電腦方式的中學數學解題（註1）

Dwayne E. Channell
Christian R. Hirsch 著

陳俊生
國立臺灣教育學院數學系
合譯
黃敏晃
國立臺灣大學數學系

中學數學教師所面臨最具挑戰性的問題中，有兩項與數學解題（problem solving）直接相關，即如何引起學生解題的動機，與發展學生解題的能力。接近二十年前，莫利斯・克萊恩（Morris Kline, 1966，見參考文獻4）曾建議：「從學生日常生活所看到的現象，及他們所經歷的事物中，選擇眞正的問題（real problems）來做爲數學的教材，我們也許能提高學生學習數學的慾望。」

截至目前爲止，克萊恩的建議在中學數學課程及敎學中，所產生的影響仍然極其微小。這並不足爲怪，因爲要解決現實世界中問題的傳統方法，典型上都必須涉及繁難的計算，或是線性代數、微積分機率，和其他高深的數學知識。但時至今日，這一切都開始改變了。由於在中學數學課程中使用到電腦，不僅能對實際生活中的問題提供刺激的效果，而且能在中學數學的主流中，發展出解決這類問題的有效方法。

在本文中我們將描述，如何利用電腦來幫助學生，並使之成爲解決現實世界中數學問題的一種工具，而同時又能加強學生對於數學解題過程（processes）的了解。本文

（註1） 本文取材自美國數學教育協會（MCTM）所出版的1984年Year book（年鑑），Computers in Mathematics Education 一書的 Part 3, Teaching Mathematics Through Programing——譯者。

將提出三種不同的問題情境，每一情境都按玻利雅所提倡的數學解題模式(problem solving model à la Polya,[註2])中的四個步驟來處理，亦即問題的敍述、分析、電腦程式，與回顧或前瞻(looking back/ looking ahead)。

本文劃分成兩部分：一部分是利用演算法(algorithmic methods)，另一部分是利用模擬法(simulation methods)來做解決問題的工作。第一部分包含了兩個問題，都可以由直接的計算求得答案。在求解的過程中，都要涉及到電腦演算法則(computer algorithm)的設計，以便執行繁冗的計算——這些計算若用筆算或甚至使用計算器(calculators) 都會感到非常麻煩的。在第一個例子的求解方法中，學生必須先建構一個適合於此特定情況的演算法則；而在第二個例子的求解方法中，學生只須單純地修改圓柱體體積的公式即可。但計算的結果並不直接提供問題的答案，而只得到一份表格資料，以便學生分析或以此爲基礎而作繼續的工作。

第二部分裏討論的問題所代表的情境，是沒辦法用現成的演算法則求解的，或者即使有現成的演算法則，但此演算法則太過複雜，因此只有程度最好的極少數高中學生才能理解。我們不但不忽視這類的問題，在本文中我們還要引導學生去模擬實際的具體情況，也就是說，他們可以想辦法建立一個數學模式(mathematical model)，用來代表或模擬實際的現象。數學模式一旦建立，就可發展出一個電腦程式，來研究此模式在不同時間及(或)不同條件下之狀況。另外，牽涉到隨機性(randomness)的問題，則可以利用特殊的模擬技術，如所謂的蒙地卡羅法(Monte Carlo methods)來解答。像這一類的模擬技術都是把隨機數(random numbers，或譯爲亂數)當做數學模式中的要素。

利用演算法的數學解題

問題1：數學中的神秘魔術(註3)

很久以前，一羣學生有幸出席了一個名叫梅斯的數學魔術師的表演會，他要這些學

(註2) George Polga 是最早提倡數學解題爲主要的數學教學活動的數學家。他在 1957 年所出版的小冊子How to Solve It (如何解題，長橋有張憶壽的譯本)，已是數學解題的經典著作—— 譯者。

(註3) 下列的數學問題叫做烏朗的猜測(Ulam′s Conjecture)，其實是個至今未解決的數學問題。請參閱六藝出版的數學和數學家的故事，第3冊中的幾篇文章，郭老師的第一堂數學課，從日本的猜數遊戲讀到奇妙的數字「黑洞」，及大家來搜索數字世界中的黑洞——譯者。

生參與若干有趣的數學魔術遊戲，這裏提出最後的一項遊戲與讀者共享。在此遊戲中，他要求觀衆挑選一個自然數，然後按下列的指示行事：

1. 寫下此數。
2. 若你選的數爲1，就停筆。
3. 若你選的是偶數，把它除以2，回到第1步，然後按照由第1步開始往下的順序，照各步的指令行事。
4. 若你選的是奇數，把它乘3再加1。把得到的結果當作新的數，由第1步開始往下的順序，照各步的指令行事。

當每個人都停筆之後，他宣稱，不論你選的是什麼自然數，照上述的指令行事時，則最後都停在1。當場的每位觀衆都無法找到一個反例（ counterexample ，即按上述規則演算，而最後不會停在1的自然數）。聰明的讀者，你先試試看能否找到一個反例。

分析

如果有必要，我們應該提醒學生何謂自然數，並叫他們各自選幾個自然數按上述的規則玩此遊戲。當學生玩此遊戲時，若能把他得到數列中各數按序寫下來，則更有助益。譬如說，若他選的數爲6，則他會得到如下的數列。

6,3,10,5,16,8,4,2,1（停止）。

學生一旦了解了遊戲的規則，以及其中指令的重覆性質，我們就可以引導他們把這些演算規則翻譯成培基的程式（ BASIC programs ）來表達。

電腦程式

下面的培基程式，是直接由上述的遊戲規則中的指令設計而成的。因此，它能將程式設計中的條件分支（ conditional branches ，見下面程式中的70與80行）與無條件分支（ unconditional branches ，見下面程式中的100與120行）的概念與技巧作一個很好的介紹。此程式能讓學生用許多數目（包含很大的數目）去測試魔術師的宣告是否正確。

```
10   附註（REM ）      測試程式
20   附註              魔術師的宣稱
30   附註
40   印出“輸入一個自然數”
50   從鍵盤輸入N
60   印出N，“   ”
70   若N＝1，則跳到130行
80   若N/2＝INT(N/2)，則跳到110行（註4）
90   令N＝3＊N＋1（註4）
100  回到60
110  令N＝N/2
120  回到60行
130  停止
```

按“RUN ”鍵開動

輸入一個自然數？10

10,5,16,8,4,2,1

輸入一個自然數？13

13,40,20,10,5,16,8,4,2,1

輸入一個自然數？50

50,25,76,38,19,58,29,88,44,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1

回顧與前瞻

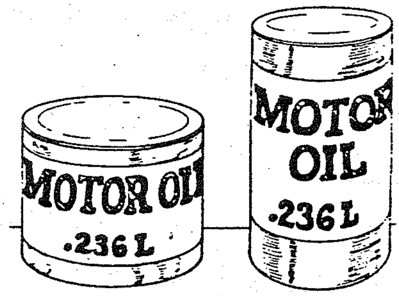
我們在上面用電腦測試的結果，支持了魔術師的宣稱，但並沒有證明它的正確性。事實上，按照上述遊戲規則中的指令，最後是否一定得到1，雖然經過許多大數學家的努力，這仍然是數學上尚未解決的一個問題。法拉和藍果（Farrar and Reingold，1974，見參考文獻5）曾用電腦測試所有小於或等於10^{40}的自然數，發現對這些自

（註4） INT（N/2）是N/2的整數部分，而符號＊是乘號——譯者。

然數而言，魔術師的宣稱都是正確的。但到目前爲止，沒有人能證明它，或找出一個反例。也許你的學生中會有一位天才，能解決此一數學題目，而在歷史上留下不朽的記錄。下面，是可以讓你的學生做的一些相關問題。

1. 試加解釋如何使用電腦來證明，對小於或等於100的自然數，魔術師的宣稱是正確的。修改上述的程式，以便得到這樣的證明。
2. 定義一數列的長度（ length of a seguence)爲此數列中的的項數。譬如說，上述以 10 開始的數列的長度爲7，以 13 開始的數列的長度爲10。你能找到兩個連續的自然數，使按上述遊戲規則的指令所產生的數列（各以此兩數爲首項）的長度是相等的嗎？你能找到三個連續的自然數，使以此三數爲首項，而按上述遊戲規則指令所產生的數列等長嗎？
3. 在魔術師的遊戲規則所產生的許多數列中，那一個2的乘冪最常出現？
4. 如果要利用電腦來證明魔術師的宣稱是錯誤的，要如何進行？請試加解釋。
5. 如果魔術師的宣稱是錯誤的，則我們的程式會讓電腦永無休止的執行下去，而產生一個無窮數列。你怎樣由電腦印出來的資料中的何種信號看出此種趨勢？修改上述的電腦程式，使電腦偵察到此信號時，便自動停止。
6. 爲了變化起見，魔術師想把遊戲規則的第四步修改如下：
   若你選的是奇數，把它乘3再加1。然後把此結果當作新的數，回到第1步，再按由第1步開始的順序，照各步的指令行事。修改上述的電腦程式，使你能檢查測試，看看魔術師的宣稱是否仍然正確無誤。
7. 如果把遊戲規則第四步中的演算改成“乘5再加1”或“乘5再減1”，研究看看，情形會起如何的變化？

問題2：最佳比值與罐頭容器的設計（註5）



一家製造罐頭容器的公司與人簽約，爲割草機專用機油設計並生產一種圓柱形的罐頭，每罐容量爲0.236　公升。爲減少生產的成本，公司希望儘可能設計出一種用到最少金屬外殼的容器，問此圓

（註5）　這個問題本來是微積分裏求極值的典型問題。這裏假定學生不懂微積分，而利用電腦程式作數值化的近似處理。如果問題中的數值給的不好時，這種方法只能求得很接近於正確解的滿意解（合乎實用要求的程度），而無法求得正確的解——譯者。

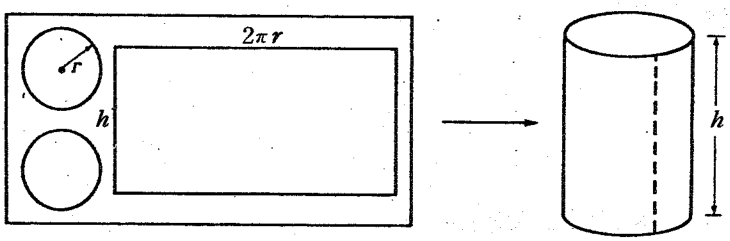
柱形罐頭的尺寸應爲多少？

分析

爲了確定學生都能了解此問題起見，我們先拿一張硬紙板來表達製罐頭的過程（如下圖所示），並複習正圓柱體的體積公式$V=\pi r^2 h$，其中V爲體積，r爲底圓之半徑而h爲圓柱之高，如果需要，我們也可叫學生自行導出圓柱體的表面積公式

$$S=2\pi rh+2\pi r^2$$
$$=2\pi r(h+r)$$

這些公式可用來計算，我們用硬紙板所做出來的罐頭的體積。



學生有了這些背景知識之後，我們就可以引導他們來解決原來的問題。首先，我們提醒學生，他們可以忽視金屬的厚度，以及金屬片打洞做成罐頭後的浪費部分（見上圖的左邊）。罐頭的容積是0.236 公升，爲了使罐頭的尺寸（底圓的半徑及高）能以公分表示，他們應該把公升單位改成c.c.。因1公升＝1000c.c.（即公分^3），故罐頭的容量是236c.c.。把此數據代入圓柱體的體積公式，他們就可得到高與底圓半徑的關係式如下：

$$236=\pi r^2 h$$

爲使計算方便，他們可以3.14159 代替圓周率π，而得

$$h=\frac{236}{(3.14159)r^2}$$

由此關係式，只要他們決定了圓柱體的底圓半徑r之後，圓柱的高h就可求出。爲了實用的目的，我們可假定$h \geqslant 1$（公分），因此，經過計算之後知道$r \leqslant 9$（公分）。

電腦程式

上述的想法很容易用培基程式來表達，先設定圓柱底半徑r之値，然後讓r慢慢增

加。在每一步(即每一個 r 的值)的計算中，要求電腦印出相關的高與表面積。在下面的電腦作業中，我們取底圓半徑 r 的始值0.5(公分)，遞增的幅度也爲0.5(公分)。

```
 10  附註  使表面積取極小值
 20  附註  有蓋的罐頭
 30  附註
 40  印出“輸入底圓半徑的始值RI ”
 50  從鍵盤輸入RI
 60  印出
 70  印出“半徑”，“高”，“表面積”
 80  迴路令I自1到40
 90  印出“－”
100  次一個I
110  印出
120  附註  下面的迴路是調整半徑R
130  附註  並計算出表面積
140  附註
150  迴路令R自RI ，到9，每次增加RI
160  令H＝236/(3.14159*R↑2)(註6)
170  令A＝2*3.14159*R*(H+R)
180  印出R、H、A
190  次一個R
200  停止
```

按“RUN ”鍵開動

(註6) R↑2是 R^2 的電腦符號——譯者。

輸入底圓半徑的始值？0.5

半 徑	高	表面積
0.5	300.485	945.571
1	75.1212	478.283
1.5	33.3872	328.904
2	18.7803	261.133
2.5	12.0194	228.07
3	8.3468	213.882
3.5	6.13234	211.826
4	4.69507	218.531
4.5	3.70969	232.123
5	3.00485	251.48
5.5	2.48335	275.884
6	2.0867	304.861
6.5	1.77802	338.08
7	1.53309	375.304
7.5	1.33549	416.362
8	1.17377	461.124
8.5	1.03974	509.489
9	0.927422	561.382

回顧與前瞻

由上述的輸出結果來分析，可知使表面積取極小值時的底圓半徑應在3公分與4公分之間，如果我們求得此最佳的值，使誤差在0.1公分之內（從實用的觀點而言，這種精確度的要求是足夠了），學生可以把上述的電腦程式作如下的修改。

1. 刪除第40及50行
2. 把第150行改成：

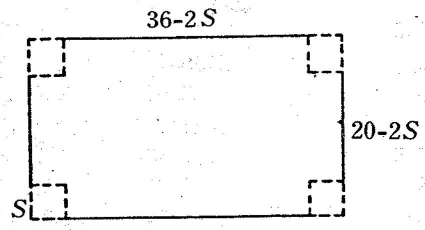
   150迴路令R自3到4，每次增加0.1。

由修正後程式的電腦作業的結果可知，機油罐最佳的尺寸才是$r = 3.3$公分，$h = 6.9$公分。學生可以拿實際市售的機油罐的尺寸，來與此「理想罐頭」的尺寸作比較。學生會驚奇地發現，它們是多麼的接近。數學教師總是可以在此關頭指出，進一層的數學知識（如算數平均一定大於或等於幾何平均的不等式，或是微積分），可以讓我們直接算出，最理想的罐頭的尺寸，應該滿足$h = 2r$的條件。

根據學生的程度，你可以在下列的相關活動中，選擇其中的一項或多項讓他們作業：

1. 修改原電腦程式，以便求出汽車用罐裝機油（$V = 0.946$公升）的最佳（使用最少的金屬）尺寸。

2. 修改原電腦程式，使程式的使用者能隨意的輸入罐頭的容積，而求得表面積最小的罐頭尺寸。
3. 寫一電腦程式，以便算出在表面積爲354平方公分的條件下，能求出容積最大的圓柱形罐頭。
4. 設容器製造公司有一批36公分×20公分的錫片，他們想利用這些錫片製造無蓋的長方體儲存箱。儲存箱的製造過程是先自錫片的四角切去四個全等的小正方形（如下圖所示），然後把四邊摺起再加焊接而成，若想做成體積最大的儲存箱，問箱子的尺寸應爲多少？



5. 如果把上題中錫片的大小改成24公分×30公分（注意到兩種錫片的面積一樣）。修正上題的電腦程式，以便求出本題中箱子的尺寸（使容積最大），並比較兩者的輸出結果一覽表。

類似於此處所討論的極大與極小的問題，可以在典型的微積分教本上找到許多，從上述例子呈現方式，與學生在這樣的教學活動中的表現可知，由於電腦的進入中學數學教室的緣故，這類的教材可以提前在中學出現。因爲這類教材的實際應用性很高，學生的學習數學的動機也可以得到大幅度的提升。

利用模擬法的數學解題

問題3：資源的處理

在西元1830年時，美國西部約有4千萬頭野牛（buffalo）。到了1887年時，由於美國當時缺乏資源保護的政策，使野牛數目只剩下200頭。目前，美國的野牛約有26000頭，其分佈情形如下：

成年公牛	10400	小公牛	3380
成年母牛	9100	小母牛	3120

假定美國的內政部考慮保護這些動物以免絕種之危機，而實施控制捕獵的計畫，他們就得先定出每年能捕獵多少野牛的數目，並做成政策來執行。他們首先決定小野牛與成年母牛都不准獵殺，並考慮每年只准獵殺1000 頭成年公牛。問此政策在未年 10 年內，對野牛數目的影響如何？

分析

爲了解此一問題，我們必須先發展出野牛羣數目成長的數學模式。下面是一些可資利用的最近研究結果：

1. 小牛到2足歲時就是成年的牛了。
2. 每年年初時的每100頭成年母牛，在這年當中會生 90 頭小牛，其中 48 頭小公牛， 42 頭小母牛。
3. 出生的小牛當中，只有50％ 會存活到1足歲，而存活到1足歲的小牛當中又只有60％ 會存活到2足歲（即成年）。成年野牛的自然存活率是90％。

我們可利用初級的代數來建構一個數學模式如下：令M與F依次表示目前成年公牛和母牛的數目，M與F的始値爲M＝10400 ，F＝9100。由於沒有進一步的資料顯示小牛年齡的分佈，所以我們假定2/3的小牛都是初生的（未滿1足歲，[註7]）。以M1 與 F1 依次表示未滿1足歲小公牛與小母牛的數目，則M1＝2/3×3380，F1＝2/3×3120。剩下的小牛就是滿1足歲但未滿2足歲的，我們將以M2與F1依次表示其中小公牛與小母牛的數目。從現在算起一年後的那年期間當中，野牛的分佈情形可以描述如下：

(1) 新生的小公牛(M1)…………………………… 0.48F
(2) 新生的小母牛(F1)…………………………… 0.42F
(3) 滿1足歲的小公牛(M2)………………………… 0.5M1
(4) 滿1足歲的小母牛(F2)………………………… 0.5F1
(5) 成年公牛(M)……………………………………… 0.9M＋0.6M2－1000
(6) 成年母牛(F)……………………………………… 0.9F＋0.6F2

所以，在那年期間當中，野牛的數目是把上面各項加起來，即

(註7) 此處的2/3的假設是以如下的方式得到的：假定每年初生的小牛（未滿一足歲）數目一樣是A，則這些小牛長一歲時，數目只剩下A/2 。故小牛的總數目是3/2A，其中未滿一足歲的小牛佔了2/3——譯者。

$$M+F+M1+F1+M2+F2$$

電腦程式

現在我們已有數學模式來描述野牛的數目，我們就可以設計一個培基程式，來模擬野牛數目在一段時間內的變化情形——在下列我們所作的模擬是以次十年爲期的，剛開始寫程式時，可能會有人以爲只要將上面所提的各變數直接改成培基語言來表達即可。但是，電腦執行指令時是按照順序一個接著一個，而不是同時執行的。所以，只要得到了新的M1，舊的M1 馬上消失。但在上述的第(3)步中計算新的M2 時，還是需要用到舊的M1。同理，第(3)與第(4)步也不能優先執行，因爲一旦執行後，舊的M2 與F2 就消失，而在第(5)與(6)步計算新的M與F時，又要用到這些舊的M2 與F2。爲了消除上述的問題，我們分別以新的參數 T1,T2,T3,T4,T5，與T6來取代M,F,M1,F1,M2,F2 的某一年的值。

下面就是模擬的程式，以及在這個模擬下次十年的野牛數目分佈表，最上一行是目前的情形，次一行是第二年的，以次到十年後的情形。

```
 10  附註  模擬程式
 20  附註  野牛數目分佈
 30  附註
 40  印出“輸入成年公牛數目M”
 50  從鍵盤輸入M
 60  印出
 70  印出“輸入成年母牛數目F”
 80  從鍵盤輸入F
 90  印出
100  印出“輸入小公牛數目C1”
110  從鍵盤輸入C1
120  印出
130  印出“輸入小母牛數目C2”
140  從鍵盤輸入C2
150  附註  模式假定三分之二的小牛不足1歲
```

```
160  附註　其他滿1歲而未滿2歲
170  附註
180  令M1＝(2/3)＊C1
190  令M2＝C1－M1
200  令F1＝(2/3)＊C2
210  令F2＝C2－F1
220  印出
230  印出“野牛數目分佈一覽表”
240  印出“牛群”、“成年”、“成年”、“小”、“小”
250  印出“總數”、“公牛”、“母牛”、“公牛”、“母牛”
260  迴路令I自1到65
270  印出“－”
280  次一個I
290  印出
300  迴路令Y＝1到11
310  令S＝M＋F＋M1＋F1＋M2＋F2
320  印出S，M，F，M1＋M2，F1＋F2
330  令T1＝M
340  令T2＝F
350  令T3＝M1
360  令T4＝F1
370  令T5＝M2
380  令T6＝F2
390  令M＝0.9＊T1＋0.6＊T5－1000
400  令F＝0.9＊T2＋0.6＊T6
410  令M1＝0.48＊T2
420  令F1＝0.42＊T2
430  令M2＝0.5＊T3
440  令F2＝0.5＊T4
450  次一個Y
```

460 停止

按RUM 鍵開動

輸入成年公牛數目？10400
輸入成年母牛數目？ 9100
輸入小公牛數目？ 3380
輸入小母牛數目？ 3120

野牛數目分佈一覽表

牛羣總數	成年公牛	成年母牛	小 公 牛	小 母 牛
26000	10400	9100	3380	3120
28206.7	9036	8814	5494.67	4862
28392.6	7808.4	8556.6	6414.72	5612.88
27852.7	7337.96	8847.54	6222.53	5444.71
27760	6873.38	9073.35	6300.4	5512.85
27809.7	6418.19	9244.15	6478.62	5668.79
27887.7	6050.42	9434.52	6614.79	5787.95
28037.2	5751.94	9634.31	6747.17	5903.77
28260	5507.9	9835.64	6888.76	6027.66
28544	5315.68	10040.8	7033.34	6154.18
28884.9	5171.46	10250.7	7180.15	6282.63

回顧與前瞻

由我們模擬的結果，可以看出內政部所計畫的限制捕獵的保護政策，對未來十年野牛數目的影響。在此政策之下，野牛的數目顯然還會不斷的成長。模擬法解題的顯著優點，在於我們不冒然地把一個未成形的計畫公布執行，而能以桌上作業的方式來檢討此計畫的得失。此一模擬的結果，可用來作合乎邏輯的資源管理之決策。

下面，我們列了一些相關的活動與問題，可讓學生從事進一步的研究與探討：

1. 我們能避免使用參數T1到T6，而以(5)、(6)、(3)、(4)、(1)、(2)的順序來設計電腦的指令嗎？請解釋你的答案。
2. 在前面問題1的程式中，我們使用符號INT(X)來表示X的整數部分，請你利用INT 這個函數，修改上面的電腦程式，使上表中出現野牛數目爲整數。
3. 修改上面的電腦程式，以便使用者能從鍵盤輸入每年捕獵成年公牛的數目，從而研究不同的捕獵數目對野牛數目在未來十年內的影響。

4. 修改上題中的電腦程式，假定政策也准許獵殺成年母牛，並探討此一政策下對未來幾年內野牛數目的影響。
5. 試發展出一個政策，使每年獵殺成年公牛與成年母牛的數目一定，而且在未來五年內野牛數目保持與目前的數目相等。
6. (a) 參看強生（ Johnson, 1979, 參考文獻 3 ）有關鹿的生殖率與存活率的文章。利用其中的資料，建構出一個數學模式，並寫出一個電腦的模擬程式來表達鹿的數目。進一步探討不同的獵殺政策對鹿的數目的影響。
   (b) 閱讀 1976 年二月出版的 National Geographic 雜誌中的文章“海豹的生或死”（ Life or Death for the Harp Seal ），並由此文的資料判定，在目前的獵殺程度下，這種珍貴的海生資源能否逃過滅種的災難？請寫信向加拿大的漁業部（ Canadian Minister of Fisheries ）要適當的資料，使你能建構一個數學模式，並寫出一個電腦的模擬程式，來探討各種獵殺政策，使海豹能夠不滅種。

像這類適合於利用電腦來作模擬的問題與活動，還可以找到許多，有興趣的讀者可以參閱參考文獻 2 所列的“人造的世界”一書。

蒙地卡羅法（註 8 ）

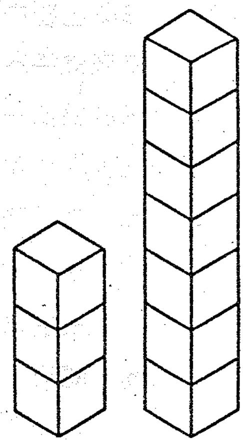
許多牽涉到隨機性的有趣問題，都可以用蒙地卡羅法來加以解決。你也許會以下列的一些問題來向你的學生挑戰。但記得提醒學生，在他們試寫電腦的模擬程式之前，一定要先發展出一個數學模式來描述問題的狀況，並且此模式也一定要涉及隨機數（或亂數）的產生，如果可能的話，由此數學模式所特別指定的程序，應該先利用骰子、銅板或亂數表來試行一次。最後，再將此程序改換成培基程式來執行若干次的試驗，並將結果摘要記錄在適當的表格中。

1. 根據經驗顯示，某一工廠所製造的燈泡中，5 ％爲瑕疵品。假定你買了 6 個燈泡，問其中有 2 個以上（包含 2 個）瑕疵品的機率爲多少。
2. 假定你以瞎猜的方式，試行回答十道是非題，問你猜對七題以上（包含七題）的

（註 8 ） Monte Carlo法是由波蘭數學家Ulam 所創。名稱之由來是因隨機數（或亂數）開始都是由像賭博中的輪盤所產生的，而Monte Carlo是歐洲最大的賭城，輪盤最多，故名之。有興趣的讀者請參閱 74 年 4 月出版的科學月刊中曹亮吉的文章：混水換魚—— 譯者。

機率是多少？

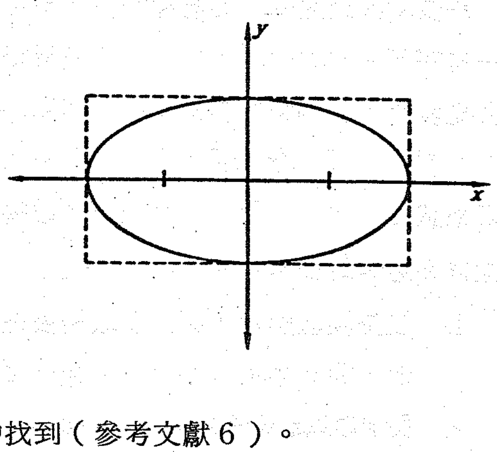
3. 有一則遊戲的道具是由兩個塔組成的，其中一塔由 3 個小正方體疊成，另一個由 7 個小正方塊疊成。隨機選擇一個塔，譬如說丟銅板，正面出現時爲 A 塔，反面出現時爲 B 塔。選到 A 塔時，把一個小正方塊由 A 塔頂移到 B 塔頂；反過來說，選到 B 塔時，也一樣由 B 塔頂移一小正方塊到 A 塔頂。重覆做這步驟，一直到某一塔的小正方塊都移光到另一塔爲止。平均而言，要移動多少次小正方塊才能將其中一塔的小正方塊都移到另一塔上？



4. 有一種一次投擲兩個骰子而觀察其點數和的遊戲叫做 craps 。如果玩此遊戲的人，第一次就擲出點數和爲 7 或 11 ，則此人就算贏了。但他若第一次擲出的點數和爲 2 點、 3 點或 12 點，則他就算輸了。若擲出其他的點數和，則此點數和即爲此人的點數，而他可以繼續玩下去。如果擲出 7 點他就輸了，如果他再度擲得原先的點數，他就贏了，問贏得一場 craps 的機率是多少？

5. 橢圓 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的圖形可以包含在寬 2 長 4 的矩形區域之內，如下圖所示。

如果在此矩形區域內隨意產生若干個有序數對（即此矩形區域內的若干點），則有些數對代表的點在橢圓內，有些則在橢圓之外。如果有序數對很多時，落入橢圓內的點的數目與總數目之比，應該很接近此矩形面積與此橢圓面積之比。利用這種技巧，試求此橢圓面積的近似值。



其他適合於使用蒙地卡羅法來解決的問題，可以在美國數學教育協會（NCTM）出版的1981年年鑑，統計與機率的教學一書中找到（參考文獻6）。

結　語

本文所討論的問題情境，可在中學數學課程中採用，適合於具有不同程度的電腦程

式設計能力的學生使用。程式可以由學生自己寫（程度高的），或者敎師可在問題分析之後，直接提供本文所列的程式給學生使用（程度較差的）。不管採用那種方式的敎學活動，學生都將能體驗到電腦在數學解題中所扮演的角色，而這種體驗將可增進學生對電腦方法，以及數學解題的過程的理解。

數學解題大概是在敎師引導下最有意義的數學敎學活動。電腦的普及化，尤其是廉價的微電腦，將使所有的中學生能利用電腦作爲解決問題的利器。在此趨勢之下，他們將有機會建造出數學模式來描述實際生活中有關或有趣的問題，按照他們發展出來的數學模式設計電腦程式，解釋電腦做出來的結果，並根據這些結果形成一些假說（conjectures），還可以進一步用電腦來測試這些假說。

參考文獻

1. Channell, Dwayne, Carol Cody, and Christian Hirsch. "Computer Methods for Problem Solving." In *Computers in the Mathematics Classroom*, Monograph No. 17 of the Michigan Council of Teachers of Mathematics, pp.65-107. Lansing, Mich.: The Michigan Council, 1982.
2. Engineering Concepts Curriculum Project. *The Man-Made World*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1971.
3. Johnson, David C. "Wildlife, Unemployment, and Insects: Mathematical Modeling in Elementary Algebra." In *Applications in School Mathematics*, 1979 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Sidney Sharron, pp. 137-48. Reston, Va.: The Council, 1979.
4. Kline, Morris. "A Proposal for the High School Mathematics Curriculum. *Mathematics Teacher* 59 (April 1966):322-30.
5. Nievergelt, Jurg, J. Craig Farrar, and Edward M. Reingold. *Computer Approaches to Mathematical Problems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1974.
6. National Council of Teachers of Mathematics. *Teaching Statistics and Probability*. 1981 Year-book, edited by Albert P.Schulte. Reston, Va.: The Council, 1981.