圓之鏡射點與成像點的研究

李輝濱
嘉義市私立輔仁中學

壹、前　　言

圓之鏡射點是不是圓之成像點？欲回答這個問題，先來看看圓鏡射的定義：圓鏡射之定義與圓正交性質有關。給一定圓 C_0 ，與一函數 $f: R^2 \to R^2$ ，若對平面上任一點 P 及對任一通過 P 且與 C_0 正交的圓 C，恆有 $f(P) \in C$，即 $f(P)$ 爲一切圓 C 除 P 外的另一交點，則稱 f 爲對於圓 C_0 的圓鏡射。

已知定圓 $C_0: x^2+y^2=r_0^2$ 且 $f: R^2 \to R^2$ 爲圓 C_0 鏡射。對 $\forall P(a, b) \neq (0,0)$ 的 C_0 圓鏡射點爲

$$P'(x_m, y_m) = f(P)$$

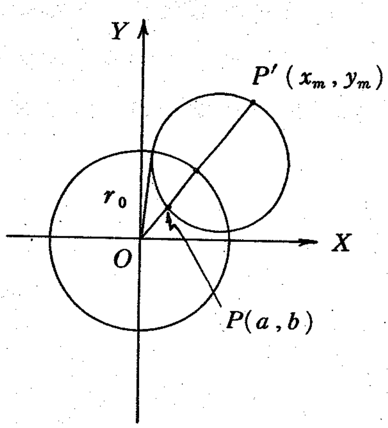
此處 $x_m = \dfrac{ar_0^2}{a^2+b^2}$， $y_m = \dfrac{br_0^2}{a^2+b^2}$

由圓之正交性、圓之切割線性質知（圖一）

$\because O$ 表示原點，$\overline{OP} \times \overline{OP'} = r_0^2 \Longrightarrow \overline{OP'} = \dfrac{r_0^2}{\overline{OP}}$

$$\therefore \overrightarrow{OP'} = \frac{r_0^2}{\overline{OP}} \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{r_0^2}{\overline{OP}^2} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$= \frac{r_0^2}{a^2+b^2}(a, b)$$



圖一

$$=\left[\frac{r_0^2 a}{a^2+b^2}, \frac{r_0^2 b}{a^2+b^2}\right]=\left(x_m, y_m\right)$$

即點 $P(a,b)$ 對圓 C_0 的鏡射點爲

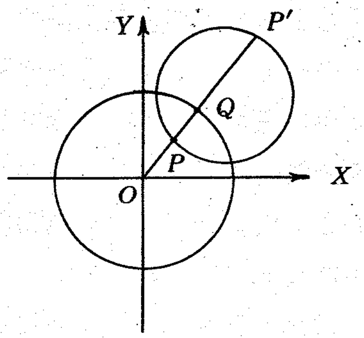
$$P'\left(\frac{r_0^2 a}{a^2+b^2}, \frac{r_0^2 b}{a^2+b^2}\right)$$

由以上之定義知，鏡射點之推導僅與圓之正交性相關，和如何經由圓鏡映像成像點之物理性質 — 反射原理，却無任何關係。因此，鏡射點與成像點的身份確實有鑑別的必要。（顯然，成像點之形成原理僅與物理現象有關，這點是兩者可資以區別的。）

貳、本　　文

以下正文中，將詳細敍述出尋求成像點之推導過程。文中牽涉到解析幾何上的基本知識、性質和物理學上的成像原理；筆者嚐試引用比較淺顯直觀的方法，將其統合運用來解釋成像點之成像過程，藉以讓讀者理解本文中數學處理的描述要領。

在圓鏡射的數學關係式和圖形中，筆者發覺到一特殊性質，敍述如下：（見圖二）



圖二

(一) 鏡射點不是成像點

令 $\overline{PQ}=U$，其大小爲

$$U=r_0-\sqrt{a^2+b^2}$$

$\overline{QP'}=V$，其大小爲

$$V=\sqrt{\left(\frac{r_0^2 a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{r_0^2 b}{a^2+b^2}\right)^2}-r_0=\frac{r_0^2}{\sqrt{a^2+b^2}}-r_0$$

則等式 $\dfrac{1}{U}=\dfrac{1}{V}+\dfrac{1}{r_0}$ 必成立。

證明：$\dfrac{1}{V}+\dfrac{1}{r_0}=\dfrac{1}{\dfrac{r_0^2}{\sqrt{a^2+b^2}}-r_0}+\dfrac{1}{r_0}$

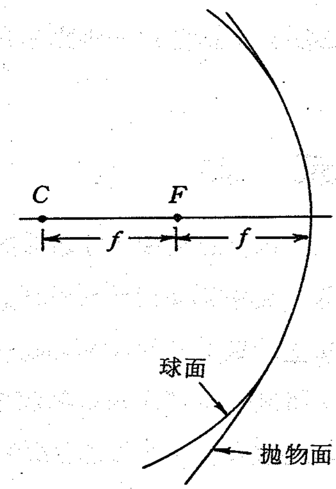
$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r_0(r_0-\sqrt{a^2+b^2})}+\frac{1}{r_0}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+(r_0-\sqrt{a^2+b^2})}{r_0(r_0-\sqrt{a^2+b^2})}$$

$$=\frac{1}{r_0-\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{1}{U}$$

故　$$\frac{1}{U}=\frac{1}{V}+\frac{1}{r_0}\Longrightarrow\frac{1}{U}-\frac{1}{V}=\frac{1}{r_0}\quad \text{即}\quad \frac{1}{U}+\frac{1}{(-V)}=\frac{1}{r_0}$$

這個等式性質之出現，使我們感覺到鏡射點不是成像點了。

因爲假如把圓C_0看成爲一個滿足反射定律之球面鏡的一環，則在Q點附近之極小曲線即可看成是一拋物線鏡。由幾何學之曲面圖形知，（見圖三）球面鏡以C爲曲率中心，拋物面以F爲焦點，兩鏡面之鏡軸疊合時，鏡面靠近鏡頂處幾乎重合。只有在遠離主軸時，兩者才有顯著的差別，即此時球面較靠近鏡軸，而拋物面張開較大。至於只用鏡頂附近的中央部份鏡面時，兩者實無甚大差別。事實上，因爲製造球面鏡較拋物面鏡爲易，故一般常用曲率半徑爲$r_0=2f$之球面鏡，代替焦距爲f之拋物面鏡。且此種凹面鏡身之大小甚小於其鏡面之曲率半徑。



圖三
球面鏡與拋物面鏡間之關係。
兩者之主焦點爲F，球心爲C.

因此，上述等式性質中的U即爲凹面鏡前之物距，V爲鏡後之像距；點$P(a,b)$之鏡射點P'係在鏡後，按凹面鏡成像原理，此像點應爲虛像。而V應取負値

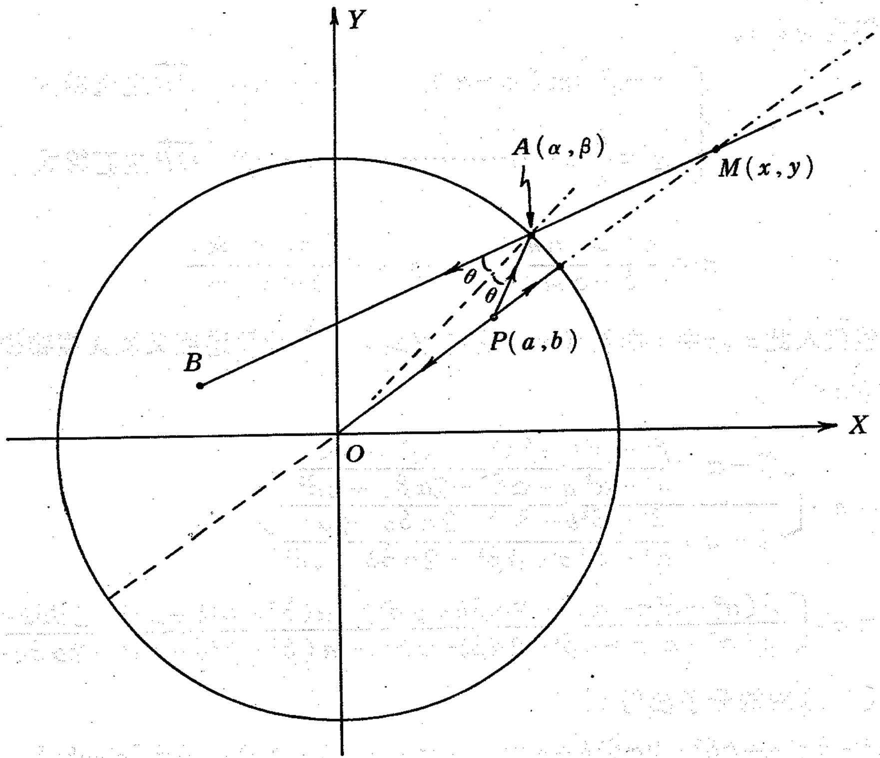
$$\therefore\frac{1}{U}+\frac{1}{(-V)}=\frac{1}{r_0}$$

顯然地數學式$\frac{1}{U}+\frac{1}{-V}=\frac{1}{r_0}$並不滿足球面鏡之成像公式——高斯式$\frac{1}{U}+\frac{1}{-V}=\frac{1}{f}$，此$f$爲球面鏡之焦距$f=r_0/2$（焦距爲曲率半徑之1/2）。至此，我們可以確定圓之鏡射點並不是成像點。換言之，接成像性質點$P(a,b)$對圓C_0之成像點不是鏡射點P'，而是另外的點了。

㈡　圓之成像點

取定圓C_0：$x^2+y^2=r_0^2$　及圓內部一點$P(a,b)$（見圖四），現在要看看最靠近$P(a,b)$點的圓之一小部份曲線對$P(a,b)$點的成像情形，令$P(a,b)$點發出一道光線，

射在圓環鏡線的$A(\alpha,\beta)$點上，反射後其反射線的後退延長線$\overrightarrow{AM}$與光軸$\overrightarrow{OP}$相交於M點，此點$M(x,y)$即爲點$P(a,b)$對鏡線上$A(\alpha,\beta)$點所成之像點。解出此點$M(x,y)$的坐標值。令$\overleftrightarrow{PA}$之斜率爲m_1，$\overleftrightarrow{OA}$者爲m_2，$\overleftrightarrow{AB}$者爲m。



圖四

則 $m_1=\dfrac{\beta-b}{\alpha-a}$, $m_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$ 由幾何定理知

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\left(\dfrac{\beta-b}{\alpha-a}\right)-\dfrac{\beta}{\alpha}}{1+\left(\dfrac{\beta-b}{\alpha-a}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{a\beta-b\alpha}{\alpha(\alpha-a)+\beta(\beta-b)}$$

利用$\tan\theta$，先求得m之值，依圖四知，

又由 $$\tan\theta=\frac{m_2-m}{1+m_2\cdot m}\Longrightarrow m=\frac{m_2-\tan\theta}{1+m_2\cdot\tan\theta}$$

將m_2, $\tan\theta$ 值代入

得　$m=\dfrac{\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{a\beta-b\alpha}{\alpha(\alpha-a)+\beta(\beta-b)}}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{a\beta-b\alpha}{\alpha(\alpha-a)+\beta(\beta-b)}}$（化簡之）$=\dfrac{\beta^3-\beta^2b+\beta\alpha^2-2\alpha\beta a+b\alpha^2}{\alpha^3-\alpha^2a+\alpha\beta^2-2\alpha\beta b+a\beta^2}$

接著解聯立方程式

$$\begin{cases} y-\beta=m(x-\alpha) \cdots\cdots\cdots\cdots(1) & \overleftrightarrow{AB}\text{之直線式} \\ y=\dfrac{b}{a}x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) & \overleftrightarrow{OP}\text{之直線式} \end{cases}$$

得　$$x=\frac{a(\beta-\alpha m)}{b-am}\ ,\quad y=\frac{b(\beta-\alpha\cdot m)}{b-a\cdot m}$$

將m之值代入此x,y中，由於解x,y之過程均同，而計算過程又極其複雜繁瑣，僅就x計算如下：

$$x=a\cdot\left[\frac{\beta-\alpha\cdot\dfrac{\beta^3-\beta^2b+\beta\alpha^2-2\alpha\beta a+b\alpha^2}{\alpha^3-\alpha^2a+\alpha\beta^2-2\alpha\beta b+a\beta^2}}{b-a\cdot\dfrac{\beta^3-\beta^2b+\beta\alpha^2-2\alpha\beta a-b\alpha^2}{\alpha^3-\alpha^2a+\alpha\beta^2-2\alpha\beta b+a\beta^2}}\right]$$

$$=a\cdot\left[\frac{\beta(\alpha^3-\alpha^2a+\alpha\beta^2-2\alpha\beta b+a\beta^2)-\alpha(\beta^3-\beta^2b+\beta\alpha^2-2\alpha\beta a+b\alpha^2)}{b(\alpha^3-\alpha^2a+\alpha\beta^2-2\alpha\beta b+a\beta^2)-a(\beta^3-\beta^2b+\beta\alpha^2-2\alpha\beta a+b\alpha^2)}\right]\cdots(3)$$

先化簡〔　〕內的分子部份：

$$\beta\alpha^3-\beta\alpha^2a+\alpha\beta^3-2\alpha\beta^2b+a\beta^3-\alpha\beta^3+\alpha\beta^2b-\beta\alpha^3+2\alpha^2\beta a-b\alpha^3$$

（消項，化簡之）

$$=a\alpha^2\beta-b\alpha\beta^2+a\beta^3-b\alpha^3=a\alpha^2\beta-b\alpha^3+a\beta^3-b\alpha\beta^2$$

$$=\alpha^2(a\beta-b\alpha)+\beta^2(a\beta-b\alpha)=(a\beta-b\alpha)(\alpha^2+\beta^2)=(a\beta-b\alpha)\cdot r_0^2$$

再化簡分母部份：

$$b\alpha^3-ab\alpha^2+b\alpha\beta^2-2b^2\alpha\beta+ab\beta^2-a\beta^3+ab\beta^2-a\alpha^2\beta+2a^2\alpha\beta-ab\alpha^2$$

$$=b\alpha^3-2ab\alpha^2+2ab\beta^2-2b^2\alpha\beta+2a^2\alpha\beta+b\alpha\beta^2-a\alpha^2\beta-a\beta^3$$

$$=b\alpha(\alpha^2+\beta^2)-a\beta(\alpha^2+\beta^2)+2a\alpha(a\beta-b\alpha)+2b\beta(a\beta-b\alpha)$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)(b\alpha-a\beta)+(a\beta-b\alpha)(2a\alpha+2b\beta)$$

$$=-(a\beta-b\alpha)\cdot r_0^2+(a\beta-b\alpha)(2a\alpha+2b\beta)$$

$$=(a\beta-b\alpha)(2a\alpha+2b\beta-r_0^2)$$

（將此分子、分母部份分別代入式(3) x 之值中）

故 $$x = a \cdot \frac{(a\beta - b\alpha)\cdot r_0^2}{(a\beta - b\alpha)(2a\alpha + 2b\beta - r_0^2)} = \frac{ar_0^2}{2a\alpha + 2b\beta - r_0^2}$$

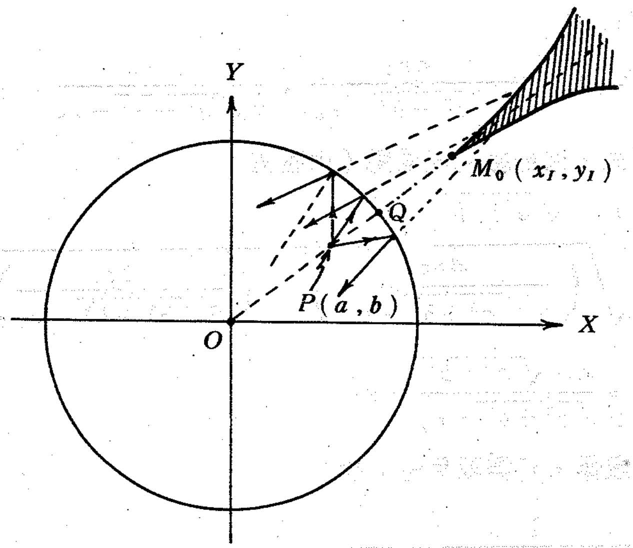
同理，得 $$y = \frac{br_0^2}{2a\alpha + 2b\beta - r_0^2}$$

因此，點 $M(x\,,y) = M\left(\dfrac{ar_0^2}{2a\alpha + 2b\beta - r_0^2}\,,\dfrac{br_0^2}{2a\alpha + 2b\beta - r_0^2}\right)$ 即爲點 $P(a\,,b)$ 對於圓 C_0 上之點 $A(\alpha,\beta)$ 的成像點。

此刻解出之點 $M(x\,,y)$ 並非爲固定值，而是依著點 $A(\alpha,\beta)$ 之位置而變動的。由此可推得，點 $P(a\,,b)$ 在對於圓 C_0 之成像點並非僅爲一點（定點），而是滿足 x,y 之解及 $\alpha^2+\beta^2=r_0^2$ 關係之點 $M(x\,,y)$ 之聯集圖形區域，此成像區的解集合爲：

$$\left\{ (x\,,y) \mid x = \frac{ar_0^2}{2a\alpha + 2b\beta - r_0^2}\,,\ y = \frac{br_0^2}{2a\alpha + 2b\beta - r_0^2} \text{ 且 } \alpha^2+\beta^2=r_0^2 \right\}$$

圖五 中斜線區域即爲 P 點之成像區圖。



圖五　斜線區域爲 P 點之成像區

由作圖知（圖五），此圖形區域有一最左端點 $M_0(x_I\,,y_I)$，這個最左端點即爲點 $P(a\,,b)$ 在對於圓 C_0 上之 Q 點（$\overrightarrow{OP}$ 與圓 C_0 交點）所成之像點，在 Q 點附近的極小區鏡面（即光軸 $\overrightarrow{OP}$ 附近）所成之像，均可視爲落在此最左端點上。因之，此點 $M_0(x_I\,,y_I)$ 才是點 $P(a\,,b)$ 在最近鏡線處之成像點。

現在要找出點$M_0(x_I, y_I)$之坐標值：

點Q之坐標為 $Q\left(\dfrac{r_0 a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{r_0 b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，只要令點$A(\alpha,\beta)$趨近於點$Q$，即可求得$M_0(x_I, y_I)$之坐標值。因此，

令 $\alpha \longrightarrow \dfrac{r_0 a}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\beta \longrightarrow \dfrac{r_0 b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

得
$$x_I = \lim_{\substack{\alpha \to \frac{r_0 a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \beta \to \frac{r_0 b}{\sqrt{a^2+b^2}}}} x = \frac{a r_0^2}{2a\dfrac{r_0 a}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2b\dfrac{r_0 b}{\sqrt{a^2+b^2}} - r_0^2} = \frac{a r_0^2}{2r_0(\sqrt{a^2+b^2}) - r_0^2}$$
$$= \frac{a r_0}{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0}$$

同理 $y_I = \dfrac{b r_0}{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0}$

⊙驗證高斯成像公式

成像點$M_0(x_I, y_I) = M_0\left(\dfrac{a r_0}{2\sqrt{a^2-b^2} - r_0}, \dfrac{b r_0}{2\sqrt{a^2-b^2} - r_0}\right)$ 找到了，利用拋物鏡成像公式──高斯式，來檢驗此成像點（由圖五）

取
$$U = r_0 - \sqrt{a^2+b^2}$$
$$V = \sqrt{\left(\frac{a r_0}{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0}\right)^2 + \left(\frac{b r_0}{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0}\right)^2} - r_0$$
$$= \frac{r_0 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0} - r_0$$

由於$M_0(x_I, y_I)$係虛像，V需取負值，故

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{-V} = \frac{1}{r_0 - \sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\dfrac{r_0 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0} - r_0}$$

$$= \frac{1}{r_0 - \sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2\sqrt{a^2+b^2} - r_0}{r_0(r_0 - \sqrt{a^2+b^2})}$$

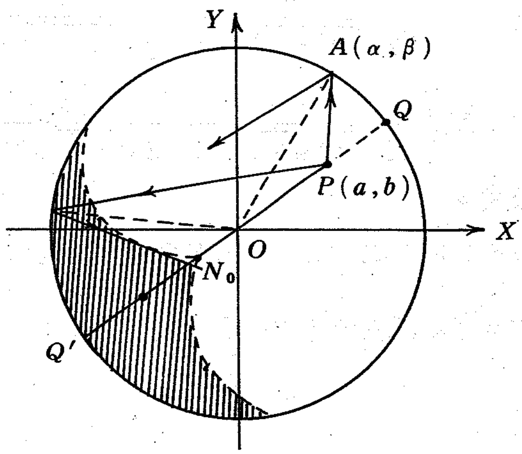
$$=\frac{2r_0-2\sqrt{a^2+b^2}}{r_0(r_0-\sqrt{a^2+b^2})}=\frac{2}{r_0}=\frac{1}{r_0/2}=\frac{1}{f}$$ 驗證成立。

$$\therefore \qquad \frac{1}{U}+\frac{1}{(-V)}=\frac{1}{f}$$ 滿足高斯成像公式

如此我們可正確地認定點$M_0(x_I,y_I)$爲點$P(a,b)$在圓C_0上Q點之成像點。這個點$M_0(x_I,y_I)$是個固定點，其位置只和圓C_0的半徑及點$P(a,b)$位置之選取有關。

㈢ 實像點

假如將點$A(\alpha,\beta)$移到圖六中的Q'點，則點$P(a,b)$將在圓內部成一個實像點N_0。由作圖知，在Q'點附近之點所對應形成的實像點集合圖形爲圖六中的斜線區域



圖六

，而N_0點恰在這區域最右尖端處，因此它亦是個定點。解之；

令 $$A(\alpha,\beta)\to Q'\left(-\frac{r_0a}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{r_0b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

省略計算過程

得 $$N_0(x_0,y_0)=N_0\left(-\frac{ar_0}{2\sqrt{a^2+b^2}+r_0},-\frac{br_0}{2\sqrt{a^2+b^2}+r_0}\right)$$

因點$N_0(x_0,y_0)$和點$P(a,b)$俱在Q'點之同一側，按物理成像原理，此像爲實像點。當然，此實像點亦滿足高斯成像公式，此處不再檢驗。

設若選取$P(a,b)$點在圓心$O(0,0)$處，則可見實像點亦落在點$O(0,0)$處，即物

與實像俱在同一位置上。此亦可利用高斯成像公式證明之；因$U = r_0 = 2f$

則$\dfrac{1}{2f}+\dfrac{1}{V}=\dfrac{1}{f}$可得$V = 2f = r_0$（正值表示像為實像，成像在鏡前）

(四) 由以上之討論，可歸納出下列結果：

1. 點$P(a,b)$對圓$C_0: x^2+y^2=r_0^2$之鏡射點為$P'\left(\dfrac{ar_0^2}{a^2+b^2}, \dfrac{br_0^2}{a^2+b^2}\right)$，此點不滿足光學成像公式——高斯定律。（見圖一）

2. 點$P(a,b)$對圓$C_0: x^2+y^2=r_0^2$之

(i) 成虛像點為 $M_0\left(\dfrac{ar_0}{2\sqrt{a^2+b^2}-r_0}, \dfrac{br_0}{2\sqrt{a^2+b^2}-r_0}\right)$ （見圖五）

(ii) 成實像點為 $N_0\left(-\dfrac{ar_0}{2\sqrt{a^2+b^2}+r_0}, -\dfrac{br_0}{2\sqrt{a^2+b^2}+r_0}\right)$ （見圖六）

兩者均滿足高斯成像公式。

3. 圓之鏡射點決不是成像點。反之，成像點亦不是鏡射點。

4. 由成像理論證實了高斯成像等式 $\dfrac{1}{U}+\dfrac{1}{V}=\dfrac{1}{f}$

参、結　論

由上述論證，指出圓之鏡射點與成像點兩者毫不相干；理由乃兩者之定義和形成過程完全不同。前者是純理論係根據線性映射而得；至於後者却是根值於光學反射定律的結果。因此，兩者不能混為一談。

作者查閱有關物理學光學部份的參考書籍，發覺大部份初級的光學課本中，尋求成像公式——高斯定律的過程，都是藉助於平面幾何相似形之作圖近似法而得。而本文却是完全以平面解析幾何理論，應用反射定律之成像本質驗證高斯公式，實為一新的嚐試。當然直觀方法之應用，在本文中亦佔著重要地位。

成像點的推導過程，雖較為繁複，但全文在直覺思考、運作之程序中，細心，耐心地推演，終能完成。無論是成實像或虛像，都可發現點對圓的成像決不是單獨的一個定點，而是一片成像區。顯然這片成像區將會使成像的效果減低，而造成像的分散現象（模

糊）。為了彌補這點，應儘量減小光軸附近的鏡身，採取鏡片本身的大小口徑遠小於鏡片的曲率半徑的方法，來消除這種成像的分散現象。

本文為作者課後研究心得，目的乃在於指陳鏡射點與成像點之相異。行文中恐有錯失，管見疏漏之處，還望高明不吝指正！

肆、參考資料

1. 數理本高中數學第四册，數理出版社。
2. 高中數學的教與學，葉東進著，九章出版社。
3. 高級中學物理學（下册），吳友仁編著，東華書局。
4. 光學與光學儀器，潘家寅譯，徐氏基金會出版。
5. K.Plimpton:Calculation in Geometry, Hardy & Sons Ltd., London.
6. Physics-Alonso-Finn. Aberration.
7. Francis A.Jenkins. Harvey E.White:Fundamentals of Optics.
8. Grant R.Fowles:Introduction to Modern Optics. Holt, Rinehart and Winston, Inc.