高一基礎數學中

"線性規劃"補充教材

陳獻平

臺灣省立嘉義高級中學

一、前　　言

在高一基礎數學課程裡，線性規劃部份，同學們都甚感興趣，課文說明清楚，圖解清晰，易懂易學。但有些地方同學們希望更深入的了解，對於資賦優異學生提出的問題，如變數增加爲二元以上時如何處理，以及同學們一些共同的疑惑，譬如要判別一個半平面區域的正、或負，爲什麼可以用此區域的一個點代入檢驗即可，一個封閉的凸多邊形區域裡目標函數的最佳解爲何發生於頂點，非線性問題又如何求最佳解等等，課文中已有的觀念不再重述。

本文中將說明如何判別同號區、異號區，以及在封閉凸多角形區域中線性目標函數其最佳解爲何發生於頂點之說明，利用線性規劃處理非線性規劃之最佳解的一些例子，舉例說明不用單體法處理三個變數線性規劃問題的方法。

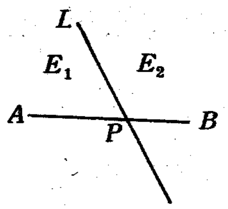
二、本　　文

(I) 下面這個性質將可說明爲何要判別一個半平面區域的正、負號可用此區域中的一個點代入檢驗。

性質 1.：設 $f(x, y) = ax + by + c$，$a^2 + b^2 \neq 0$，$f(x, y) = 0$ 表示直線 L，L 將坐標平面 E 分割爲二個半平面 E_1，E_2，即 $E = E_1 \cup L \cup E_2$，設 $A(x_1,$

$y_1) \in E_1$ ，$B(x_2, y_2) \in E_2$ ，則 $f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$ 。

證明：設 $\overline{AB}$ 交 L 於 $P(x_0, y_0)$ 有向比 $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = r$ ，$r > 0$



則 $x_0 = \dfrac{x_1 + r x_2}{1+r}$

$y_0 = \dfrac{y_1 + r y_2}{1+r}$ 　代入 $ax + by + c = 0$

$\Rightarrow \quad a x_0 + b y_0 + c = a\left(\dfrac{x_1 + r x_2}{1+r}\right) + b\left(\dfrac{y_1 + r y_2}{1+r}\right) + c$

$\Rightarrow \quad a(x_1 + r x_2) + b(y_1 + r y_2) + c(1+r)$

$\Rightarrow \quad r = -\dfrac{a x_1 + b y_1 + c}{a x_2 + b y_2 + c} = -\dfrac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)} > 0$

$\Rightarrow \quad f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$

同時，若 $C(x_3, y_3) \in E_1$ 則 $f(x_3, y_3) \cdot f(x_2, y_2) < 0$

故 $f(x_1, y_1) \cdot f(x_3, y_3) > 0$

這說明了如果 A ，C 在 L 之同側，則 A ，C 之函數 $f(x, y)$ 值爲同號，即同側之點爲同號區，反側之點爲異號區。即爲什麼要判斷某個由直線所分割的區域的正或負，可用此區域的一個點代入檢驗即可的原因。

例1. 圖解不等式 $(x+y+1)(x+y)(x+y-1)(x-y+1)(x-y)(x-y-1) \geqq 0$

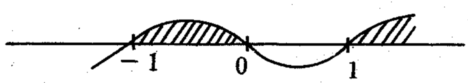
解：原不等式可分爲(1)　$(x+y+1)(x+y)(x+y-1) \geqq 0$ 且

$(x-y+1)(x-y)(x-y-1) \geqq 0$

或　(2)　$(x+y+1)(x+y)(x+y-1) \leqq 0$ 且

$(x-y+1)(x-y)(x-y-1) \leqq 0$

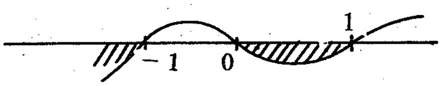
對於(1)之解爲



$(-1 \leqq x+y \leqq 0$ 或 $1 \leqq x+y)$

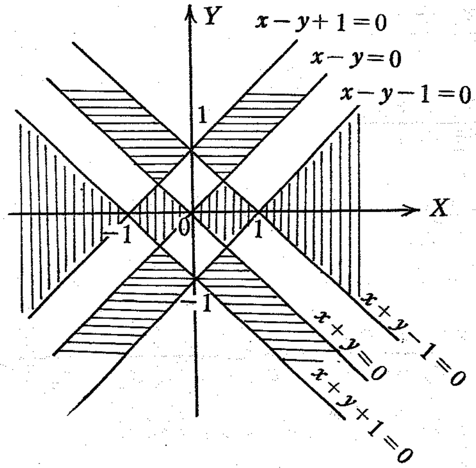
且 $(-1 \leqq x-y \leqq 0$ 或 $1 \leqq x-y)$

對於(2)之解爲



$$(x+y\leq -1 \text{ 或 } 0\leq x+y\leq 1)$$
$$\text{且} (x-y\leq -1 \text{ 或 } 0\leq x-y\leq 1)$$

由性質 1. 可得圖形爲如下之斜線區域



類似的，我們可得

(1) $(|x+1|+|y|-1)(|x-2|+|y|-2)(|x-3|+|y|-3)\cdots\cdots$
$(|x-n|+|y|-n)\leqq 0$ 之圖形面積爲 $n (n+1)$ ，$n\in N$

(2) $(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\dfrac{1}{2})(|x|+|y|-\dfrac{1}{4})\cdots\cdots$

$(|x|+|y|-\dfrac{1}{2^{n-1}})\leq 0$ 之圖形面積爲 S_n ，則 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{8}{5}$

上述之性質 1 ，對於空間的分割也是成立的，即

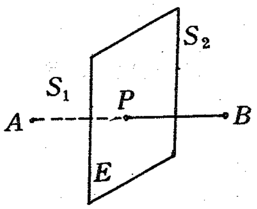
性質 2.：設 $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$ ，$a^2+b^2+c^2\neq 0$ ，$f(x,y,z)=0$ 表示空間之一平面 E ，則 E 把空間 S 分割成二個半空間 S_1 ，S_2 ，

即　$S=S_1\cup E\cup S_2$

設　$A(x_1,y_1,z_1)\in S_1$ ，

$B(x_2,y_2,z_2)\in S_2$ ，

則　$f(x_1,y_1,z_1)\cdot f(x_2,y_2,z_2)<0$

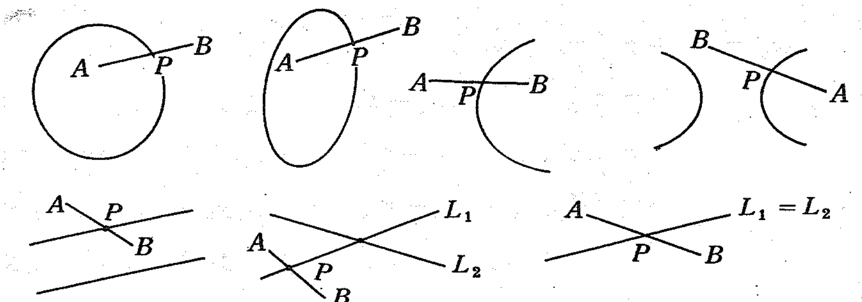


證明：仿性質 1 ，同法可證

對於平面之二次曲線亦有類似的性質：

性質 3.：設 $G(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 把平面分割爲二部份，如果 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 不在曲線 $G(x, y) = 0$ 上面，而分別在二部份（即不同的側），則 $\overline{AB}$ 恰交 $G(x, y) = 0$ 於一點時
$f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$

證明：$G(x, y) = 0$ 之圖形可能爲



（不考慮退化成一點或 ϕ）

設有向比 $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = r$ （$0 < r < 1$）　　設 P 爲 (x_0, y_0)

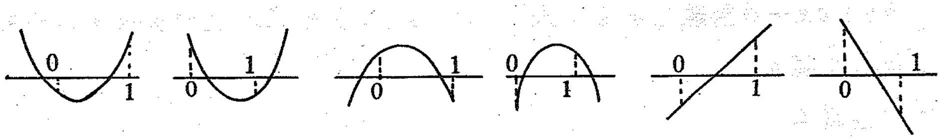
則 $\begin{cases} x_0 = x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y_0 = y_1 + r(y_2 - y_1) \end{cases}$　　代入 $G(x, y) = 0$

$$\Rightarrow a[x_1 + r(x_2 - x_1)]^2 + b[x_1 + r(x_2 - x_1)][y_1 + r(y_2 - y_1)] + c[y_1 + r(y_2 - y_1)]^2 + d[x_1 + r(x_2 - x_1)] + e[y_1 + r(y_2 - y_1)] + f = 0$$

上述左邊爲 r 的函數（二次或一次，但不可能爲零次，否則 $f(x_1, y_1) = 0$）

設 $y = F(r) = a[x_1 + r(x_2 - x_1)]^2 + b[x_1 + r(x_2 - x_1)] \cdot [y_1 + r(y_2 - y_1)] + c[y_1 + r(y_2 - y_1)]^2 + d[x_1 + r(x_2 - x_1)] + e[y_1 + r(y_2 - y_1)] + f$

則 $F(r) = 0$ 在 $(0, 1)$ 間恰有一根，如下圖所表示



故 $F(0)F(1) < 0$，即 $f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$

(II) 下面我們說明最佳解的求法：

性質4.：設 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$A \neq B$，$f(x, y) = ax + by + c$ 爲線性函數，則在 $\overline{AB}$ 上任取一點 $P(x_0, y_0)$ 時 $f(x_0, y_0)$ 之最大及最小值必發生於 $\overline{AB}$ 之端點。

證明：設 $P(x_0, y_0) \in \overline{AB}$，有向比 $r = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}$　$0 \leq r \leq 1$

則 $\begin{cases} x_0 = x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y_0 = y_1 + r(y_2 - y_1) \end{cases}$　代入 $f(x, y)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ f(x_0, y_0) &= a[x_1 + r(x_2 - x_1) + b[y_1 + r(y_2 - y_1)] + c \\ &= ax_1 + by_1 + c + r[ax_2 + by_2 + c - (ax_1 + by_1 + c)] \\ &= f(x_1, y_1) + r[f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)] \\ &= f(x_1, y_1) - r[f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)]\end{aligned}$$

① 若 $f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$，

則 $f(x_2, y_2) \leqq f(x_0, y_0) \leqq f(x_1, y_1)$

即 $r = 0$，$(P = A)$ 時，$f(x_0, y_0)$ 有最大值 $f(x_1, y_1)$

$r = 1$，$(P = B)$ 時，$f(x_0, y_0)$ 有最小值 $f(x_2, y_2)$

② 若 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$

則 $f(x_1, y_1) \leqq f(x_0, y_0) \leqq f(x_2, y_2)$

即 $r = 1$，$(P = B)$ 時，$f(x_0, y_0)$ 有最大值 $f(x_2, y_2)$

$r = 0$，$(P = A)$ 時，$f(x_0, y_0)$ 有最小值 $f(x_1, y_1)$

③ 若 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$，

則 $f(x_0, y_0)$ 在 $0 \leq r \leq 1$ 時爲常數 $f(x_1, y_1)$

即最大、最小值一致

故綜上所述 $f(x, y) = ax + by + c$ 在 $\overline{AB}$ 之端點取值最大及最小。

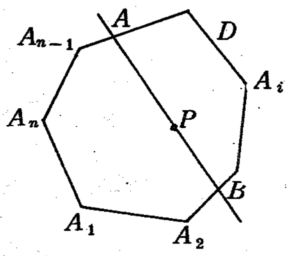
性質4 對於空間亦成立，即

性質5.：設 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，$A \neq B$，$f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ 爲線性函數，則 $f(x, y, z)$ 在 $\overline{AB}$ 上取值時，以端點爲最大及最小值。

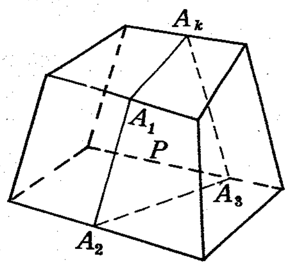
證明：仿性質4

現在我們可利用性質4.及性質5.，來說明平面上及空間中由封閉的凸多邊（角）形區域中，取值時，線性函數f之最佳解爲何發生於頂點（端點）。

(1) 平面情形：若D是一個有界的凸n邊形$A_1A_2\cdots\cdots A_n$區域，對於D中任一點P，過P之任一直線L必交D於邊上二點A、B，而f必在$\overline{AB}$之端點才有可能發生最大、最小（由性質4.），但對A、B所在之一邊上而言，A、B又不會是f之最大或最小值（除非A、B爲D之頂點或f之最大、最小發生於整個D之一邊的線段上）因對於過P之任意直線都是如此之情況，是故，我們只要比較f對這些有限個頂點A_1，A_2，$\cdots\cdots$，A_n之函數值，就可判斷何者爲最佳解。



(2) 空間的情形：若D是有界凸多角形區域，P是D內之一點，過P之任一平面必交集D成一多邊形$A_1A_2\cdots\cdots A_k$之區域，而f之最大最小值由前述平面之情形，知可能發生於$A_1A_2\cdots\cdots A_k$之頂點上，而這些頂點A_1，$\cdots\cdots A_k$又在D之稜上，由性質5.知，再比較D之頂點就可判別何者爲f之最佳解。



下面舉些例子，來說明上述性質1～5之應用：

例2. 設D：$\begin{cases} 3x-2y+5\geq 0 \\ 2x+3y-14\geq 0 \\ 5x+2y-29\leq 0 \end{cases}$

（x，y）爲滿足D之點，求下列各函數之最大、最小值。

(1) $x-2y$　(2) x^2+y^2　(3) $\dfrac{y}{x}$　(4) $\dfrac{2x+y-1}{x-y+4}$

(5) $\dfrac{y}{x^2}$　(6) $\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x^2}{y}$　(7) xy

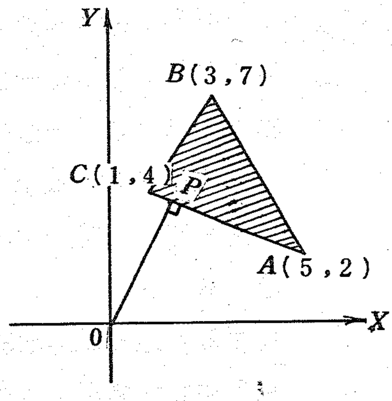
解：D之解爲$\triangle ABC$之區域（含邊界）

(1) 比較A、B、C之座標，$x-2y$有最大值1，最小值-11。

以下是非線性函數：

(2) x^2+y^2 表 D 中一點 (x, y) 到原點距離之平方，其最遠為 B 點，即 x^2+y^2 之最大值為 58，最小值為 0 至 $\overline{AC}$ 之距離平方，且頂 0 至 $\overleftrightarrow{AC}$ 之垂足在 $\overline{AC}$ 上，P 之座標為 $(\frac{28}{13}, \frac{42}{13})$ 故 x^2+y^2 之最小值 $=$

$$(\frac{28}{13})^2+(\frac{42}{13})^2=\frac{196}{13}$$ 。



(3) 設 $\frac{y}{x}=m$，可看成 D 上任一點 $P(x, y)$ 到原點 0 之線段的斜率的範圍

即 $\frac{2}{5}\leq m\leq\frac{4}{1}$

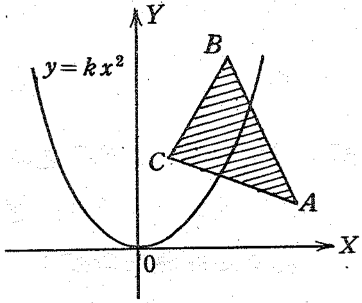
另外一個看法是 $y=mx$ 表示穿過 $\triangle ABC$ 區域之直線之條件必須 A、C 在直線 $mx-y=0$ 之反側或 A、C 本身在此線上，故 A、C 之座標的函數值 $f(x, y)=mx-y$ 必須異號，$(5m-2)(m-4)\leq 0$

即 $\frac{2}{5}\leq m\leq 4$

(4) 設 $k=\frac{2x+y-1}{x+y-2}$ 則 $(2x+y-1)-k(x+y-2)=0$ 表示過 $2x+y-1=0$ 與 $x+y-2=0$ 交點 $(-1, 3)$ 之直線系（但 $x+y-2=0$ 除外），因 (x, y) 在 D 上取值。這時 A、B 必在直線 $(2x+y-1)-k(x+y-2)=0$ 之反側或 A、B 在此線上，是故 $(12-8k)(11-5k)\leq 0$

即 $\frac{3}{2}\leq k\leq\frac{11}{5}$

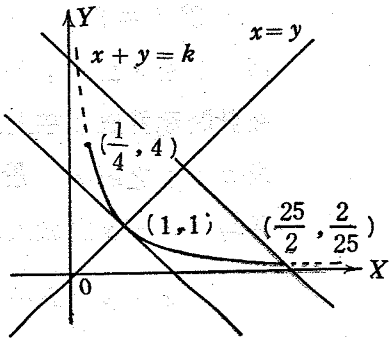
(5) 令 $\frac{y}{x^2}=k$ 即 $y=kx^2$，則視 $y=kx^2$ 為穿過 $\triangle ABC$ 區域之拋物線族，其條件為 A、C 必在此拋物線之反側或 A、C 在此拋物線上，即 $(25k-2)(k-4)\leq 0$，即 $\frac{2}{25}\leq k\leq 4$，另一個觀點是由 $y=kx^2$ 之開口大小來決定 k 之大小，k 越大



開口越小，k 越小開口越大，亦可解相同答案。

〔註〕 若 B、C 之位置非如此，有時 k 之範圍還須用直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $y=kx^2$ 相切來決定 k 之範圍，而切點必須在 $\overline{BC}$ 上。

(6) 設 $X=\dfrac{y}{x^2}$，$Y=\dfrac{x^2}{y}$，由(5)知 $\dfrac{2}{25}\leq X\leq 4$，$\dfrac{1}{4}\leq Y\leq\dfrac{25}{2}$（$x>0$，$y>0$）且 (X,Y) 滿足 $XY=1$，而 $XY=1$ 這個曲線，同學們很容易由 X、Y 成反比以及描點法瞭解其形狀。

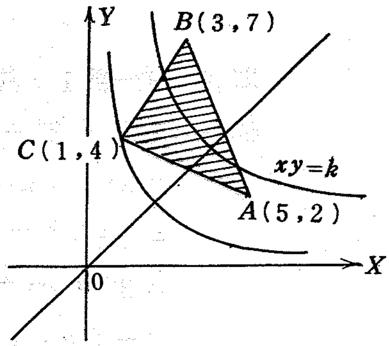


故原題目就成了在 D：$\begin{cases}\dfrac{2}{25}\leq X\leq 4\\ \dfrac{1}{4}\leq Y\leq\dfrac{25}{2}\\ XY=1\end{cases}$

之條件下，求 $X+Y=k$ 之最大、最小值

D 之區域為 $XY=1$ 之一段，由 $X+Y=k$ 之截距，可知 k 之最大值為 $\dfrac{25}{2}+\dfrac{2}{25}=\dfrac{629}{50}$，最小值為 2；最小值亦可由算術平均數不小於幾何平均數得之。即

$$\frac{y}{x^2}+\frac{x^2}{y}\geq 2$$



(7) 設 $xy=k$，由於 k 越大，圖形越遠離原點，k 之最大值發生於 (x, y) 在線段 $\overline{AB}$ 上取值，尚不能斷定是否發生於 B 或 A。

$$\overline{AB}=\{(x, \frac{29-5x}{2})\mid 3\leqq x\leqq 5\}$$

$$\therefore\quad k=xy=x\cdot(\frac{29-5x}{2})=-\frac{5}{2}(x-\frac{29}{10})^2+\frac{841}{40}$$

$$\because\quad 3\leqq x\leqq 5$$

$\Rightarrow\quad k\leqq 21$，此時 $(x, y)=B=(3, 7)$

又 k 之最小值為 $k\geq 4$，此時 $(x, y)=C=(1, 4)$

例3. (1) 設 $a \geq 0$，$b \geq 0$，$a + b = 1$，求 $3^a + 3^b$ 之最大、最小值。

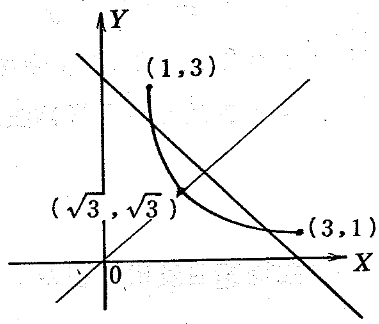
(2) 設 a_1，a_2，………，$a_n \geq 0$，$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = 1$，求 $3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_n}$ 之最大、最小值。

解：(1) 把問題轉化成與線性有關的問題

設 $x = 3^a$，$y = 3^b$，由於 $0 \leq a \leq 1$，$0 \leq b \leq 1$，$a + b = 1$

$\Rightarrow$ $3^0 \leq 3^a \leq 3^1$，$3^0 \leq 3^b \leq 3$，$3^{a+b} = 3^1$

即 $1 \leq x \leq 3$，$1 \leq y \leq 3$，$xy = 3$



故此問題就成了在上式條件下，求 $x + y$ 之最大、最小值。

易得　$x + y$ 之最大值為 4，最佳解為 $(a, b) = (1, 0) \vee (0, 1)$

$x + y$ 之最小值為 $2\sqrt{3}$，即 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 時

(2) 在變數3個以上時甚難圖解，仿(1)，經由推測其最大值產生於

$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = (1, 0, 0, \cdots\cdots, 0) \vee (0, 1, 0, \cdots\cdots, 0) \vee \cdots\cdots (0, 0, \cdots\cdots, 0, 1)$

即其中有一為1，其他為0時。

證明：$(3^1 + 3^0 + \cdots\cdots + 3^0) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_n})$

$= 3^1 + (n-1) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_n})$

$= (3^{a_1 + \cdots\cdots + a_n} - 3^{a_n}) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-1}}) + (n-1)$

$= 3^{a_n}(3^{a_1 + \cdots\cdots + a_{n-1}} - 1) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-1}}) + (n-1)$

$\geqq (3^{a_1 + \cdots\cdots + a_{n-1}} - 1) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-1}}) + (n-1)$

　因 $3^{a_n} \geq 3^0 = 1$

$= 3^{a_{n-1}}(3^{a_1 + \cdots\cdots + a_{n-2}} - 1) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-2}}) + (n-2)$

$\geqq (3^{a_1 + \cdots\cdots + a_{n-2}} - 1) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-2}}) + (n-2)$

　因 $3^{a_{n-1}} \geq 3^0 = 1$

$= 3^{a_1 + \cdots\cdots + a_{n-2}} - (3^{a_1} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-3}}) + (n-3)$

$\geqq (3^{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-3}} - 1) - (3^{a_1} + \cdots\cdots + 3^{a_{n-3}}) + (n-4)$

因 $3^{a_{n-2}} \geq 3^0 = 1$

$\geq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\geqq 3^{a_1+a_2} - (3^{a_1} + 3^{a_2}) + \{n - (n-1)\}$

$= (3^{a_1} - 1)(3^{a_2} - 1) \geqq 0$

即　$(n+2) - (3^{a_1} + \cdots\cdots + 3^{a_n}) \geqq 0$

而各不等式中，等號分別成立於 $a_n = a_{n-1} = \cdots\cdots = a_3 = 0$，

$a_1 = 0 \vee a_2 = 0$

即　$a_n = \cdots\cdots = a_2 = 0$，$a_1 = 1 \vee a_n = \cdots\cdots = a_3 = a_1 = 0$，

$a_2 = 1$

同理可證 a_1，$\cdots\cdots$，a_n 中有一爲 1，其他值爲 0 時，

$3^{a_1} + \cdots\cdots + 3^{a_n}$ 取得最大値 $n+2$

最小値發生於 $a_1 = \cdots\cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$ 時

即　$3^{a_1} + \cdots\cdots + 3^{a_n} \geqq n\sqrt[n]{3^{a_1 + \cdots\cdots + a_n}} = n\sqrt[n]{3}$

事實上即算術平均數不小於幾何平均數之故。

類似的，我們可求得：

(1)　若 D：$x + 2y = 3$，$x \geq 0$，$y \geq 0$　　則 $6 \leq 2^x + 2^{y+1} \leq 10$

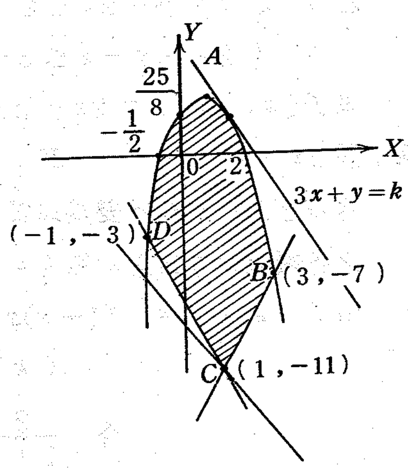
(2)　若 D：$x \geq 0$，$y \geq 0$，$x + y = 1$　　則 $3 \leq 4^x + 2^y \leq 5$

(3)　若 D：$x \geq 0$，$y \geq 0$，$2x + y = 1$　　則 $1 + \sqrt{2} \leq 2^x + 2^y \leq 3$

例 4.　如果可行解區域不是多邊形，而是混合型或非凸多邊形時，則目標線性函數的最佳解，就不一定發生於頂點，這時必須用截距，斜率或切線等觀念來解決。

設 D：$\begin{cases} y \leq -2x^2 + 3x + 2 \\ 2x - y - 13 = 0 \\ 4x + y + 7 \geq 0 \end{cases}$

求 $f(x, y) = 3x + y$ 之最小、最大値



解：利用前述性質 1. 及性質 3.，可描出 D 之圖形爲右圖之斜線區，即 $ABCD$ 及內部之閉區域，DBA 弧爲拋物線之一部份，k 之最大値發生於 $3x + y = k$ 與 $y = -2x^2 + 3x + 2$ 相切時，即

$-2x^2+3x+2=k-3x$　　　$2x^2-6x+k-2=0$

由判別式　$9-2(k-2)\geq 0$

$\Rightarrow$　$k\leq\dfrac{13}{2}$，等號成立於 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=2$　，　即切點 $\left(\dfrac{3}{2}，2\right)$

又　$\overline{CD}$ 之斜率為 -4，$3x+y=k$ 之斜率為 -3

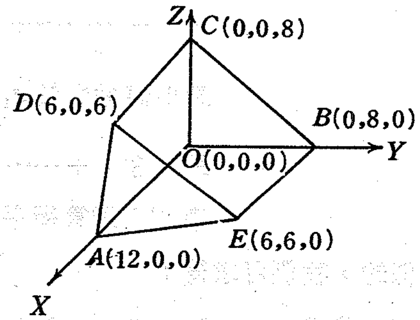
故　$3x+y$ 之最小值發生於 $C(1,-11)$ 時　，　即 $k\geq -8$

例 5. 對於空間中之線性規劃

$$\text{設}D:\begin{cases} x+y+z\leq 12 \\ x+3y+3z\leq 24 \\ 3x+6y+4z\leq 90 \end{cases}\qquad x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\geq 0$$

求 $f=2x+3y+z$ 之最大、最小值

解： 由任三個平面的交集及半空間之檢驗，可描出其圖形為如下之六角形 $OBCDAE$ 及內部區域，比較各頂點之座標之目標函數值，可知 $0\leq f\leq 30$



最大值產生於點 $E(6，6，0)$

最小值產生於點 $O(0，0，0)$

(Ⅲ) 由於三元或三元以上的變數的線性規劃，圖解法較困難。

下面舉一個三個變數的例子，使用替代變數的方法，轉化為二元的線性規劃。

例 6.

$$\text{設}D:\begin{cases} x+3y+4z\leqq 12\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+y-2z\leq 2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 2x-y+z\leq 3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}\qquad x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\geq 0$$

求 $f(x,y,z)=2x+3y+z$ 之最大值

解： 設 $2x+3y=X$，$z=Y$　（同學們較習慣於 $X-Y$ 座標系之符號）

將 D 之方程系全部變為以 X、Y 為變數之方程系，為使替換可行，必須在方程系之各端乘以適當之常數 k。

由①$+k$②　$\Rightarrow$　$(1+k)x+(3+k)y+(4-2k)z\leqq 12+2k\cdots\cdots\cdots ④$

$(k>0)$

令　$\dfrac{2}{1+k}=\dfrac{3}{3+k}$　$\Rightarrow$　$k=3$ 代入④

$\Rightarrow \quad 2x+3y-z \leqq 9$ ············⑤

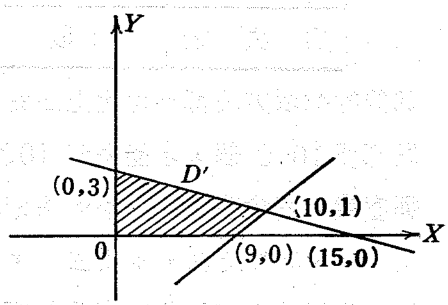
再由①$+k$③ $\Rightarrow \quad (1+2k)x+(3-k)y+(4+k)z \leq 12+3k$ ············⑥

令 $\dfrac{2}{1+2k}=\dfrac{3}{3-k} \Rightarrow k=\dfrac{3}{8}$ 代入⑥

$\Rightarrow \quad 2x+3y+5z \leq 15$ ············⑦

這時，目標函數 $f(x,y,z)=2x+3y+z=X+Y=G(X,Y)$

D變成了D'：$\begin{cases} X-Y \leqq 9 \\ X+5Y \leqq 15 \\ X \geq 0 \ , \ Y \geq 0 \end{cases}$



$\because \quad D \subset D'$

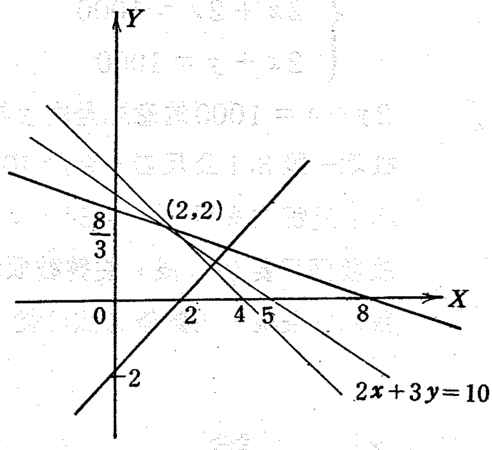
對D'而言$G(X,Y)$之最大值爲 11

最佳解爲 $(10,1)$

如果對$(X,Y)=(10,1)$能在D中找到對應解，則 11 也是$f(x,y,z)$之最佳值。

此時將 $2x+3y=10$ 及 $z=1$ 代入D之各方程系中，得下列方程組：

$\begin{cases} x+3y \leq 8 & \cdots\cdots ① \\ x+y \leq 4 & \cdots\cdots ② \\ 2x-y \leq 2 & \cdots\cdots ③ \\ 2x+3y=10 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$



由②+③ $\Rightarrow \quad x \leq 2$

由①−④ $\Rightarrow \quad -x \leq -2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 2$

$\therefore \quad x=2 \ , \ y=2$

而 $(2,2,1) \in D$

故f有最大值 11，最佳解爲 $(2,2,1)$

例 7. 假設由鐵工廠出品的鐵條，每支長 8 公尺，我們想用來做 1000 個鐵架，每個架子都由長 3.1 公尺、2.3 公尺及 1.7 公尺組合而成，問我們如何截鐵條，才能使剩料最少？

解：首先我們看到 $3.1 + 2.3 + 1.7 = 7.1$，則 $8 - 7.1 = 0.9$

即用一根鐵條做一鐵架，剩料是0.9公尺，這時，我們必須用1000根鐵條，如果我們把每根鐵條截成的結果，列表如下：

	3.1公尺	2.3公尺	1.7公尺	剩　料
方　法　(1)	0段	2段	2段	0　公尺
方　法　(2)	2段	0段	1段	0.1公尺
方　法　(3)	1段	2段	0段	0.3公尺

其他的截取方法都不會比上面更有效，但須知所要的3.1、2.3及1.7公尺的各段都要1000個，才能完成1000個符合規定的鐵架。

那麼我們就會想到用數學方法來計算上面(1)、(2)、(3)種截取方法的聯合運用。設(1)、(2)、(3)種方法分別用去了 x、y、z 根鐵條。

則可用下面之方程組來表示問題中之關係。

$$\begin{cases} 2y + z = 1000 \\ 2x + 2z = 1000 \\ 2x + y = 1000 \end{cases}$$

$2y + z = 1000$ 的意思是由 y 根鐵條每根截取2段的3.1公尺長，z 根中每根只截取一段3.1公尺者，合計1000段。

解上述聯立式得　$x = 300$　，$y = 400$　，$z = 200$

故我們只要900根，便夠截取成我們所需要的材料。

我們可發現，用數學方法可從1000根鐵條中節省100根。

三、結　　論

(1)　線性規劃是近代興起的一門學科，在工商發達的今日，用數學方法處理，以提高生產效率，決定投資的最佳策略等研究益形重要。故有必要在高一基礎數學中詳加解說，培養正確觀念，造就明日的管理科學人才。

(2)　在例6.中所用的方法，雖然可解三變數的線性規劃問題，多變數的規劃，理論上亦可逐次替換變數以減少變數的個數，使同學們能在熟悉的直角座標平面上直觀的解決問題，但做法繁瑣。

解決線性規劃問題的方法還是用單體法等較有系統。單體法事實上亦是利用座標軸截距的消長，轉化成一種數學的計算格式，在高一基礎數學課本中以很多例子說明整數規劃的問題，如能以單體法求得最佳解，而用切割平面（ cutting plane ）的方法，求出最佳整數解較有系統，也可解決多變數的問題。個人認為在高二選修教材中，值得補充介紹。

⊙ 詞語淺釋 ⊙

雷　　射

「雷射」 laser 是音譯，原文是以誘發輻射強化光束的光源的縮寫字。

將某種物質放入兩邊有高壓電極的玻璃管內。通電後，物質吸收電能，由基態提高能階變成激發態。激發態不穩定，會從高能階降為低能階，步驟有二：一是自動放光，即「自發輻射」；另一是「誘發輻射」，就是雷射光。

雷射光的特性是強度高，成束狀，有高度「平行性」，故被用做遙測、遙控和通訊的工具；且可經由透鏡或反射鏡聚成微少而能量密度極高的光點，可用來做精密的切割、焊接、打孔和熱處理工作。最早只用在工業和軍事上，近兩年來也用在醫療上。

雷射光因誘發的物質不同，分為固體雷射、氣體雷射和化學雷射。雷射的光譜含紅外線、紫外線和可見光，視誘發物質而定含量。

雷射唱片

雷射唱片，是用雷射光照射，不必接觸，就能將聲音重現的一種新式唱片。它將連續變化的音波切成許多小段，目前是每秒四萬四千一百段；再將切細的波形依音量的大小，以十六個 0 或 1 的數位訊號來紀錄，故又稱數位唱片（ digital disk ）。

然後將那些數位訊號以凹凸的坑列記錄在唱片上。雷射光照射時，無坑的地方會將雷射光反射回去，有坑的地方則會產生繞射，而使光度減弱。將這些強弱不同的雷射光轉變成強弱變化的電流，再將此電流排成連續的波形，就可使聲音重現。

編 輯 室