

中學教室裡的微電腦

Susan Smith 著

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

編譯

林克雄

桃園縣大岡國民中學

越來越多的微電腦，已經以各種方式進入了中學的數學教室，所以數學教育者必須在數學課程的教學設計上，善加利用。時下的電腦，僅用在計算能力的訓練，電腦的操作實習，以及程式寫作等，這樣的使用方式是絕對不夠的。如果我們要讓電腦在中學的數學教室裡，名正言順地佔有一席之地，我們就得在現行的數學課程中，選擇適當的教材，而把電腦當作這些教材的教學工具。

學生和電腦

今天的學生已處於電腦充斥的時代，他們發現電腦被使用在計算、找尋資料、管理我們的許多生活層面，和“教學”上；他們聽到有關電腦的卓越功能，以及一些預言說電腦在未來能做那些令人驚奇的事情。所以他們對自己的未來充滿幻想，而對於許多可被電腦輕易完成的事物所需知識的學習，心存疑慮。

下面的故事，生動地表達了這些年青人在這方面的態度，以及這種態度會引起的後遺症。這個故事是由一個才十一歲的小女孩娜達·李·史密斯（Nata Lee Smith）所寫的，她在家裏有一部微電腦，已使用了三年。

註1：本文取自美國數學教育會NCTM所出版的1984年 year book，Computer in Mathematics Education.

史達拉的微電腦

到了西元 2000 年，世界已被電腦所控制。每個人都擁有一部電腦，替他（或她）作各式各樣的服務。數學的學習已不再是學校課程的一部分，也沒有人願意要學數學。因為這些學習實在沒有必要，電腦可以代勞一切。

有一天，史達拉正要用電腦處理她的所得稅時，電腦突然故障。「該死！」她說：「怎麼選這個時候壞掉呢？」由於電話也轉接在電腦上（替你查號碼，及自動撥號），所以史達拉也無法打電話找人修理。

「怎麼辦呢？」她想。可憐的史達拉心想，真是糟透了，沒有電腦即沒有所得稅記錄，沒有記錄政府就不承認這個人的存在。最後，史達拉只好向她年老的媽媽求救，看看她是否有好的建議。

「我有一些古老的數學書放在閣樓裏，是我們的祖先留下來的，也許你可以研究看看。」她媽媽說。這似乎是非常愚蠢的行為，因為在她的記憶中從沒聽說過數學書這玩意兒，但她也只有試試看。於是，史達拉學到了數學裡的計算原理，從此以後，再也沒有這方面的煩惱了。

學生都很能接受電腦，在他們到了七年級（即國中一年級）時，有許多人已在數學實驗室中使用過電腦，並且接受過電腦操作實習，以及利用電腦所作的數學計算練習。數學教科書中出現的例行公事式（*routine*）的問題，現在都已移到電腦終端機的顯示幕上。

到了中學，許多學生對千篇一律的電腦實習，及計算訓練感到厭煩。所以，他們故意輸入各式各樣的錯誤答案，企圖哄騙電腦，看看電腦如何處理。因此，他們在電腦作業上的成績看似低落，但在動腦筋與電腦鬥智的實驗過程中，他們學到了電腦是如何工作的，以及設計電腦程式的許多技巧。

本來，在例行的電腦實習及計算訓練中，快速地獲得正確答案並取得高分，電腦程式會主動地給以鼓勵與報酬。這些報酬是這位學生可以玩進一步的附有教育性的電腦遊戲。可是，這些遊戲只帶來更多的實習與訓練，而遊戲的模式，在每個年級都是相同的，不同的只是數字的難易程度稍有參差，問題的表面形式略有出入。把這樣的遊戲（甚至於連遊戲都稱不上）當作報酬，對學生而言實在是無趣之極。

若將這些遊戲與學生在電動玩具遊樂場中所玩的遊戲比較，真有天地之差。學生在電動玩具遊樂場的遊戲中，所經歷的興奮與挑戰，為什麼總是無法在學校裡的電腦遊戲

中出現？難怪這些應該對電腦有特殊才能的學生（computer wise kids）連多花十分鐘在學校的電腦實習課都不感興趣。

學生和中學數學課程

仔細檢查七、八（即國中一、二）年級的數學課程，並進一步去觀察這些年級的數學教學活動，不難發現，這些年級的數學教材內容，大部分是對小學六年所學的數學加以複習，以及作進一步的計算訓練，和一些技能的熟練。當然，數學教科書及教師手冊中，也介紹了一些新教材，諸如機率、更多的幾何、初等的數值三角，和一些代數。但在課堂上，數學教師花了太多的時間，訓練學生作計算技巧的熟練。

六年級的數學老師常聽到學生抱怨：「我記得去年就做過這些了。」七年級的學生是如此，八年級的學生也是如此。為什麼呢？一個最常被老師引用的理由是：我班上有太多的學生，在基礎的計算技能上還沒有準備好，不能教進一步的教材。沒錯，每位學生都應該學到，了解，並能有效而熟練地計算，這是一切數學的基礎。但因而使學生對數學產生了厭惡，是不是划得來呢？

美國有許多州的教育專家提議，每個學生都應該有電腦實習，使他們熟悉電腦，並能進一步把使用電腦當作家常便飯那樣容易，至少不會因他（或她）不熟悉電腦而在將來的社會中吃虧，簡單地說，就是掃除“電腦文盲（computer illiteracy）”。但是，對電腦要熟悉到什麼程度，才算不是電腦文盲呢？連專家之間的意見，每每不盡相同。即使如此，學生應該熟悉電腦的潮流與趨勢，倒是非常確定的。

中學被公認為是這種訓練最適當的場所，而許多中學也把這個責任加諸於數學部門。如果七、八年級的數學課程中，加上了讓學生認識（或熟悉）電腦的教材內容，則勢必要刪除其他的數學教材。如此，學生也許學到更多的電腦，但因此而即將失去的數學內容也是很重要的。這種矛盾也需要加以解決。

如果把電腦的教學，與傳統的七、八年級數學教材結成一體，則學生對計算基礎技能的不熟練，中學數學教材對學生而言不夠新鮮，學生在這樣的時代應該對電腦認識到某種程度，電腦的學習放在數學課內使數學的教學時數不夠用等問題，都至少可以得到部分的解決。

能寫電腦程式是認識電腦的重要部分，因此也應該是現行數學教學中重要的一環。在電腦程式的寫作過程中，學生可以探索並發展出自己的方法與能力，以解決各式各樣

的問題，這就是他們基礎計算技能的延伸。我們也應該叫學生做一些筆算的計算題，並把得到的答案與電腦算出來的答案作比較，以確定他們得到了正確的答案。這樣，他們也得到了計算訓練。

數學解題 (problem solving) 中的許多重要的技巧，也可以在電腦程式的訓練中合併在一起教學。譬如說，嘗試錯誤 (trial and error) 是數學解題中最重要的技能之一，但在傳統的數學教科書中的題目，很少會需要用到，但在利用電腦來解決某些類型的問題時，却是非常有效的方法。所以，電腦的引入也可以補傳統數學教材的不足。

預先想 (thinking ahead) 也是數學解題中另一項重要的能力，在學寫電腦程式時常要用到。因為學生必須在每個步驟都得自問：「如果我這樣做，事物會起怎樣的變化？」一旦寫好了一個程式之後，我們也應該鼓勵學生自我追問：「如果我把這個這樣改，事物又會如何變化呢？」這樣的過程就是數學解題中“回頭看 (或向後看， looking back) 的技巧。

如果把電腦程式設計的學習放在數學課程內，則學習所需要增加的時間，其實是極少的，譬如說，把程式設計的學習併入，並當作學生學習新的數學概念或技能時的一種方法與手段。下列就是其中的一種學習模式：

老師介紹了一種新技能 (或新概念)，學生做一些題目，直到他認為他已經能把握住重點，並能叫電腦利用此技能 (或概念) 解決問題為止。學生寫電腦程式，並試用他的程式解決問題。

這樣，學生在寫程式時，就一再地複習了他新學到的技能或概念，而且這對他是否能真正把握住重點，也是一項考驗。同時在這樣的過程中，他也學到了新的程式設計的技巧，使他對電腦有進一步的了解。

要注意到，在上述的數學與電腦結合在一起學習的模式中，重點是放在學習新的數學上，但我們也可以反過來，把學習的重點放在學習程式設計上。下列所提供的，就是如何實現後面這一種結合模式的建議。

介紹電腦程式

你可以利用一個已經完成的程式做為開始，把它介紹給學生。這樣的方式大概比較有效，而且節省時間。因為這樣至少要比逐步教他們寫程式，要好得多。下面就是一個合適的程式。

```

10  輸入 N
20  J = 1
30  若 J >= N 則到 110
40      J = J + 1
50      F = N / J
60  若 F <> 整數(F)則到 40    (註 2)
70  印出 J
80  N = F
90  J = 1
100 到 30
110 停止
    
```

利用下列所顯示的方式，與班上的學生研討，電腦到底是如何進行這個程式的。

當我們把程式打入電腦後，你必須按“Run”鍵來開始。此時，“？”會出現
在電腦螢幕上。電腦是在 10 行等你把 N 的數值打入。假定你選擇的 N 值是 18，則電腦
是以下列的方式來執行這個程式的：

電腦程式	執行工作
10 輸入 N	打入 18，則 N 就等於 18
20 J = 1	起先 J = 1
30 若 J >= N 則到 110	J 小於 N，故到下一行
40 J = J + 1	J 值變為 2
50 F = N / J	$F = 18 / 2 = 9$
60 若 F <> 整數(F)則到 40	F 是整數，故到下一行
70 印出 J	2 出現在螢幕上
80 N = F	N 現在變成 9
90 J = 1	J 值變成 1
100 到 30	跳到行號 30

註 2：整數 (F) 代數 F 的整數部分。

30	若 $J \geq N$ 則到 110	J 小於 N, 故到下一行
40	$J = J + 1$	J 值變為 2
50	$F = N / J$	$F = 9 / 2 = 4.5$
60	若 $F <>$ 整數(F)則到 40	F 是整數, 故跳到行號 40
40	$J = J + 1$	J 值變為 3
50	$F = N / J$	$F = 9 / 3 = 3$
60	若 $F <>$ 整數(F)則到 40	F 是整數, 故到下一行
70	印出 J	3 出現在螢幕上
80	$N = F$	$N = 3$
90	$J = 1$	J 值變為 1
100	到 30	跳到行號 30
30	若 $J \geq N$ 則到 110	J 小於 N, 故到下一行
40	$J = J + 1$	J 值變為 2
50	$F = N / J$	$F = 3 / 2 = 1.5$
60	若 $F <>$ 整數(F)則到 40	F 不是整數, 故到行號 40
40	$J = J + 1$	J 值變為 3
50	$F = N / J$	$F = 3 / 3 = 1$
60	若 $F <>$ 整數(F)則到 40	F 是整數, 故到下一行
70	印出 J	3 出現在螢幕上
80	$N = F$	$N = 1$
90	$J = 1$	J 值變為 1
100	到 30	跳到行號 30
30	若 $J \geq N$ 則到 110	因 $J = N$ 故跳到行號 110
110	停止	程式結束

在類似上述的解說與討論結束之後, 教師應要求學生選取一個 N 的值, 再跟著程式逐步檢驗輸出的結果。這樣即可測試出, 學生對此程式是否理解。學生在比較輸入的數, 與輸出的結果後, 他們會發現此程式的目的: 找出任意一個正整數的質因數, 例如當 $N=18$ 時, 出現在螢幕上的輸出是 2, 3, 3, $18=2 \times 3 \times 3$ 。

教師必須再用另一個樣本程式來考察, 學生是否對電腦執行程式的情形有所了解。

我們可以要求學生，隨着程式的每個步驟，檢驗其輸出並說出程式的目的。譬如說，下列的程式就很合適。這裏有兩點與上個程式不同的地方，必須提出說明：即在行號10是輸入兩個數A、B，而在行號70中的符號“*”表示乘法。

10	輸入 A, B	100	到 40
20	$L = 1$	110	$L = L * J$
30	$J = 1$	120	$A = F$
40	若 $J \geq A$ 則到 160	130	$B = G$
50	$J = J + 1$	140	$J = 1$
60	$F = A / J$	150	到 40
70	若 $F < \text{整數}(F)$ 則到 50	160	$L = A * B * L$
80	$G = B / J$	170	印出 L
90	若 $G = \text{整數}(G)$ 則到 110	180	停止

這個電腦程式的目的，是找出兩個正整數A與B的最小公倍數。

接下來的活動，是要求學生寫一個電腦程式，求兩個正整數A與B的最大公因數，並對此程式加以測試。對那些有困難的學生，給予如下的提示：這個程式與上一個程式非常類似。事實上，只要把程式中的一個行號刪去，螢幕上出現的輸出，就會是兩正整數A與B的最大公因數。

上面所舉的兩個程式的例子，以及上段所提要求學生寫的程式，其輸出的部分都不包含口語的資料。雖然把口語資料放在輸出部分，較易讀出並理解輸出的結果，但這並不是我們在這裡所談的「介紹程式」的目標；我們的目標在教導學生理解程式的邏輯概念，並加強其數學解題的能力。再說，要寫一個程式，使電腦印出複雜的陳述，多少也超出中學生的能力。

利用這種類型的程式作為介紹，加上教師的耐心與盡心的指導，學生應該很快就能寫出各種的電腦程式。

電腦與數學解題

電腦能夠，而且應該被用作數學解題的工具。有些數學問題雖然可以用代數做出來，但利用電腦作為工具，畫出圖形，列出表格，再叫學生從其中找尋規律，也是很好的

解題方法的訓練。下面，舉兩個這樣的例子作為教學的建議：

問題 1 收費大眾化的某航空公司的班機，每班機的席位都在 125 到 150 之間，依班次的不同而異（不同型的飛機）。又知某班機（由 El Paso 到 Austin）中，每 11 位旅客就有一個空位，問這班機上的旅客有多少人？

利用下列的電腦程式所製造出來表格如下所示。由此表格看來，可能的答案有兩個，即 121 或 132。

```

10  印出“空位”，“人數”與“席位”
20  A = 0
30  印出
40  A = A + 1
50  B = 11 * A
60  C = A + B
70  若 C > 150，則到 200
80  印出 A, B, C
90  到 30
200 停止（或結束）

```

按“RUN”鍵開動。

空位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
人數	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
席位	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

問題 2 一場籃球賽的入場券，學生票為 0.75 美元，成人票則為 1.25 美元。如果賣出 195 張入場券，而收入為 201.25 美元，問學生票與成人票各賣出多少張？

下述的電腦程式顯示了嘗試錯誤的策略。在理想的狀況下，學生將在每一步都比前一步作更成熟的猜測。

目錄（LIST）

印出“猜猜看，學生票賣了幾張？選一個數作為你的猜測”

10	輸入 N	成人	125	156.25
20	$A = 195 - N$	總計	195	208.75
30	$S = .75 * N$	再猜猜看！		
40	$P = 1.25 * A$	猜猜看，學生票賣了幾張？選一個數作為你的猜測。		
50	$T = S + P$	75		
51	印出“學生” N，S	學生	75	56.25
52	印出“成人” A，P	成人	120	150
53	印出“總計” 195，T	總計	175	206.25
54	印出	再猜猜看！		
60	若 $T = 201.25$ ，則到 90	猜猜看，學生票賣了幾張？選一個數作為你的猜測。		
70	印出“再猜猜看”	80		
80	到 10	學生	80	60
90	印出“這就對了”	成人	115	143.75
100	停止（或結束）	總計	195	203.75
按“RUN”鍵開動。				
猜猜看，學生票賣了幾張？選一個數作為你的猜測。				
60		再猜猜看！		
學生	60	45	猜猜看，學生票賣了幾張？選一個數作為你的猜測。	
成人	135	168.75		
總計	195	213.75		
再猜猜看！				
70		這就對了！		
學生	70	53.5		

這兩個電腦程式表達了兩種不同的解題策略，這兩種策略是中學生在實際解題時，很可能採取的策略。兩者的主題都是嘗試錯誤，但使用的方式大為不同：在有關飛機的程式中，是由電腦作猜測，而由學生分辨出那些是可能的答案；但在有關籃球賽的程式中，則反過來由學生做猜測的工作。

基本計算技能的熟練與推廣

基本計算技能的熟練與其推廣，是結合數學教學與電腦程式設計的重要關鍵。我們可以由下列給學生的作業中，看出這種結合模式的一些構想：

試寫出一個電腦程式計算兩分數相乘，並加以測試

在寫程式前，先完成下列的練習題，由此決定你要電腦幫你做些什麼？

1. 計算下列兩分數的乘積

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$$

2. 怎樣找出此乘積的分子？ _____
怎樣找出此乘積的分母？ _____

3. 假定你已經有了計算乘積 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ 的電腦程式的一部分如下：

$$10 \quad P = 2$$

$$20 \quad Q = 3$$

$$30 \quad R = 5$$

$$40 \quad S = 7$$

若你用 N 為乘積的分子，你應該在此程式中如何寫出乘積 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ 的分子？ _____

若你用 D 為乘積的分母，你應該在此程式中如何寫出上述乘積的分母？ _____

4. 完成此電腦程式，並且使你的答案以 N/D 的形式表示（例如， $\frac{4}{5}$ 表示 $\frac{4}{5}$ ）。

5. 變換你的程式，使你輸入任意數為分子或分母時，你的程式都能幫你算出兩分數的乘積。
6. 改變你的程式，使你的程式在兩分數的乘積為假分數時，能幫你把它變成帶分數的形式 $W \frac{N}{D}$ ，其中 W 是帶分數的整數部分。例如， $2 \frac{3}{4}$ 中的 2 表示其整數部分。
7. （對高手的挑戰）改變你的程式，使你的程式計算出來兩分數乘積，為最簡分數（即分子與分母互質）。

下列的程式，就是利用蘋果 II 號 Plus 這個機種的微電腦，執行上述各項作業（5，6與7）的情形。

練習 5

```
10  印出 " E = " ; : 輸入 E
20  印出 " F = " ; : 輸入 F
30  印出 " G = " ; : 輸入 G
40  印出 " H = " ; : 輸入 H
50  N = E * G
51  D = F * H
52  若 D = 0 , 則到 10
90  印出 E ; " / " ; F ; " * " ; G ; " / " ; H ; " = " ; N ; " / " ; D
100 停止 (或結束)
```

按 " RUN " 鍵開動

E = ? 8

F = ? 3

G = ? 9

H = ? 4

$8/3 * 9/4 = 72/12$

按 " RUN " 鍵開動

E = ? 5

F = ? 8
 G = ? 2
 H = ? 15
 $5/8 * 2/15 = 10/120$

按“RUN”鍵開動

E = ? 8
 F = ? 3
 G = ? 9
 H = ? 15
 $8/3 * 9/15 = 72/45$

練習 6

10	印出 “E=” ;: 輸入 E	
20	印出 “F=” ;: 輸入 F	
30	印出 “G=” ;: 輸入 G	
40	印出 “H=” ;: 輸入 H	
50	N = E * G	
51	D = F * H	
52	若 D = 0 , 則到 10	
80	若 N < D , 則到 90	
81	Q = N / D	
82	若 Q <> 整數(Q) , 則到 85 (註 3)	] 若結果為一整數, 則商為 $N \div D$
83	印出 E ; “ / ” ; F ; “ * ” ; G ; “ / ” ; H ; “ = ” ; Q	
84	到 100	
85	W = 整數(Q)	] 帶分數的整數部分就是 $N \div D$ 的 整數部分, 從分子扣減分母與整
86	N = N - W * D	
87	印出 E ; “ / ” ; F ; “ * ” ; G ; “ / ” ; H ; “ = ” ; W ; “ ” ; N ; “ / ” ; D	

註 3 : 因為電腦中沒有 “ $\neq$ ” 號, 所以用 “<” 和 “>” 合在一起表示 “ $\neq$ ”。

88 到 100
90 印出 E ; “ / ” ; F ; “ * ” ; G ;
“ / ” ; H ; “ = ” ; N “ / ” ; D
100 停止 (或結束)

數部分的乘積，就得到帶分數的分子。

按 “ RUN ” 鍵開動

E = ? 8
F = ? 3
G = ?
H = ? 4
 $8/3 * 9/4 = 6$

按 “ RUN ” 鍵開動

E = ? 5
F = ? 8
G = ? 2
H = ? 15
 $5/8 * 2/15 = 10/120$

按 “ RUN ” 鍵開動

E = ? 8
F = ? 3
G = ? 9
H = ? 15
 $8/3 * 9/15 = 1 27/45$

練習 7

10 印出 “ E = ” ; : 輸入 E
20 印出 “ F = ” ; : 輸入 F
30 印出 “ G = ” ; : 輸入 G

```

40      印出 "H=" ; : 輸入 H
50      N = E * G
51      D = F * H
52      若 D = 0 , 則到 10
60      若  $N < > D$  , 則到 64      ] 若分子與分母相等, 則兩分數的
62      Q = 1                      ] 乘積是 1
63      到 83
64      若  $N < D$  , 則到 67      ] 爲了把分數約成最簡分數, 要檢
65      I = D                      ] 查分子與分母的公因數, 而公因
66      到 68                      ] 數不會大於分子或分母中的最小
67      I = N                      ] 者。
68      Z = I
69      若  $N / E = \text{整數} (N/E)$  且  $D/E = \text{整數}$       ] 檢查公因數時是由大到小檢查的
      (D/E) 則到 72      ] , 所以找出來的第一個公因數即
70      Z = Z - 1      ] 爲最大公因數。
71      到 69
72      N = N/Z      ] 約成最簡分數。
73      D = D/Z      ]
80      若  $N < D$  , 則到 90
81      Q = N/D
82      若  $Q < > \text{整數}(Q)$  , 則到 85
83      印出 E ; "/" ; F ; "*" ; G ; "/" ; H ; "=" ; Q
84      到 100
85      W = 整數(Q)
86      N = N - W * D
87      印出 E ; "/" ; F ; "*" ; G ; "/" ;
      H ; "=" ; W ; " " ; N ; "/" ; D
88      到 100
89      印出 Q

```

```
90  印出 E ; “ / ” ; F ; “ * ” ; G ; “ / ” ;  
    H ; “ = ” ; N ; “ / ” ; D  
100 停止 ( 或結束 )
```

按“ RUN” 鍵開動

```
E = ?  8  
F = ?  3  
G = ?  9  
H = ?  4  
8/3 * 9/4 = 6
```

按“ RUN” 鍵開動

```
E = ?  5  
F = ?  8  
G = ?  2  
H = ? 15  
5/8 * 2/15 = 1/12
```

按“ RUN” 鍵開動

```
E = ?  8  
F = ?  3  
G = ?  9  
H = ? 15  
8/3 * 9/15 = 1 3/5
```

另外，我們還可以給學生一些電腦程式設計的作業，例如作分數的加、減、除，指數的運算，把分數展開成小數等。這些教材都是可以用來配合訓練學生，以熟練他們的計算技能，並加強或加深學生對步驟意義(process of algorithm)和“零不能當除數或分母”概念的印象。

上述所學的電腦程式設計的例子，也顯示了我們在數學教學上的“因材施教”的原則的運用。譬如說，習題5是每個學生都該做的，但習題7則只能要求能力最強的學生來做。

利用電腦介紹新的數學教材：費波那齊數列

在上文中提到利用電腦來介紹新的數學教材的模式，這裏我們以費波那齊 (Fibonacci) 數列作為例子，來顯示這種教學模式的過程，及其電腦程式。教學的過程是這樣的：教師先定義費波那齊數列，學生在紙上作業，寫出滿足條件的數列，最後當學生認為他們已抓住要點，可以叫電腦造出數列時，他們開始電腦程式的設計，並對程式加以檢驗。

事實上，這個電腦程式是相當單純的，但需要“預先想”的數學解題能力，並對“遞迴 (recursive)”概念有所理解。我們也需要叫電腦作不少的計算，以便檢查此電腦程式。下列的程式令費波那齊數列的頭兩項為 1、1，但我們很容易改變程式，令頭兩項為我們任意的任意兩數，而且，下述的程式也只把數列寫到小於 100 內的各項，要寫出更多項也不是難事。

```

10  A = 1
20  B = 1
30  印出 A
40  印出 B
50  C = A + B
60  印出 C
70  A = B
80  B = C
90  若 C < 100，則到 50
200 停止（或結束）

```

使用電腦所得的輸出：數學的學習

使用電腦，並叫學生設計電腦程式，可幫助學生理解並發展中學數學課程內的一些概念。對於一些跟不上進度的學生，電腦與電腦程式設計與檢驗，可提供他們熟練的機會，使他們跟上班上的其他同學。對於一些比較有數學天賦的學生，電腦使他們有更多的機會對一些數學教材作更進一步的探索，甚至於創造。對數學老師而言，我們也得到一報酬性很高的輸出：我們的學生對數學學習的效果與興趣。