{y} \\ z' &= P_z \bar{x} + Q_z \bar{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

在此右邊的 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 之係數為

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos w \cos \Omega - \sin w \sin \Omega \cos i \\ Q_x &= -\sin w \cos \Omega - \cos w \sin \Omega \cos i \\ P_y &= \cos w \sin \Omega + \sin w \cos \Omega \cos i \\ Q_y &= -\sin w \sin \Omega + \cos w \cos \Omega \cos i \\ P_z &= \sin w \sin i \\ Q_z &= \cos w \sin i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

天球上的座標以赤經和赤緯表示，黃道座標 x' ， y' ， z' 要改為以赤道為準的座標。設天北極方向為 z 軸，赤道面內置 x 和 y 軸，春分點方向為 x 軸，那麼 x' ， y' ， z' 和 x ， y ， z 之關係如下。

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon \\ z &= y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ε 是赤道面和黃道面的所謂黃道夾角，以下式計算。

$$\varepsilon = 23^{\circ}27'08.''3 - 46.''85t \quad \dots\dots\dots(5)$$

t 以 36524.22 日為單位，自 1900.0 年至計算時刻的時間。

在(4)式已變成以太陽中心的赤道直交座標，但我們從地球觀測，所以須改為以地球為中心的赤道直交座標。若彗星靠近地球時，應考慮地球中心和地球表面上的觀測點之不同的視差。彗星和地球的距離為 0.1 AU 時，其視差最大時有 1 : 5。圖 9 中 S 為太陽， C 為彗星， E 為地球中心， T 為觀測者的互相位置關係，最後應計算向量 $\vec{TC}$ 。

$$\vec{TC} = \vec{SC} + \vec{ES} + \vec{TE} \quad \dots\dots\dots(6)$$

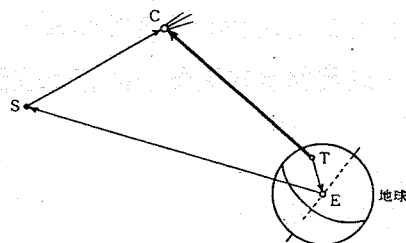


圖 9 彗星的地心視差

$\vec{SC}$ 之各成分為(4)， $\vec{ES}$ 之成分，向量 $\vec{TE}$ 之方向，由地球自轉，和彗星及太陽間位置隨時變化。

若以地球為中心，在經度緯度 0 度之方向，經度 + 90 度（東經取正），緯度 0 度之方向及緯度 + 90 度之方向為直交軸的座標上，設觀測點的座

標為 u_0, v_0, w_0 ，觀測點的緯度為 φ ，經度為 λ 時， u_0, v_0, w_0 之關係如下。

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ v_0 &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ w_0 &= N \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

N 用地球赤道半徑 6378.14 公里（等於 4.2635×10^{-5} AU），現在地球形狀假定為球狀計算，若以回轉橢圓體時需要更精密的計算。觀測點的地心赤道直交座標 u, v, w 和 u_0, v_0, w_0 用格林維基（Greenwich）平均恒星時間 θ ，那麼

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \cos \theta - v_0 \sin \theta \\ v &= u_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta \\ w &= w_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

以世界時表示的時刻 UT 相對的 θ 如下式

$$\theta = UT + 6^h 38^m 45.^s 836 + 8640184.^s 542 T_u + 0.^s 0929 T_u^2.$$

上式中 T_u 是自 1899 年 12 月 31 日中午（世界時），所經過的日數以世界時（ UT ）

算後，除 36525 日的。

設從觀測點看彗星的赤經爲 α ，赤緯爲 δ ，距離爲 Δ ，向量 $\vec{TC}$ ，在赤道直交座標的各成分爲 $\Delta \cos \delta \cos \alpha$ ， $\Delta \cos \delta \sin \alpha$ ， $\Delta \sin \delta$ ，那麼(6)式可爲

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos \delta \cos \alpha &= x + X_{\odot} - u \\ \Delta \cos \delta \sin \alpha &= y + Y_{\odot} - v \\ \Delta \sin \delta &= z + Z_{\odot} - w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

右邊在(4)式和(8)式是既知數，所以從上式(9)能求出最後答案即是自觀測點至彗星的距離，以及彗星在天球上的正確位置。

參考資料

1. Guide to the Return of Halley's Comet : Richard Flaste 等四人共著，天體軌道論：長谷川一郎著。
2. 彗星：山本哲生著。
3. 現代太陽系科學：大林辰藏編。
4. 彗星：藪下信著。
5. 星空のトラベラー：長谷川一郎著。
6. A Story of Halley's Comet : Ichiro Hasegawa。
7. 理科年表(1985)。
8. 天文年鑑(1985)：誠文堂新光社。