三次方程式之整數解的分析

賴漢卿
國立清華大學數學系

在畢氏定理中，我們都知道，一直角三角形的斜邊平方，等於兩直角邊的平方和。也就是滿足

(1) $a^2+b^2=c^2$

的關係。有時我們要求此 a，b，c 三數都是整數，此時的三個整數稱為畢氏數。如 $a=3$，$b=4$，$c=5$是一組畢氏數。但要求此種畢氏數，若一一代入試驗，則甚費周章，且不易完全求出。因此我們想出用下面等式：

$$(p^2-q^2)^2+4p^2q^2=(p^2+q^2)^2$$

可令

(2) $a=p^2-q^2$，$b=2pq$，$c=p^2+q^2$

則 p，q 用任何正整數，只要滿足 $p>q$，則很快就可求得畢氏數來。我們可以從最小的正整數 p，q 來代入，則易得下面畢氏數表：

p	q	$a=p^2-q^2$	$b=2pq$	$c=p^2+q^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26

有了公式(2)，上面數值表隨手而得。今我們轉到另一問題：問一般三次（方程）式的根爲整數，而此三次式之圖形的反轉點（即函數圖之局部極大與極小）爲有理數點，是否也能如同畢氏數那樣求得一般公式？這個動機是當學生開始學微積分時，會先用導數之技巧，來描畫函數的圖形。教師通常都舉較好的三次式爲例，但構成所謂“較好”三次式，是由三個相異之有理根而成，然而此函數圖之反轉（由增加轉而爲減少，或由減少轉而爲增加之）點，往往不容易再是有理點。教師都要花些時間，列成數值表，來試描此三次曲線。

在用參數表出三次式之根爲整數之前，我們先舉個例，如：

$$(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6$$

有三個根是1，−2，3，而反轉點的橫坐標（即$3x^2-4x-5=0$之根）則不是有理數。但要是改如

$$(x-1)(x+4)(x-4)=x^3-x^2-16x+16$$

則其三個根是1，−4，4，反轉點爲$3x^2-2x-16=0$之根$x=8/3$及$x=-2$。

更進一層的，我們可以用“平移”以及“重新評量”的變換，而不改變這些根及反轉點的“良好性”。例如將1，−4，4用線性變換

$$x^*=(x+1)/2$$

則產生三個新的根爲1，$-\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$。而新三次式爲

$$(x^*-1)(2x^*+3)(2x^*-5)=4x^{*3}-8x^{*2}-11x^*+15$$

反轉點的橫坐標變爲由$12x^2-16x-11=0$之根$\frac{11}{6}$，$-\frac{1}{2}$。故我們看得出該新三次式仍是具有其“良好性”。事實上，反轉點的x坐標，用同樣的線性變換將$\frac{8}{3}$變成$\frac{11}{6}$，而−2變成$-\frac{1}{2}$。此時y坐標可以重估其值（仍是有理數）。因此平移與重估的變換，並不影響其解爲有理數之性質。連續用此變換數次，也就可將之發展成爲一般解的分析。

我們要尋求的原三次函數之整數根，因之下面所有變數都設爲整數。

用平移及重估函數值之變換，我們可設此三次曲線之反轉點的橫坐標爲$-c$與c（

即原點 0 爲此三次曲線之高峯與低谷之橫坐標的中點）。更進一層的可以令 x^3 之係數爲 1，這樣一來，我們要研究的三次式乃變成

(3) $y=x^3-3c^2x+d$

今我們要求出三次函數(3)的根都是整數（相異，但可以爲負）之條件，同時要使此函數圖之反轉點爲有理點。爲此先設 r 爲此三個整數根之一，則

(4) $r^3-3c^2r+d=0$

於是由(3)減(4)（即(3)式分解出 $x-r$ 之因子來）得

(5) $y=(x-r)[x^2+rx+(r^2-3c^2)]$

欲得三個根都是整數，則在(5)式中之二次式的判別式必須是某整數N的完全平方：即

$$r^2-4(r^2-3c^2)=N^2\ ,$$
$$12c^2-3r^2=N^2$$

上式表N是 3 的倍數，令$N=3M$，則得

$$4c^2-r^2=3M^2\ ,\ (2c-r)(2c+r)=3M^2$$

顯然上式之左端兩個因數至少有一因數必能被 3 整除。但 r 可爲正或負整數，故不管取那一個因數爲 3 的倍數都可以，於是我們就設

(6) $\begin{cases} 2c+r=kp^2 \\ 2c-r=3kq^2 \end{cases}$ ，（ p 可設不爲 3 的倍數而與q 互質）

則$M^2=k^2(pq)^2$ 或$M=kpq$ ，其中 k 是任取之適當因數，故我們解得

$$r=k(p^2-3q^2)/2$$
$$c=k(p^2+3q^2)/4$$

要是 r 與 c 都是整數，我們可選取 k 爲 4 ，則

(7) $r=2(p^2-3q^2)$ ， $c=p^2+3q^2$

結果(5)式中之二次因式 $x^2+rx+(r^2-3c^2)$ 以(7)所得之 r，c 之值代入就變成

$$x^2+2(p^2-3q^2)x+[4(p^2-3q^2)^2-3(p^2+3q^2)^2]$$
$$=[x+(p^2-3q^2)]^2-36p^2q^2$$

此二次方程式之根爲

$$x=(3q^2-p^2)\pm 6pq$$

於是原三次函數之根為

(8)　$2(p^2-3q^2)$，$(3q^2-p^2)\pm 6pq$

而該三次曲線之反轉點（以 $x=\pm c=\pm(p^2+3q^2)$ 代入(5)式求得）：

(9)　$(-p^2-3q^2,\ 108q^2(p^2-q^2)^2)$

及

(9′)　$(p^2+3q^2,\ -4p^2(p^2-9q^2)^2)$

為了要使每個三次函數，不但是一種重估的函數值，而且要求 $p+q$ 為奇數，p 與 q 無公因數，同時 p 不為 3 的倍數。

有了(8)，(9)與（9′），我們可從較小的正整數 p，q 代入求得三次函數具有整數解，以及其曲線之反轉點為有理數點，我們可列舉如下面的數值表，（使用 $y=\dfrac{x+1}{3}$ 的變換）：

參數 p	參數 q	三次函數之三個整數根			曲線之反轉點的 x 坐標（有二）	
1	2	−7	0	8	4 2/3	−4
2	1	1	−4	4	2 2/3	−2
1	4	−31	8	24	16 2/3	−16
2	3	−15	−4	20	10 2/3	−10
4	1	9	−12	4	6 2/3	−6
1	6	−71	24	48	36 2/3	−36
2	5	−47	4	44	26 2/3	−26
4	3	−7	−20	28	14 2/3	−14
5	2	9	−24	16	12 2/3	−12
1	8	⋮			⋮	
2	7					
4	5					
5	4					