

電腦與學習上的臨界障礙

Glenda Lappan 著
M. J. Winter

黃敏晃 國立臺灣大學數學系
譯
黃素華 臺北縣自強國民小學

(現調臺灣省國民學校教師研習會數學小組服務)

一個不為許多學生所真正了解的數學應用，是反射 (reflections) 與鏡像 (mirror images) 的效應。在 1978 年秋天出版的 Outlook 雜誌第 29 期上，大衛·霍金斯 (David Hawkins) 在他所寫的一篇文章 (P. 3~23) 中指出，許多學生不能了解反射與鏡像效應的失敗，是科學的學習上所謂**臨界障礙** (critical barriers to science learning) 的一種。他把學習上的臨界障礙定義如下：

當一個基本的科學概念，未被某些學生所吸收消化 (assimilated) 前，對這些學生而言，是非常地不明顯單純的 (exceedingly unobvious)。

在本文中，我們建議利用電腦，來製造**實驗室的經驗** (laboratory experiences)，即讓學生在控制的環境中，體驗反射和鏡像的物理及數學效應。當他們經過實驗、推測與證實的過程之後，他們將有更佳的機會，去發現與吸收這些決定反射與鏡像效應的原則。

教師可利用電腦與電腦螢幕所顯示的圖形，來提供整潔且可重複的實驗狀況。這樣的實驗方式，可以避免一些複雜因素的干擾，諸如因身手不夠靈巧而產生的實驗失誤（撞球不正而使球產生旋轉以致反射方向有所偏差），或由不正確的結果及繪圖而導致的偏離測量等等。譬如說，學生可以在電腦螢幕上把一個球（光點）瞄準牆上的一點擊出，而觀察此球的反射軌跡。他們可利用直尺與量角器測量距離與角度。他們也可以把不同位置的球，擊在牆上不同的點，而比較其結果。

下面，我們將舉出一系列可藉電腦實驗的問題。這些問題含蓋了，設計情況導引學生發展出對反射與鏡像效應的基本原則的理解，以及設計情況使學生應用這些基本原則。

這些問題的解釋與圖示，都由電腦螢幕顯示表達，使這一系列的問題呈現了電腦輔助教學的模式（CAI module）。在學生解決這一系列問題的過程中，我們也叫他們使用鏡子、直尺、紙條、量角器等工具作實驗與測量。

下面，我們由一個求極值的問題（optimization problem）開始討論。

問題 1.

要在一河岸建一抽水站，輸水到 A 城與 B 城，如圖 1-1 所示。問應建在河岸上的那一點，才能使輸水管的總長為最短？

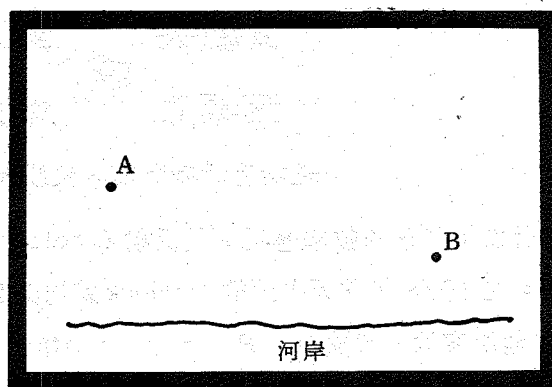


圖 1-1

電腦螢幕會照既定的程式，提出問題與如上的圖示。學生可在河岸上選一點，也許利用光筆（light pen）輕觸電腦螢幕即可。螢幕會立即顯示出此點與 A 、 B 兩點的聯線。學生可在紙條的邊緣畫記，誌出該路線的各段長及總長，再用直尺量出其長度（量到最接近的公厘數）。把此長度輸入電腦，電腦會按程式安排好的指令，檢查測量是否

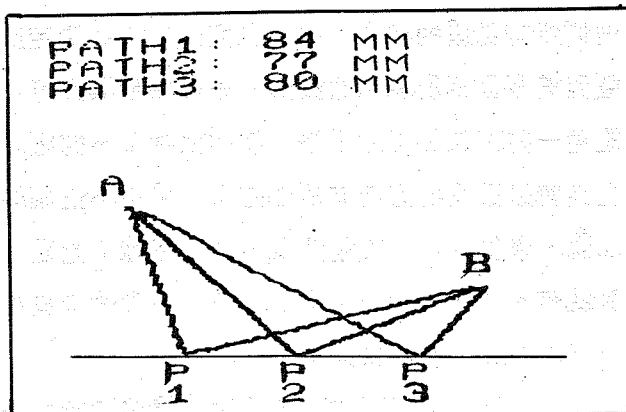


圖 1-2

有誤差（程式中可預設可容許的最大測量誤差，譬如說 2 公厘）。當電腦認可學生測量的數據後，學生可在螢幕上的河岸選第二點，然後重複上述的測量過程。

學生在螢幕的河岸上選了第三點，且重複上述的過程之後，電腦螢幕所顯現的畫面如圖 1-2 所示。而學生所使用的紙條，則如圖 1-3 所示。

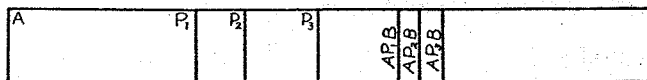


圖 1-3

在這個時候，電腦或許會承認學生已經得到了最短的路徑，如果學生在這三次的嘗試中，未取得最短路徑，則電腦此時就會顯示出最短路徑，如圖 1-4 所示。

然後，電腦螢幕上的圖示會照既定的程式，改變 A 點與 B 點的位置，讓學生再試作一次。

經過幾次類似問題的練習後，學生將會發現，如果 A 點和 B 點到河岸等距離，則抽水站 P 點應該選擇在和 A 點及 B 點等距離的位置。事實上， P 點的位置就在 A 點和 B 點向河岸所作垂線的垂足間的中點。但是，如果 A 點和 B 點到河岸不等距離時，則 P 點的位置就比較接近河岸較近的那點。（圖 1-5）

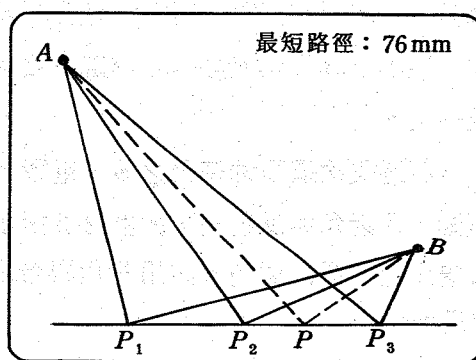


圖 1-4

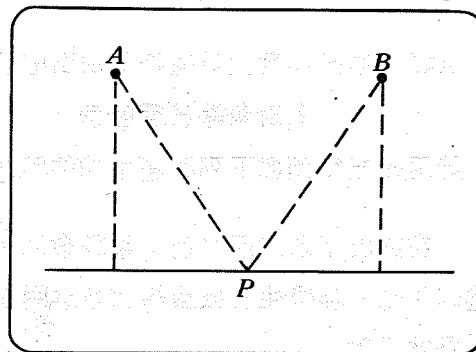


圖 1-5

雖然不同狀況的圖示中，角度却不很一樣，但只要到兩點所畫的路徑和河岸所夾的角度相等，則不管 A 、 B 兩點的位置如何， P 點就是最理想的位置。即使是像圖 1-6 那樣的簡圖，學生也能體會到這兩個角度是相等的。

下面的三個問題，將會幫助學生發展出有效的方法，來尋找最佳的路徑。

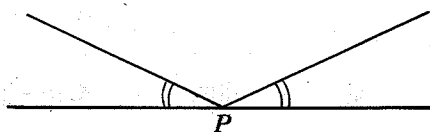


圖 1-6

問題 2.

如圖 2-1 所示，從 B 點把一個不帶旋轉的球滾向牆 1 的 P 點，球撞到牆 1 後，彈向牆 2，問球會撞到牆 2 的那個位置（譯者註：國內撞球界的術語稱為一顆星的問題）？

學生把猜測的答案輸入電腦，電腦立即畫出學生所猜測的路徑，然後再把球的正確路徑畫出來，如圖 2-2 所示。接著，電腦按既定的程式，顯現出 B 點與 P 點的新位置，讓學生再試做一次。

經過幾次這類的練習之後，電腦會顯現路徑圖，入射角與反射角，如圖 2-3 所示，並要求學生比較這兩個角。請用量角器量出入射角和反射角。

當學生把幾個不同位置的正確測量數據輸入電腦後，電腦會歸納如下：

很好，你已經發現球撞牆而彈出的規律：

入射角等於反射角

請用此規律預測下列問題中球的路徑。

在提出下類問題之前，電腦會回到類似上述的問題，讓學生有機會練習並應用這個最新發現的規律。

問題 3.

假設一房間內的一面牆是一面鏡子。你站在屋內 S 點的位置，在 O 點放置了一個物體，如圖 3-1 所示。如果你要在鏡中看到此物體的影像，則你應該朝那個方向看呢？

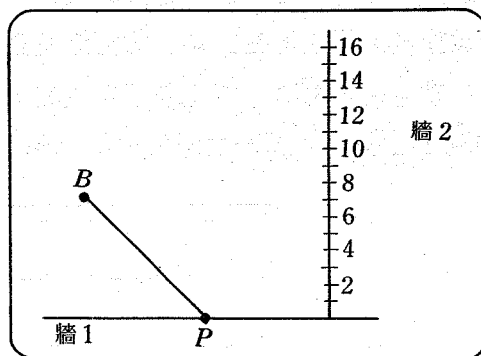


圖 2-1

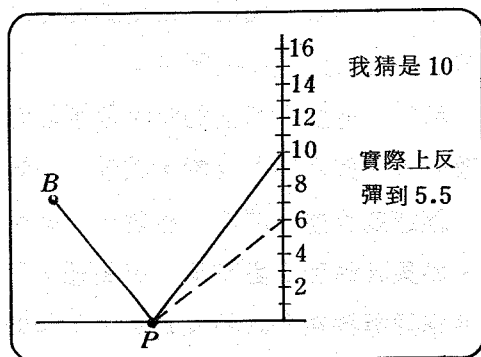


圖 2-2

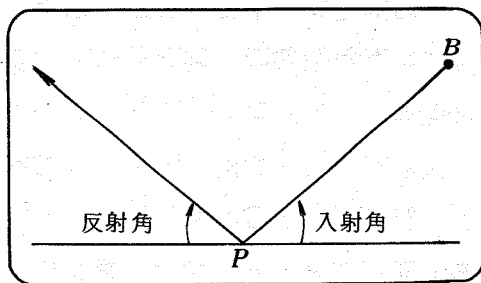


圖 2-3

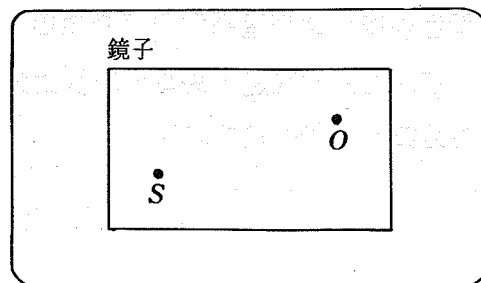


圖 3-1

注意到，在此電腦與學生之間再度產生了**交互作用**，即學生猜測，輸入答案，電腦評估，然後反應出來。如果學生經過三次的猜測，還沒有找到正確的方向位置，電腦會在螢幕上顯現出看向鏡子的正確途徑。然後再改變 S 點與 O 點的位置，讓學生再試試看。經過幾次類似問題的練習後，學生將會了解，看向 O 點對鏡面所作垂線的垂足，是不正確的方向。在教室內設置一面鏡子讓學生實驗，將有助於學生驗證電腦所繪的路徑。

經過這些實驗修正的過程後，電腦螢幕會照既定的程式指令，顯示出需要用來解釋路徑方向的一般性原則如下：

一個物體映射在一面鏡子上的像距，與物距相等，只是在鏡後（內）罷了。舉例來說，如圖3-2所示，在 O 點的物體，其映像是在 O' 點的位置上。

注意！ $\overline{OO'}$ 是和鏡面垂直的。

因此，若要看到物體在鏡內的映像，你就應該朝 O' 點的方向看，如圖3-3所示。

歸納：要找到 O 點在鏡內的映像 O' 點，只要從 O 點向鏡內作

垂線，在其延長線上取 O' 點，使 O' 點與鏡面的距離等於 O 點與鏡面的距離，連接 $\overline{SO'}$ ，這就是我們要找的正確方向。

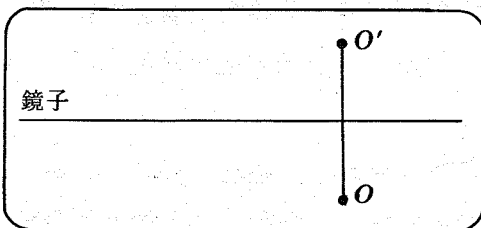


圖 3-2

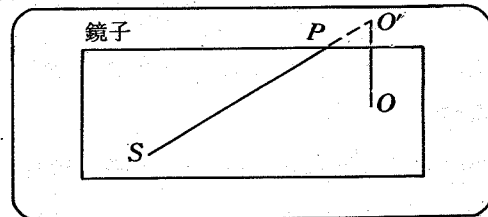


圖 3-3

現在，請試試看圖3-4的情形：

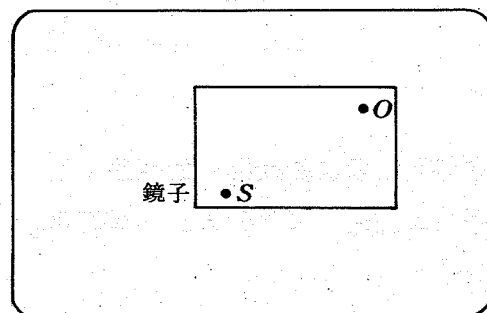


圖 3-4

學生猜測後，輸入電腦，電腦反應，呈現 O 點在鏡內的映像 O' 點，然後繪出 $\overline{SO'}$ 這條路徑，如圖 3-5 所示。

一旦學生對鏡像問題都能成功地解決之後，下一步驟就是要他們把鏡像問題，和球撞牆反彈的現象關連起來。

讓我們再看一次入射角和反射角相等的圖示。如果沒有牆，球將會沿著直線路徑到達 A' 點，如圖 3-6 所示。但因撞牆而反彈到了 A 點。

這個現象與鏡像問題的情形是相似的。如果牆是一面鏡子，而我們在球的起點位置 O ，若我們要在鏡內看到 A 點的映像，就得朝 A' 點的方向看。所以，我們用來解決鏡像問題的技巧，同樣可以用來解決球撞牆而反彈的問題。

我們把圖 3-7 的牆 1 當作一面鏡子，將牆 2 上的數線的映像也畫出來。如此，球的直線路徑就能告訴我們，球將反彈到牆 2 上座標為 4 的那點。如果學生測量圖 3-7 中作了記號的角，就知道他們都是相等的。

現在，我們要求學生做一些連繫的工作。電腦螢幕將顯示類似於問題 1 的問題，亦即連接兩城市到水源的最短的可能輸水路線，如圖 3-8 所示。

你能利用解決鏡像問題的想法，找到從 A 點到河岸再到 B 點的最短路徑嗎？

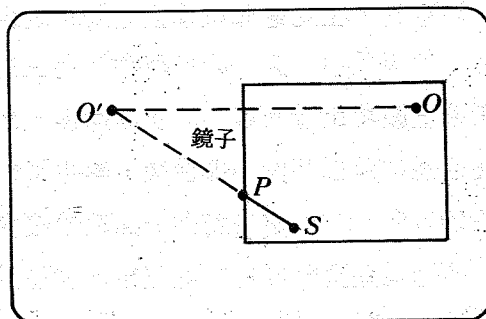


圖 3-5

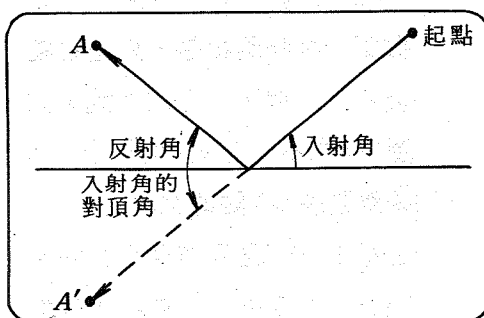


圖 3-6

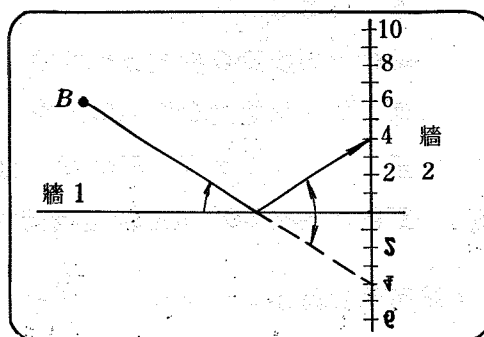


圖 3-7

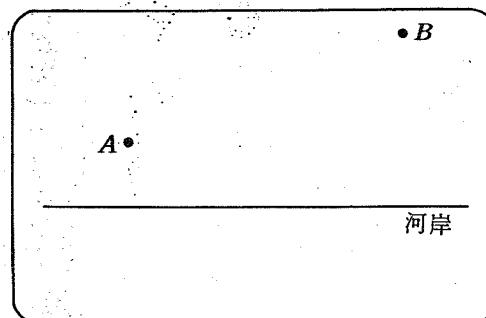


圖 3-8

電腦會讓學生嘗試好幾次，每次變動 A 與 B 的位置，而且在適當的時候，給學生一些暗示與輔助，直到學生明瞭 A 點或 B 點在河岸的反射概念為止，如圖 3-9 所示。

在球類運動的應用上，有很多機會可以利用到這些想法。下面的簡單例子其一與撞球有關，另一個則與高爾夫球有關。

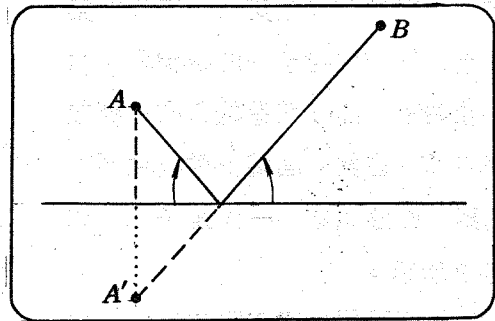


圖 3-9

問題 4.

你的球在 A 點，而對手的球在 B 點，如圖 4 所示。你想把你的球擊到最遠的牆上，然後反彈而撞開對手的球，問你應瞄準最遠的牆上的那個位置（假設球不帶旋轉）

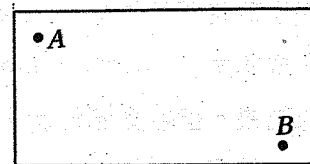


圖 4

？

問題 5.

你玩迷你高爾夫球時，呈現如圖 5-1 所示的情況，即你的球在 A 點，而洞在 H 點。問你應瞄準那裡擊球，才能一桿進洞？

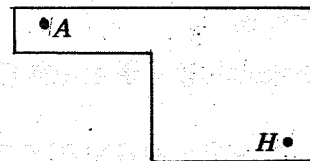


圖 5-1

當一個學生已經完全了解球撞牆反彈的路線，與鏡子的反射原理是一致的這種關係之後，他應該可以給予更複雜的應用問題。譬如說，球撞到一面牆反彈出來後，再撞到第二面牆再反彈的路徑問題（譯者註：國內撞球的術語為二顆星問題）。學生可以先做路線的預測，然後實做加以驗證。

在圖 5-2 中，假設學生玩迷你高爾夫球而陷入如圖 5-2 的困境，球在 B 點而洞在 O 點。若他想一桿進洞，則他得解決二顆星的問題，即他應設計球先撞到牆 1，反彈去撞牆 2，再反彈進洞。

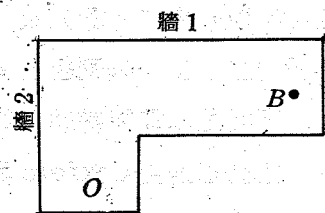


圖 5-2

這個問題的焦點在於瞄準牆 1 的那個位置把球擊出，這樣球在兩次反彈後才能進洞。讓我們畫出此球所走的路徑。當球由第一面牆上反彈出來，而朝第二面牆前進時，它的

方向應該瞄準洞 O 在第二面牆（把第二面牆當作一面鏡子）的鏡像 O' 。因此，球朝第一面牆前進的方向，應該是瞄準 O' 在第一面牆上的鏡像 O'' （把第一面牆也當作一面鏡子），如圖5-3所示。

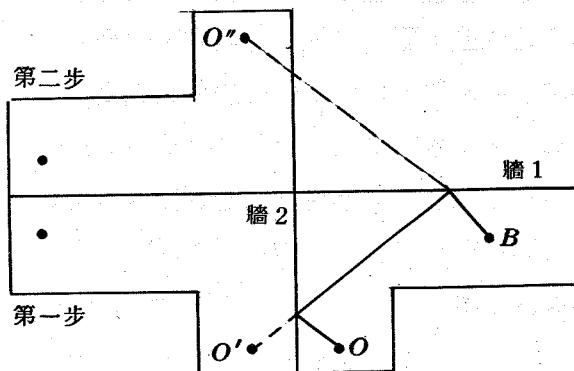


圖 5-3

如果採用學生與電腦交互作用式的數學模式（Interactive instruction module），則電腦提出問題之後（只畫出球與洞的位置），由學生自行決定球該瞄準那個方向擊出。如果採用的是教導式的教學模式（tutorial module），則連續的反射的圖示都得出現，以便學生了解其最後的結果。但在實際的教學中，也可以只出現球的全部路線，再另選擇球與洞的位置，給學生練習。

撞球運動中的三顆星問題，是更複雜的應用：球 B 必須撞牆反彈三次，最後擊中在 C 點的另一球，如圖5-4所示。譬如說，球 B 要依次撞牆 WZ 、 ZY 與 WX 而反彈。你應該瞄準那裡？

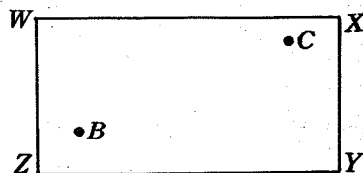


圖 5-4

撞球運動中的三顆星問題，是更複雜的應用：球 B 必須撞牆反彈三次，最後擊中在 C 點的另一球，如圖5-4所示。譬如說，球 B 要依次撞牆 WZ 、 ZY 與 WX 而反彈。你應該瞄準那裡？

要解決此問題，學生應該把球 C 按上述三面牆的相反順序反射，如圖5-5所示。

第一步：把 C 對 WX 反射而得 C' 。

第二步：把 C' 對 ZY 反射而得 C'' 。

第三步：把 C'' 對 WZ 的延長線反射而得 C''' 。

其實，在 B 的球要經過三顆星的过程，擊中在 C 點的球的解答，不只上述的方法，還有其他的方法。譬如說，先撞 WX ，再撞 ZY ，再由 ZY 反彈到 C 也可以。但並不是對任何三面牆的排列組合，三顆星的問題都可解。

下面是本電腦輔助教學課程套用程式中，所包含的另外兩種不同型態的反射應用問題，他們都是由Coxford與Usiskin所著的Geometry：A Transformational Approach（River Forest, Ill. U. S. A. Laidlaw Bro., Publishers, 1971）一書中取出來的。

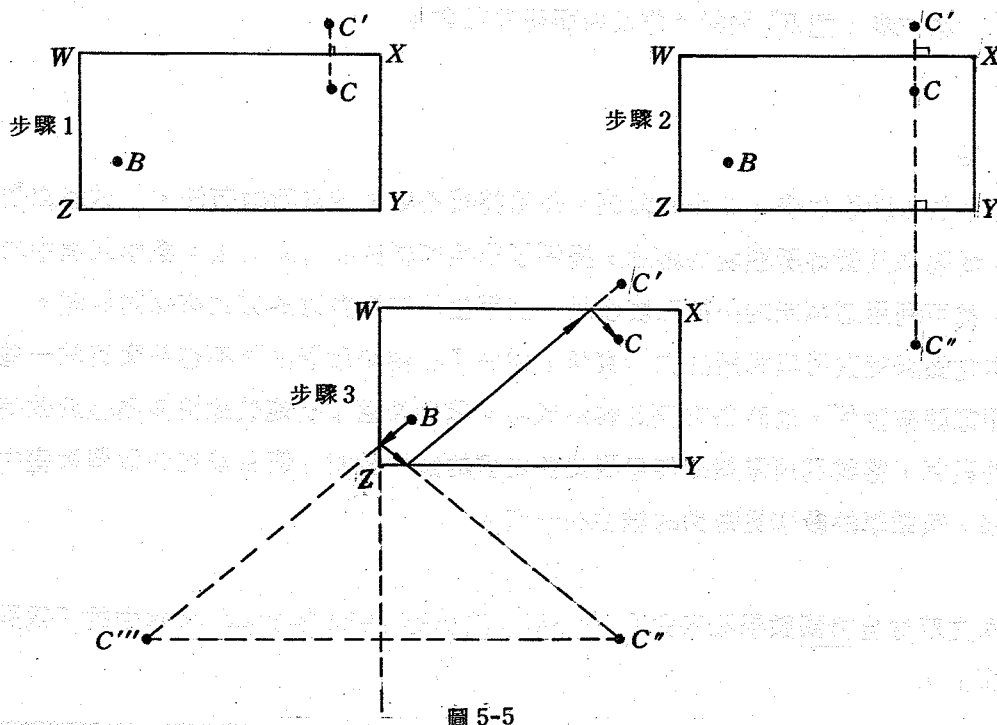


圖 5-5

如圖5-6所示，在A點的一個電子，要經過兩條直線 ℓ 與 m 的反射到達B點。請找出此電子的路徑。

第一步：把B點對直線 m 作反射得 B' 點。

第二步：把 B' 點對直線 ℓ 作反射得 B'' 點。

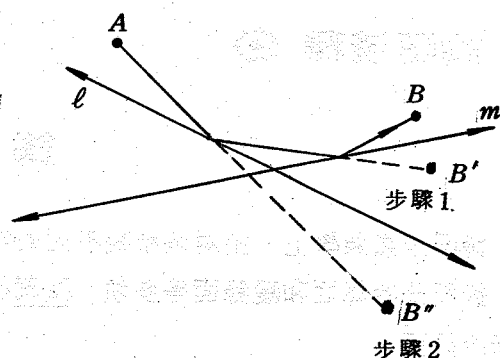


圖 5-6

在圖5-7中，由A點發出的光線要直線 p 作兩次反射，對直線 q 作一次反射，而到達B點。請畫出此光線所要走的路徑。

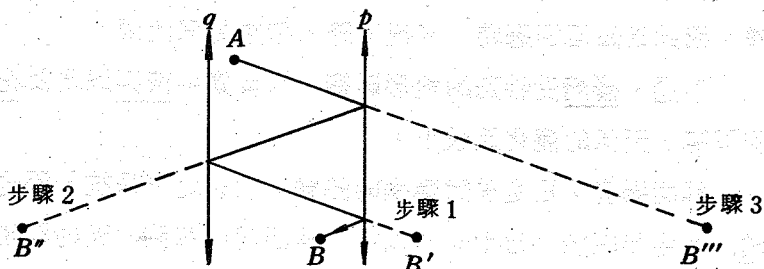


圖 5-7

第一步：把B點對 p 作反射而得 B' 點。

第二步：把 B' 點對 q 作反射而得 B'' 點。

第三步：把 B'' 點對 p 作反射而得 B''' 點。

結 論

熱心於幫助學生學習數學的教師，必須持續不斷地尋求新的方法，來改進數學的教學法。電腦與其螢幕所顯現的圖示，提供了學生學習數學的新方法。數學課程中的許多教材，都可利用這個新的科技工藝產品，使學生用模擬實驗的方式來探討問題。

本電腦課程套用程式所提供的實例，說明了在傳統教學法下不容易突破的一些教材，利用電腦來教學，也許很方便且容易成功。我們希望本文能鼓勵更多熱心於改進數學教學的教師，嘗試利用電腦來作呈現更多更廣的數學教材，使目前在各數學教室中設置的電腦，與數學的教學更密切的結合在一起。

本文取材自美國數學教育會（NCTM）出版的1984年 year book 中的「電腦與數學教育」。

◎ 詞語淺釋 ◎

鋒 面

鋒面是氣象學上，指兩個冷暖不同的空氣團遭遇後，中間形成的不連續帶。

鋒面分冷鋒面和暖鋒面等多種。臺灣從來沒有出現過暖鋒面，天氣預報中說的鋒面，都是指冷鋒面。

所謂冷鋒面，就是以冷空氣為主，取代暖空氣的接觸面，如同一杯冰水，杯外形成的水霧。因此當鋒面通過時，氣溫下降，帶來局部性雨。

不過，臺灣受特殊的地形影響，雨量集中苗栗以北及花蓮以北地區；臺中以南受中央山脈屏障，天氣的變化比較小。

鋒面過境，正是季節轉換的訊號，意味北方系統，逼走在夏日籠罩的副熱帶高氣壓。臺灣的冬半年開始，自十一月以後，鋒面將以四到六天的頻密週期一波波掃過。

編輯室