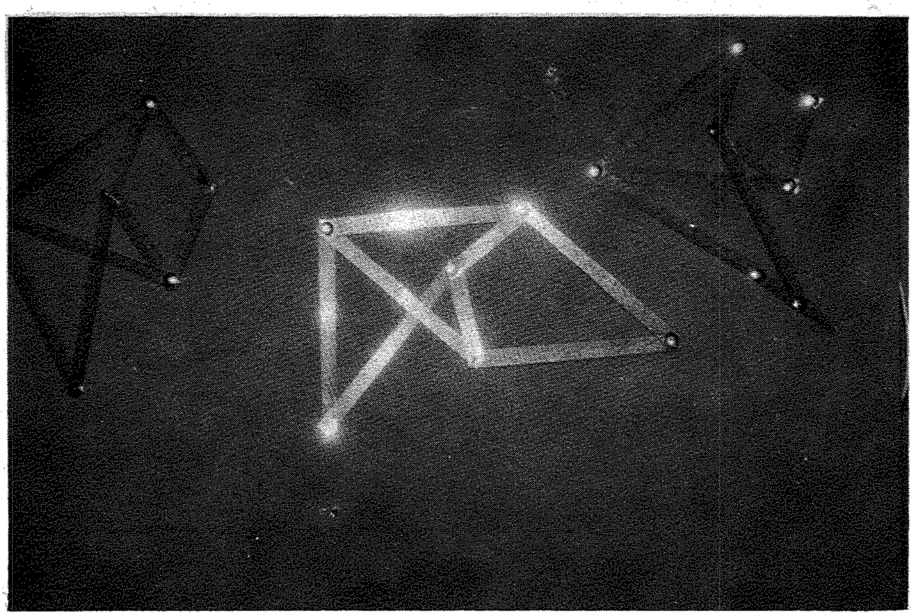
皮賽里爾聯節器的重新探討與有關幾何定理之探尋

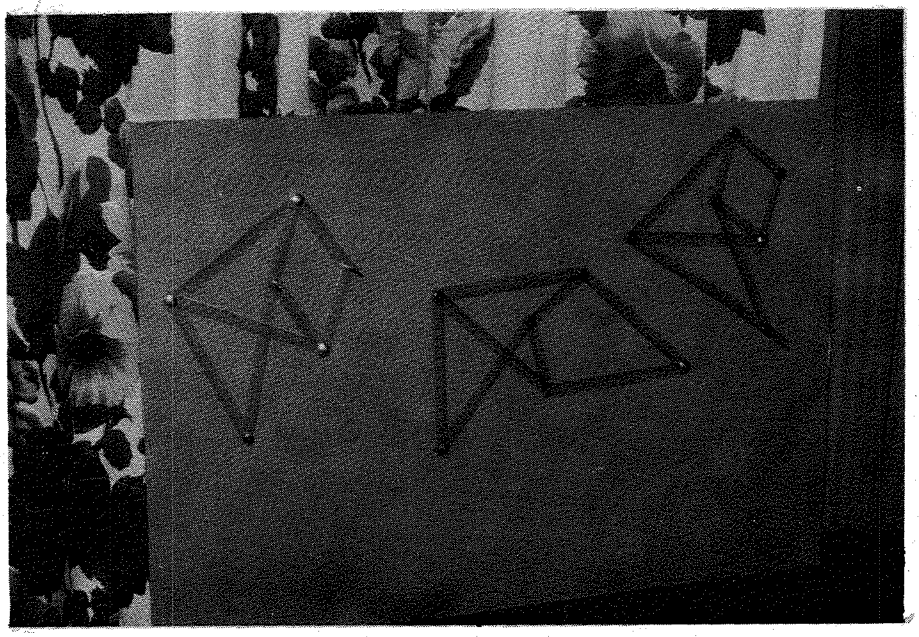
林嘉譽

彰化縣立二林國中

壹、研究動機

在圖書館借閱了「第二十四屆中小學科學展覽優勝作品專輯」，看到國中組數學科第二名作品「揭開皮賽里爾聯節器之謎」感到興趣，但對證明部分及結論感到煩瑣，並有一些存疑問題。本文將對此問題作更深入之探討。





貳、研究目的

本研究之目的在於探討下列各項問題之結論：

(一) 皮賽里爾聯節器之Q點運動軌跡爲一直線，是否另有更簡明之求證法？與其結構之幾何性質有何關係？是否能尋找到有關之原理？（原專輯中之證明，從P.123～P.131，費了很多篇幅，顯得很煩瑣）。

(二) 原專輯中實驗部分，關於$\overline{OR}$與$\overline{PR}$長度不等時，所描出之圖形爲一弧線，僅爲肉眼觀察結果，究竟是否爲一圓？軌跡方程如何？（原專輯P.120～P.121部分）。

(三) 原專輯結論部分第136頁提到聯節器必定$b>a$，吾人感到不以爲然；那麼，$b<a$的情形如何？

(四) 原專輯最後求證得Q點運動軌跡直線方程式爲$y=(2r^2+a^2-b^2)/2r$，其過程及坐標之選取與方程式之表示，似較麻煩，是否可簡化？（原專輯P.134～P.139部分）。

叁、研究過程

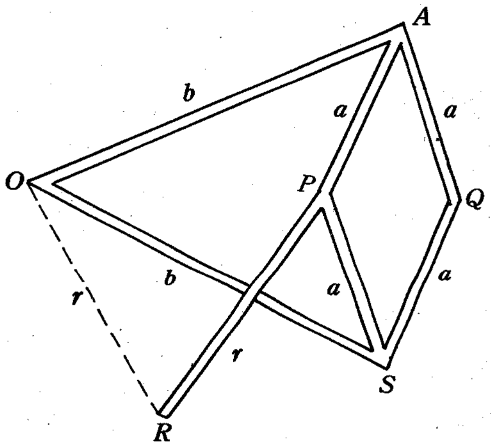
㈠ 從原專輯之作品內容，得知皮賽里爾聯節器之結構與使用情形如下：（圖一）

已知：(1) $\overline{PS}=\overline{SQ}=\overline{QA}=\overline{AP}=a$

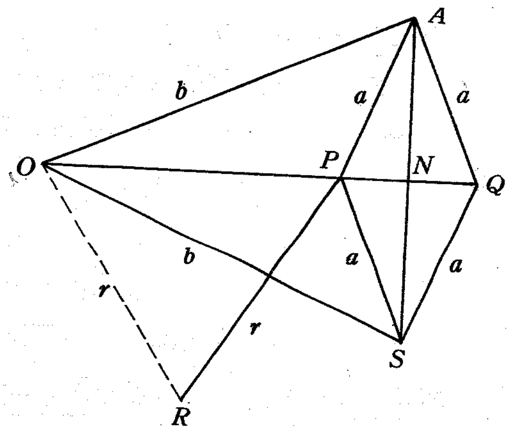
(2) $\overline{OA}=\overline{OS}=b$

(3) $\overline{RO}=\overline{RP}=r$

使用：將O點固定，P點以R爲圓心作圓周運動，則Q點之運動軌跡爲一直線。



圖一



圖二

㈡ 性質之探討：（圖二）

(1) 連接$\overline{AS}$，∵$\overline{QA}=\overline{QS}$，∴$Q$在$\overline{AS}$的中垂線上；

同理，P，O皆在$\overline{AS}$之中垂線上；

故 O，P，Q三點恆共線。……………（性質一）

(2) 作$\overleftrightarrow{OQ}$（即$\overleftrightarrow{PQ}$）交$\overline{AS}$於N，且$\overleftrightarrow{OQ}\perp\overline{AS}$；

探討動點P，Q對定點O之距離關係：

$$\overline{PO}=\overline{NO}-\overline{NP}\text{；}\overline{QO}=\overline{NO}+\overline{NQ}=\overline{NO}+\overline{NP}$$

（∵菱形$APSQ$之對角線互相垂直平分，∴$\overline{NQ}=\overline{NP}$）

嚐試利用$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$之關係及直角三角形性質，發現：

$$\overline{PO}\cdot\overline{QO}=\overline{NO}^2-\overline{NP}^2$$
$$=(\overline{OA}^2-\overline{NA}^2)-(\overline{PA}^2-\overline{NA}^2)$$
$$=\overline{OA}^2-\overline{PA}^2$$
$=b^2-a^2=$常數……………（性質二）

(三)　設 P 之運動軌跡爲一圓，R 爲圓心，$\overline{PR}=\overline{OR}=r$ 爲半徑；若 P 之對應點爲 Q，P' 點（P 之軌跡）之對應點爲 Q'（Q 之軌跡），我們分別就下列各情形加以討論：

(1)　當 $\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數$<(2\overline{OR})^2=(\overline{OP})^2$，如圖三所示：

由性質一知 O，Q，P 共線；O，P'，Q' 共線。

由性質二知 $\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數$=\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}$

$\therefore\quad \overline{PO}/\overline{P'O}=\overline{Q'O}/\overline{QO}$…………①

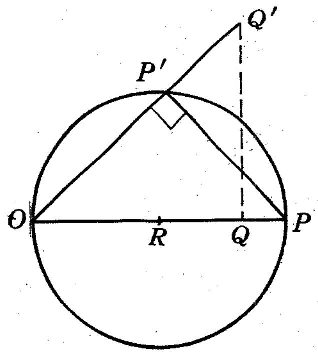
$\angle P'OP=\angle QOQ'$ ……………②

由①，②得：　$\triangle P'OP\backsim\triangle QOQ'$

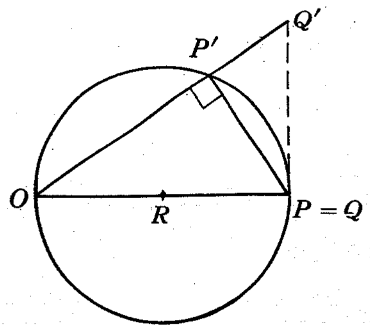
$\therefore\quad \angle Q'QO=\angle PP'O=90°$

故對於 Q 之任意軌跡點 Q'，$\overline{Q'Q}\perp\overline{OP}$ 恆成立，

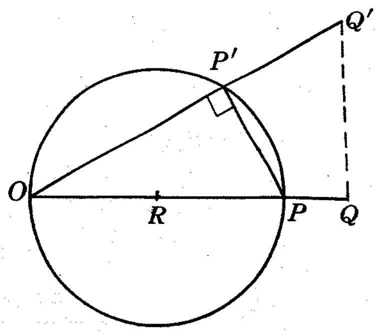
即 Q 之運動軌跡爲垂直於 $\overline{OP}$ 之一直線。



圖三



圖四



圖五

(2)　當 $\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數$=(2\overline{OR})^2=\overline{OP}^2$，如圖四所示：仿照(1)之證法，可得 Q 點之軌跡爲垂直於 $\overline{OP}$ 之直線。

(3)　當 $\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數$>(2\overline{OR})^2=\overline{OP}^2$，如圖五所示：

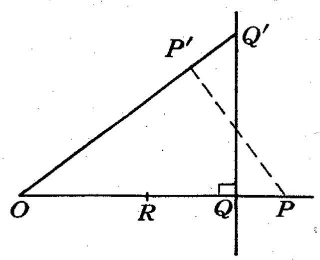
同理可證 Q 之軌跡亦爲垂直於 $\overline{OP}$ 之直線。

我們將上述結論改寫成下列定理：

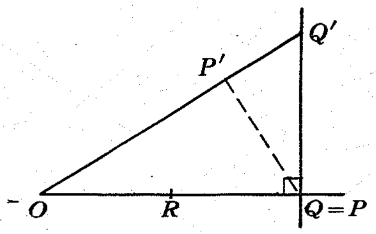
定理甲　設R為一圓，圓上一定點O與圓上其他任意點P（P'）之連線上某點Q（Q'），若符合$\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數，（$\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}=$常數），則此種點$Q$（$Q'$）所成之集合為垂直於$\overleftrightarrow{OR}$之一直線。

於是，皮賽里爾聯節器遂成為此「定理」之應用。

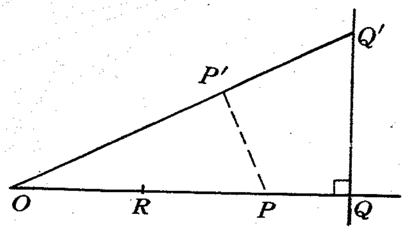
(四)　設$\overleftrightarrow{QQ'}$為一已知直線，O為線外一定點，若$\overleftrightarrow{OQ'}$上某點P'符合$\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}=$常數$=\overline{PO}\cdot\overline{QO}$，其中$P$為過點$O$且垂直$\overleftrightarrow{QQ'}$之線上一點；在下列圖六、圖七、圖八各情形中，



圖六



圖七



圖八

因　　$\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}=\overline{PO}\cdot\overline{QO}$，$\overline{OP}\perp\overline{QQ'}$

故　　$\overline{PO}/\overline{P'O}=\overline{Q'O}/\overline{QO}$

因此　　$\triangle PP'O\backsim\triangle Q'QO$

故得　　$\angle PP'O=\angle Q'QO=90^\circ$

$\Rightarrow$　O，P'，P三點共圓，且此圓以$\overline{OP}$為直徑。

以上之結論可改寫成下列定理：

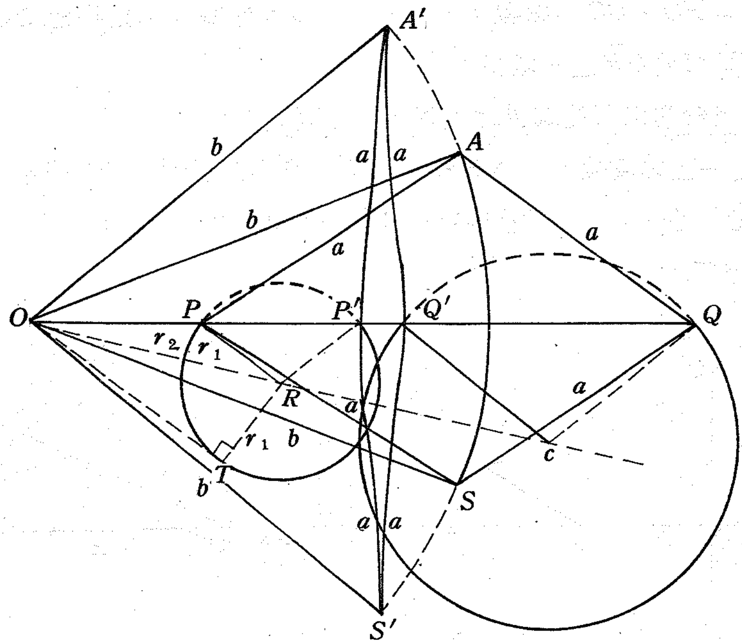
定理乙　予一直線$\overleftrightarrow{QQ'}$與線外一定點O，$\overleftrightarrow{QQ'}$線上任意點Q'與點O之連線上某點P'，若符合$\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}=$常數$=\overline{PO}\cdot\overline{QO}$，其中$P$為過點$O$且垂直於$\overleftrightarrow{QQ'}$之線上某點，則所有此種$P'$點與$O$點所成之集合為一圓，且以$\overline{OP}$為直徑。

此乃就研究目的(一)加以探尋所得之結果。

(五)　在(三)中僅就$\overline{PR}=\overline{OR}=r$之情形探討；今就$\overline{PR}\neq\overline{OR}$之情況繼續探討：〔研究目的(二)〕

設$\overline{PR}=r_1$，$\overline{OR}=r_2$

當P之軌跡點運行至P'且O，P，P'共線時，Q之軌跡點運行至Q'，如圖九所示：（$b>a$，以$r_2>r_1$之情形探究）。



圖九

(1) 由(二)之性質一：O，P，Q三點共線，且O，P'，Q'三點共線，今因O，P，P'三點共線，即O，P'在$\overleftrightarrow{OP}$上，故Q'在$\overleftrightarrow{OP}$上。因此O，P，P'，Q'，Q五點共線。

(2) 作$\overline{Q'C}\ /\!/\ \overline{PR}$且與$\overrightarrow{OR}$相交於$C$，$\Rightarrow \triangle OPR \backsim \triangle OQ'C$

$\Rightarrow \overline{Q'C}/\overline{PR}=\overline{Q'O}/\overline{PO}=?$ …………①

(3) 由(二)之性質二：$\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數$k_1=\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}$，〔$k_1=b^2-a^2$〕；又因$\overline{PO}\cdot\overline{P'O}=\overline{OT}^2=$常數$k_2$，其中$\overleftrightarrow{OT}$為切線。〔$k_2=r_2^2-r_1^2$〕；

$\Rightarrow \overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}/\overline{PO}\cdot\overline{P'O}=k_1/k_2$，即$\overline{Q'O}/\overline{PO}=k_1/k_2=k_3$ ………②

〔$k_3=(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$〕

(4) 由①，②得：$\overline{Q'C}=k_3\,\overline{PR}=$定長$k_4$，〔$k_4=r_1(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$〕這對任何$Q'$點（$Q$點之運動軌跡）皆成立。

(5) 連接$\overline{QC}$與$\overline{P'R}$，由$\overline{QO}/\overline{P'O}=\overline{Q'O}/\overline{PO}=\overline{OC}/\overline{OR}\Rightarrow\triangle QOC\backsim\triangle P'OR$

$\Rightarrow \overline{QC}/\overline{P'R}=\overline{OC}/\overline{OR}=\overline{Q'C}/\overline{PR}=k_3$

$\Rightarrow \overline{QC}=k_3\,\overline{P'R}=k_3\,\overline{PR}=\overline{Q'C}=$定長$k_4$ …………（A）

這對任何Q'點（Q點之運動軌跡）恆成立。

(6) 由$\overline{OC}/\overline{OR}=\overline{Q'C}/\overline{PR}=k_3 \Rightarrow \overline{OC}=k_3\overline{OR}=k_3 r_2$ ＝定長 k_5
〔$k_5=r_2(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$〕

(7) 點C在$\overline{OR}$上；而O，R皆為定點，⇒ C為定點。（因$\overline{OC}$為定長）。……(B)

(8) 由(A)、(B)得知：Q之運動軌跡為以定點C為圓心，定長$\overline{QC}$為半徑之一圓。
在$r_2<r_1$之情形我們也可得類同之結果，證明略。

由上之探討結果，可得下列定理：

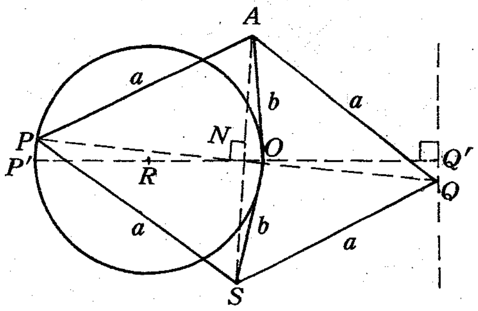
定理丙　設R為一圓，圓外一定點O與圓上任意點P（或P'）之連線上某點Q（Q'），若符合$\overline{PO}\cdot\overline{QO}$＝常數（$=\overline{P'O}\cdot\overline{QO}$），則此種點$Q$（$Q'$）所成之集合為一圓。

(六) 在(五)之情形中，若以定點O為坐標原點，$\overleftrightarrow{OR}$為平面坐標之X軸，則Q點之運動軌跡圓，其圓心坐標為〔$r_2(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$，0〕；而以圓心為原點時軌跡方程式為$x^2+y^2=[r_1(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)]^2$。

至此，皆就$b>a$之情形所作之探討結果。

當$b=a$時，聯節器不能動。（原專輯中已敘及）。

(七) 今就$b<a$之情形加以探討〔研究目的(三)〕：
（註：原專輯中第136頁提到必定$b>a$，吾人不以為然）。
如圖十所示：



圖十

(1) 同(二)之(1)探討可得P，O，Q恆共線（即性質一）

(2) $\overline{PO}\cdot\overline{QO}=(\overline{PN}+\overline{NO})\cdot(\overline{QN}-\overline{NO})$

$=(\overline{PN}+\overline{NO})\cdot(\overline{PN}-\overline{NO})$

$=\overline{PN}^2-\overline{NO}^2$

$= (\overline{PA}^2 - \overline{NA}^2) - (\overline{OA}^2 - \overline{NA}^2)$

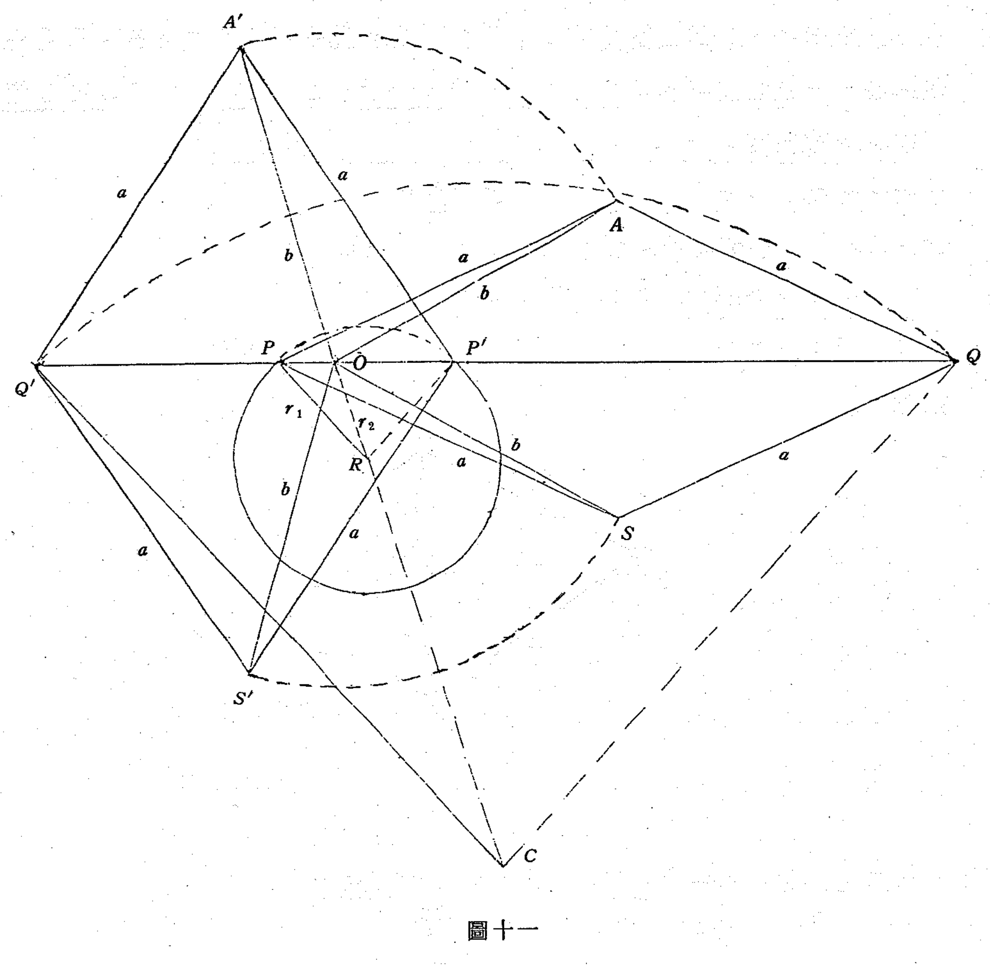
$= \overline{PA}^2 - \overline{OA}^2$

$= a^2 - b^2 =$ 常數（即性質二）。

(3) 此情形正如(三)之圖五，歸屬於定理甲，即 Q 之運動軌跡爲一直線 $\overleftrightarrow{QQ'}$，且 $\overleftrightarrow{QQ'} \perp \overleftrightarrow{OR}$。

結論：$b < a$ 時，聯節器同樣具有 $b > a$ 時之兩個基本性質；且在 $\overline{PR} = \overline{OR}$ 時，Q 點之運動軌跡也是一直線。

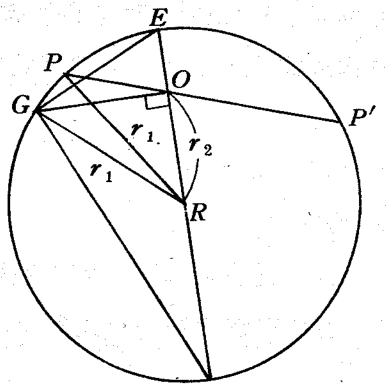
(八) $b < a$ 時，(五)之情形（$\overline{PR} = r_1 \neq r_2 = \overline{OR}$）將如何？以 $r_2 < r_1$ 之情形作探究，如圖十一所示：



圖十一

類似(五)之作圖與證明方法，利用相似三角形與比例關係探討；此時，$\overline{PO} \cdot \overline{QO}$ = 常數 $k_1 = a^2 - b^2$〔已證之於(七)之(2)〕，但 $\overline{PO} \cdot \overline{P'O} = ?$

分析如圖十二所示：



圖十二

(1) 過點 O 作直徑 $\overline{EF}$，

(2) 過點 O 作 $\overline{EF}$ 之垂直線段 $\overline{OG}$ 交圓 R 於 G，

(3) $\overline{PO}\cdot\overline{P'O}=\overline{EO}\cdot\overline{FO}=\overline{GO}^2=\overline{GR}^2-\overline{OR}^2=r_1^2-r_2^2=$常數 k_2。

其他部分之求證步驟與結論皆類同於(六)，且

$k_3=k_1/k_2=(a^2-b^2)/(r_1^2-r_2^2)=(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$；

$k_4=k_3r_1=r_1(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$；$k_5=k_3r_2=r_2(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$。

註：$r_2>r_1$ 之情形也可得類同之結果，證明略。

因此，可將「定理丙」擴大範圍改寫如下：

定理丁　設 R 爲一圓，不在圓上之一定點 O（可在圓外或圓內）與圓上任意點 P（或 P'）之連線上某點 $Q(Q')$，若符合 $\overline{PO}\cdot\overline{QO}=$常數（$=\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}$），則此種點 $Q(Q')$ 所成之集合爲一圓。

(九) 由(九)之探討可知：於皮賽里爾聯節器之情形，若以定點 O 爲坐標原點，$\overleftrightarrow{OR}$ 爲平面坐標之 x 軸，當 $b<a$，則 Q 點之運動軌跡圓，其圓心坐標爲〔$r_2(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$，0〕；而以圓心爲原點時，軌跡方程式爲

$x^2+y^2=[r_1(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)]^2$。

註：在(十)與(七)之圓方程式形式雖然相同（皆以圓心爲坐標原點表示），但因二者之 r_2 不等，圓心不同，故爲不同圓。

(十) 在 $\overline{PR}=\overline{OR}=r$ 之情形，皮賽里爾聯節器 Q 點之運動軌跡直線方程式爲何？原

專輯中花了許多步驟與篇幅（P.133～P.139）證得 $y=(2r^2+a^2-b^2)/2r$，是否可以更簡潔的方式求證與表示？〔研究目的四〕

(1)　$b>a$ 時，

由(二)之性質(二)：$\overline{PO}\cdot\overline{QO}=b^2-a^2$

由(三)之各圖知，$\overline{PO}=2r$

故 $\overline{QO}=(b^2-a^2)/2r$；再由定理甲可得下列結論：以定點 O 為直角坐標原點，$\overleftrightarrow{OR}$ 為 x 軸，則 Q 點之軌跡直線方程式為 $x=(b^2-a^2)/2r$。

(2)　$b<a$ 時，

由(七)之探討得：$\overline{PO}\cdot\overline{QO}=a^2-b^2=\overline{P'O}\cdot\overline{Q'O}$，且 $\overleftrightarrow{Q'Q}\perp\overleftrightarrow{OR}$；由圖十知 $\overline{P'O}=2r$。

故 $\overline{Q'O}=(a^2-b^2)/2r$；再由(七)之(3)得：

結論：以定點 O 為直角坐標原點，$\overleftrightarrow{OR}$ 為 x 軸，則 Q 點之軌跡直線方程式為 $x=(a^2-b^2)/2r$。

肆、有關皮賽里爾聯節器之結論

$\overline{PR}$ 與 $\overline{OR}$ 之關係	$\overline{PR}=\overline{OR}=r$	$\overline{PR}=r_1\neq r_2=\overline{OR}$
Q 點軌跡	直線	圓
軌跡方程式	(1)　$b>a$ 時 $X=\dfrac{b^2-a^2}{2r}$ (2)　$b<a$ 時 $X=\dfrac{a^2-b^2}{2r}$	$x^2+y^2=\left[\dfrac{r_1(b^2-a^2)}{r_2^2-r_1^2}\right]^2$
備　　註	$\overleftrightarrow{OR}$ 為 X 軸，O 點為原點	$\overleftrightarrow{OR}$ 為 X 軸，另以圓心〔$r_2(b^2-a^2)/(r_2^2-r_1^2)$, 0〕為原點

說明：(1)　$b>a$ 時之圓與 $b<a$ 時之圓，雖方程式形式相同，但因情況不同，彼此之

r_2 不等，圓心不同，故爲不同圓。

(2) $b = a$ 時，聯節器不能動。（參考圖一，推想或操作易知，原專輯且已敍及）。

伍、參考資料

一、國立科學館：第二十四屆中小學科學展覽優勝作品專輯（國中組）（P.119～P.139），73年6月出版。

二、國立編譯館：國民中學數學第五册（課本），71年8月八版。

古中國科學管窺(三)

九章算術與中國數學

編 輯 室

中國唐代（公元六一八──）即已有數學書籍十種而其中九種均爲前朝的著述，惟惜均未列著者年代名氏，致無可考據！例如「周體算經」咸認係記錄周公（公元前一一二二──）與商高（周大夫）的問答，然而其所引述內容究係源於周初抑出於後漢的整理無法確認；又如「孫子算經」有云出諸孫武的著作，但其中又不乏後漢的資料（內列長安洛陽相去九百里），因之使人聯想到或係六朝時的作品！

在前記數學書籍十種 ──統稱爲「算經十書」，其中最具代表性的當推「九章算術」一書，而「九章算術」之著作，雖確知其出於漢代，但如考據其正確時間仍難得要領：蓋以西歷言基督降生前後四百年均屬漢代，而著者名氏不詳，究係西歷紀元前、後？不免令人無可適從！且「九章算術」的內容，多數學者認爲係集旣往歷代研究發明之大成，而於漢代歸納成書，此說亦屬可信。

「九章算術」內容，極盡深奧，全書共分九章採納各類題解，不僅可以爲代表中國數學的『古典』且亦鑄造中國數學的性格。如以幾何學爲希臘數學發展的基礎，則中國數學的代表作「九章算術」則屬於以算術及代數爲基礎的發展。

中國數學的性格缺乏完整的體系，不若希臘數學能以幾何學的理論爲基礎。雖然有平面、立體的演算，但僅以求長度、面積、體積的數值爲主體，形體與形體間所存在的關聯、性質的推衍則付闕如：例如『三角形的三角之和，等於二直角』一類定理的例證等，又如點、線、圖等定義及以它爲基礎的理論上證明等均無記載。中國數學的性格偏重於個別問題的解決，換言之而爲側重在個體的獨立計算。