

電腦——無可限量的應用 (註1)

Sharon Dugdale 著

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

譯

高 豫

臺灣省國民學校教師研習會數學組

在五隻青蛙在池塘裏，三隻跳走了，問跳走的青蛙佔全部的幾分之幾？誰會在乎這樣的問題？大部分的學生當然都不感興趣。

目前的數學教育中一個問題是，學生很難感到所學的數學是必需的，即與他的日常生活不密切相關。數學教科書中所謂的“應用問題”，很少讓學生感到學習的興趣，也無法用到學生的日常生活上去。相反的，書上只充滿了讓學生應用課本中所學的數學能加以解決的虛構問題。

現在，越來越多人認為，數學的應用應該在學校的數學課程中，扮演更活躍的角色。他們所指的應用並不是傳統數學課本中所謂的文字題（或應用問題），而是指更能引起學生興趣的應用問題。電腦在這方面可以提供豐富的應用範例與模擬（Simulations）的情況，讓學生練習，而這些是傳統的數學無法做到的。下面，我們將介紹兩個這樣的實例，並討論其設計及使用的構想。這兩個例子都是由著者及大衛·吉比（David Kibby）在伊利諾大學所創作的。

“用”數學不同於“做”數學

讓學生“用”數學（using mathematics）於完成某項預期的目標，與讓他們“

（註1） 本文取材自美國數學教育協會（簡稱NCTM）所出版的1984年year book（年鑑）Computers in Mathematics Education。這兩個課程軟體都由美國的國科會（National Science Foundation）的經費支持下發展出來的。要使用這些軟體者，可聯絡Sharon Dugdale, 252 Engineering Research Lab., University of Illinois, 103 South Mathews, Urbana, Il. 61801, U.S.A. 譯者。

做”數學 (doing mathematics) 於滿足教學的要求，這兩者之間有極大的差異。這個差異明顯地表現在學生的學習態度上，他們想從這些活動中獲得什麼，以及他們如何組織所學過的數學教材。下述的電腦教學軟體 (course ware) 名為“綠珠” (Green Globes)，是採用遊戲方式編寫的。我們設計讓學生在安排好的情況使用，實驗並組織他們對圖形及方程式的知識。所以，當此教學軟體第一次在課堂上使用時，以學生的反應看來，上述的差異變的非常之醒目。

在“綠珠”的電腦遊戲中，螢幕上出現了坐標系間的有限部分 ($-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$)，以及散置於其上的 13 顆綠珠，如圖 1 所示。遊戲的方式是要學生寫出一些曲線的方程式，並用這些曲線去擊中這些綠珠 (綠珠並不只是一個點，所以曲線並不一定要剛好通過那些點，只要碰到綠珠的一點邊，綠珠就會爆炸)。我們可以規定每個人射擊的次數 (每寫出一個方程式，算射擊一次)，譬如說，每人每次只准射擊三或五次，也可以讓學生無限制地射擊，直到綠珠被打完為止。計分的方式是每條曲線擊中的第一個綠珠算 1 分，第二個綠珠算 2 分，第三個綠珠算 4 分，……，第 n 個綠珠算 2^{n-1} 分。例如，下面的圖 2、3、4 就是某位學生的頭三次射擊的情形。

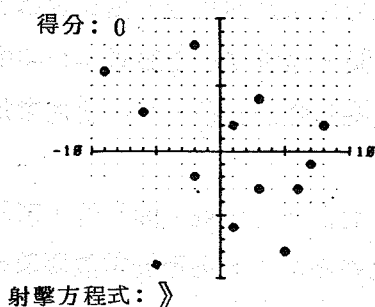


圖 1 坐標平面的一部分及其上散置的綠珠

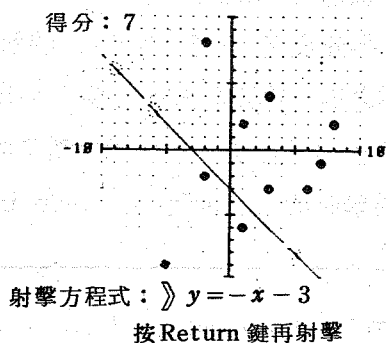


圖 2 第一次用直線
 $y = -x - 3$ 射擊
射中三個綠珠得
 $1 + 2 + 4 = 7$ 分

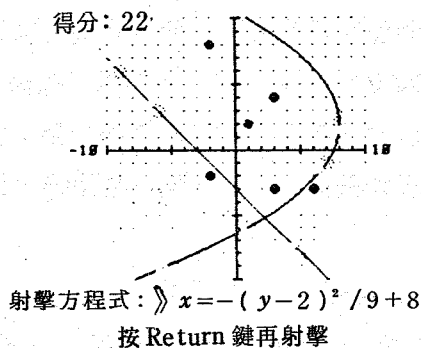


圖 3 第二次用拋物線
 $x = \frac{-(y-2)^2}{9} + 8$ 射擊
 射中四個綠珠，得
 $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 分
 累積得分為 $7 + 15 = 22$ 分

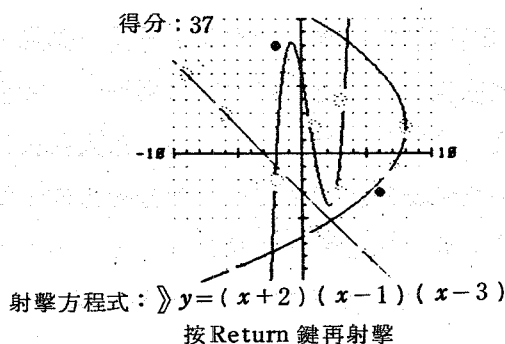


圖 4 第三次用三次曲線
 $y = (x+2)(x-1)(x-3)$ 射擊
 射中四個綠珠得 15 分
 累積得分為 $22 + 15 = 37$ 分

如果學生輸入的曲線方程式，沒有使曲線射中預期的目標，由於螢幕上出現了曲線，所以學生立刻得到回饋。這使學生能自我診斷，他所寫的方程式與預期中的曲線差多多？太偏了？太陡了？或開口的方向不對？這些具體的資料，可以使他增加對曲線的更深的瞭解，並在下一次射擊時改正他的錯誤。

這樣的活動對不同程度與不同能力的學生而言都可以玩。顯然的，若學生只知道線性函數，則他也可以把綠珠完全擊破（次數也許多些），甚至於常數函數也足夠用了。對學過二次函數或拋物線的學生而言，若他們能善加利用，得分就會高得多。一般說來，若學生能使用有關函數與曲線方程式的更多或更深的知識（譬如說，高中學生比國中生在這方面的知識就強許多），則他的得分也就越高（註2）。

為了使參與遊戲的學生感到競爭的氣氛，得分最高（註3，見下頁）的前十名學生被記錄在電腦中，此項資料由電腦螢幕顯示，稱之為“得分名人排行榜”（hall of fame）。由於新的高分不斷出現，排行榜名單也經常更新。許多學生為了要擠入“排行榜”，仍積極的與同學互相討論（為了鼓勵同學間的互相切磋——peer interaction，

（註2）參閱 Sharon Dugdale 的文章“Green Globes: A Microcomputer Application for Graphing of Equations,” Mathematics Teacher 75, 1982年3月——原著者註。

我們也可以安排幾位學生成一組進行遊戲)，主動找數學老師請教，並自動到圖書館翻閱數學書，以便學到更多更高深的函數及曲線方程式的知識，而能在遊戲中創造高分。此遊戲因此變成了促使學生主動學習數學的催化劑。

在這套電腦教學軟體中，我們提供學生好幾種不同的活動。除了上述遊戲型態的綠珠部分外，另外有一部分是非遊戲型態的活動，教導學生寫各種不同種類的曲線方程式，並讓學生練習。在此部分所選的曲線實例，儘可能地朝著能顯露出有關曲線方程式的一般原理的方式來安排。這樣的安排，對那些尚未玩過綠珠遊戲的學生似乎沒有太大的效果。因為他們把每個例子都當作一個練習用的例子來看待，而無法抽取出我們希望他們能領悟的一般原理原則。但是，當這些學生玩過綠珠遊戲之後，這些學生都主動地回到這個非遊戲的部分（以及數學課本）來練習，並且很顯然地能領悟到有關曲線方程式的一般原理原則。

本電腦教學軟體似乎讓學生處身於強烈刺激學習的環境，使他必需努力尋求，應用並與同學共同分享有關曲線方程式的知識，而且當他們發現零星的知識不夠用，他們也能進一步地體會到有必要把這些零星的知識，整理出一些一般的原理與原則出來，並把這些原理原則加以應用。

數學是有趣的

除了讓學生有機會把數學應用到他們認為重要的情況外，數學教材編製者的另一個重要的任務，是要把數學對學生的固有吸引力表達出來。目前，數學教學電腦化的特色之一，是電腦能把數學的習題變成一件有趣的活動。事實上，電腦似乎有一種魔力能使每

（註3）在今年5月由教育部與國科會科教處邀請一些外國專家於師大綜合大樓舉辦的CAI研討會中，Dr. Siegel談到此例時，曾提到有位學生利用振幅很大而頻率很密的三角函數如

$$y = 10 \sin \frac{x}{100}, \text{ 一次擊中十三個綠珠，得到最高分數 } 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{12} = \frac{2^{13} - 1}{2 - 1}$$

$= 2048 - 1 = 2047$ 分的記錄。其實，還有許多其他的方法可以一次擊中十三個綠珠而得此高分，如把這十三點的座標寫出來並利用 Lagrange's formula of interpolation

$$f(x) = \sum_{i=1}^{13} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i)$$

即可。Dr. Siegel 也談到後來為了防止太多人用上述的三角函數得到最高分（大家都學會了，後來的人擠不進排行榜，學生的興趣會減弱），所以在坐標平面上加上一些黑洞，只要曲線進了黑洞就出不來了。上述的三角函數就不能得全分了，需要另外想辦法——譯者。

一件事變得有趣。甚至於數學課裏學生一向厭惡的，一大堆做不完的計算題的熟練 (practice and drill) 活動，由親切可愛的小動物的陪伴，加上動人心弦的背景音樂的裝扮下，都會變成蠻有意思的活動。但是，這些與數學本身無關的包裝，並不使數學本身變的更有趣。有時候，反而會使學生的注意力，由數學的教材轉到其他地方，而造成喧賓奪主的場面。

讓學生置身於一設計好的情況中，使他能操縱，應用數學的活動，與上述那樣把數學的學習活動用與數學無關的事物加以裝扮得有趣，這兩者之間有基本上的差異。前者指出數學本身是有趣的而且有用的，但後者則似乎在暗示我們，數學是如此地不合學生的口味，以致於必須加上各種聲光的外添刺激，才能被學生接受。像前述的綠珠遊戲活動，把學生的注意力集中在他們使用數學的能力上，所以他們學得越多的數學，能應用的越多，就越對數學的學習感到興趣。如此，我們就不必要依靠外添的刺激來增進學生的學習動機。

另一個合乎上述原則的數學教學活動，是“飛鏢”(darts, 註4)遊戲。此遊戲的數學層次較低(約適合國內的國一學生，或小學五、六年級的高材生，譯者)。是讓學生熟悉有理數(整數、小數及分數)在數線上的位置，及其大小關係。如圖5所示，我們把一些氣球掛在數線上，讓學生先預估這些氣球所掛的位置，並用輸入有理數的方式來射擊氣球。有理數的輸入形式，學生可以隨意，或直接的，或帶有數學運算的形式，電腦

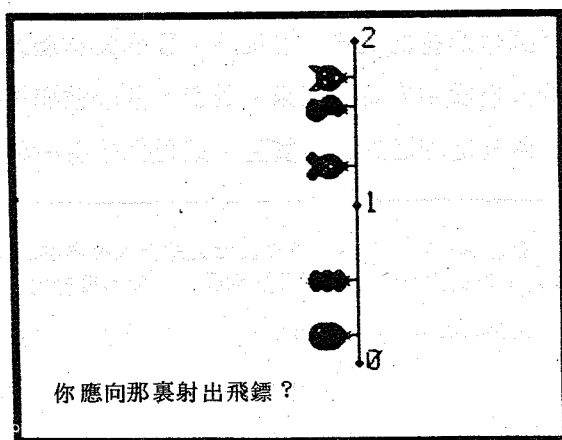


圖 5 飛鏢的原來圖示

(註4) Darts 是西洋很流行的室內遊戲，參與者在一段距離外，向圓形鏢靶(內有大小圓圈及其他分割，標出不同分數)，用手擲飛鏢，每次每人若干鏢，以得分定上下，國內體育用品社有出售道具——譯者。

都能接受，如圖 6 所示（原來的 darts 遊戲，是著者於 1973 用 PLATO 電腦系統創造的。後者作了一些修改，如上述的有理數的輸入形式的放寬就是其中的一點）。

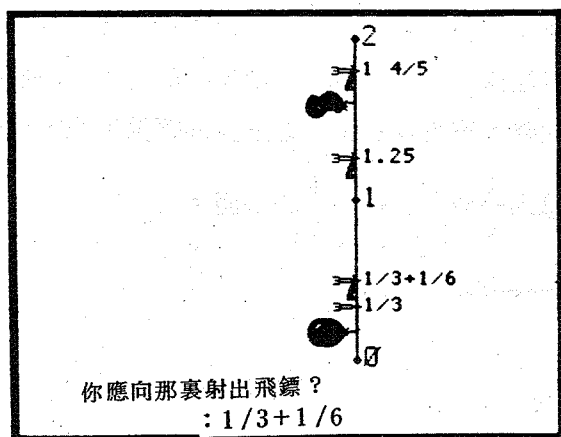


圖 6 經過幾次射擊後的情形

“飛鏢”與其他電腦上的數學遊戲的主要不同，在於“飛鏢”本身是一個數學模型（mathematical model）。當學生輸入有理數來射擊氣球時，他們是在學習及應用有理數的概念，其大小關係及他們在數線上排列的知識。這種遊戲方式對於學生的刺激，與學生做對了一道數學題目時，出現一個小丑跳上跳下歡呼鼓勵的場面大異其趣。

在“飛鏢”的教學軟體中，學生的活動與電腦的反應都圍繞著數學的主題。當學生射出一鏢後，他立刻得到一個視覺回饋（visual feedback），不但清楚射得對不對，連不對時答案與目標差多遠，是太大了，或太小了等都很清楚地顯示在電腦的螢幕上。這些回饋糾正了他不正確的概念，並在他的下一次射擊中可以顯示出他改正後的結果。譬如說，圖 7 所示是某位學生對負數的錯誤概念，他以為 $-1\frac{1}{4}$ 是在 -1 之上（即大於

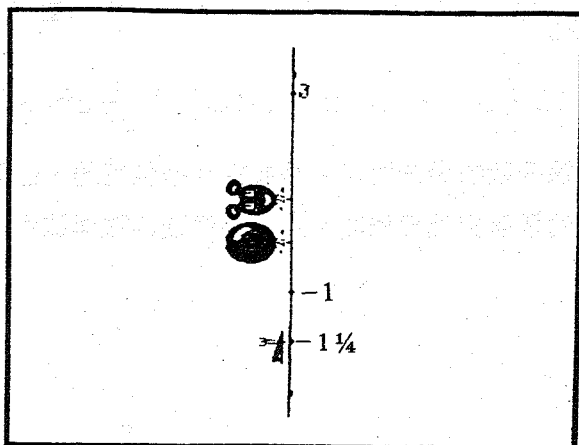


圖 7 學生誤以為 $-1\frac{1}{4}$ 在 -1 之上
（得到立即的視覺回饋）。

—1)，統計結果顯示，許多學生在玩此遊戲前都有類似這樣的錯誤概念，但玩過此遊戲後，這類的錯誤就消失了。

有時學生對分數的等價概念不清楚，他們誤以為外形不相同的分數（即分子與分母都不相同的分數）一定代表不同的有理數。所以，他們有時在射擊時輸入一些等價於他們前面已輸入的分數（或小數）。此時，電腦也會在螢幕上立即顯現出來，使學生理解到他的錯誤。如圖8所示是學生先輸入 $\frac{1}{2}$ 後，再輸入 $\frac{4}{8}$ 的畫面。

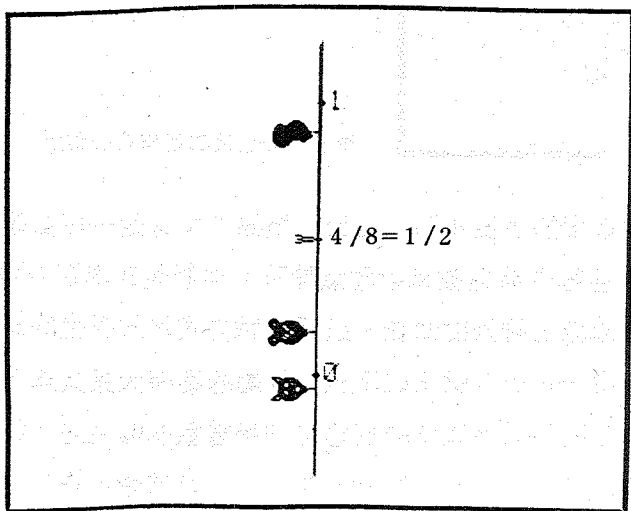


圖8 電腦螢幕顯示出學生前後輸入的兩個分數相等。

在玩“飛鏢”遊戲的過程中，學生發展出一些策略來得到正確的猜測，譬如說用指頭或鉛筆的寬度當作單位去量兩個連續整數間的距離，並預測氣球的位置所代表的分數。這種量法使他們量出如 $\frac{14}{19}$ 或 $\frac{17}{23}$ 等平常很少用到的分數。有一位學生量出兩連續整數之間的長度剛好是她指頭寬度的 $12\frac{1}{2}$ 倍，所以她射出的飛鏢命中 $\frac{2}{25}$ 上的氣球。由此可見，這個遊戲對於學生學習或熟練分數的概念而言，是有相當的價值的，他們在玩過此遊戲後，常顯示出他們對有理數的理解與熟練程度，遠超過傳統的數學法中所能給他們的。

結 論

電腦在教室裏的應用，開啓了數學教育的新局面，對學生而言則提高了他們的學習

動機，使得學習更有意義。我們還可以利用電腦來安排一些情境，讓學生使用不同的數學方法來解決問題，以發展學生的數學能力。這是教科書與傳統的教學法所不能及的。在電腦所能提供的有意義且舒適的環境中學習數學的經驗，使學生對數學的觀感將有深遠的影響。

上述的活動將數學的效益帶入學生的學習經驗中，使學生看到他們將來的生活中數學應用的遠景，而不必大幅度更改數學的課程。因為這類活動很容易融入目前的教學活動中。電腦的工業日新月異，價格也日趨合理化，電腦資源教室也不斷增設。我們應該不斷地朝此新方向研究發展，使電腦與學生之間的複雜管道，有多向的溝通方式。希望在未來，科技的發展能促進教學方法品質的提升，並使學生在“使用”數學，而不是在“做”數學。

古中國科學管窺(一) 數及數的計算

編輯室

從前數和數的計算方式，各有地域性的獨特方法，譬如舊英國的幣制就是一個很明顯的例證——它的兌換方式：是一先令等於十六辨士；二〇先令等於一磅。但是二一先令又等於一基尼！（一六六三～一八一三）。

古代巴比倫（公元前二七五〇—建國）數的計算方式，則是完整的六十進位法，現代我們仍可由時鐘的錶盤——六十分鐘為一小時的方式上找到這種六十進位法的「遺跡」。

在中國古代有關數及其計算的方式，則又不同於其他國家的複雜情形，而是有體系的組織，因為除非在特別情形下，使用十二與六十進位方式外，全部都用的是十進位，也就是說：能正確的以十進位法為基本的進位法，足徵中國古代對數與數的計算的認識、瞭解，已較早期步入完整而合理的途徑了。

從殷代（公元前一四〇一）甲骨文中，已發現有一、十、百、千、等表示數的文字，雖然未能發現到「萬」字的文字，但是我們亦無確證足以證明當時尚無法計算到萬位的事實，不過周（公元前一一二一——）便已有萬、億等表示數的字出現了。

根據後漢（公元二五——）徐岳著述的「數術記遺」來考證，它所列出的計數法，共分大、中、小三類：小數為十進法——即十萬為億、十億為兆；中數則以萬萬為億，萬萬億為兆，大數則在定位後改變單位以萬萬為億，億億為兆。「逸周書」中「世俘篇」載「億有八萬」，已足徵周代即已運用「小」數計算的方法，十萬為億的十進列系了。