

一份國中數學月考試題的 診斷與治療

朱建正

國立臺灣大學數學系

案例：某國中七十二學年第二學期甲組三年級第一次期中考

一、選擇（選項若非必要，已經略去，以節省篇幅）

1. 於直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 若 $\sin A = \frac{3}{5}$ ， $\overline{AB} = 6$ 則 $\overline{AC} = ?$

2. $\csc 55^\circ \cos 35^\circ + \tan 60^\circ \cot 45^\circ = ?$

3. 若 A, B 是兩銳角，且 $\sin A = \frac{1}{\sec B}$ 則 $A + B = ?$

4. 下列四個值，何者最大？ $\tan 45^\circ$ ， $\sin 45^\circ$ ， $\sin 30^\circ$ ， $\frac{1}{\sec 30^\circ}$

5. $\tan 30^\circ + \sin 45^\circ - \frac{1}{\sec 60^\circ} = ?$ $\sqrt{3}$ ， $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ， $\csc 60^\circ$ ， $\sec 30^\circ$

6. $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 3:2:1$ ，則 $\sin B \csc B + \tan^2 C - \sec^2 C + \sec B \cos B = ?$

7. 有一樹 $\overline{AB}$ 與甲所站的 C 點，夾角為 θ ，已知 $\cos \theta = \frac{12}{13}$ ，甲與樹腳距離 $\overline{BC} = 24$ 公尺，則樹高為：

8. 如右圖 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} + \overline{AB} = ?$

5 ($\csc 20^\circ + \cot 20^\circ$)，5 ($\sin 20^\circ + \csc 20^\circ$)，5 ($\tan 20^\circ + \cot 20^\circ$)

9. 下列何者為真？

$$\cos 79^\circ > \cos 25^\circ, \csc 45^\circ - \csc 23^\circ > 0, \tan 70^\circ - \cot 58^\circ > 0, \\ \cot 69^\circ - \cot 27^\circ > 0$$

10. 設 $a = \sin 20^\circ$, $b = \cos 20^\circ$, $c = \cot 40^\circ$, 則次序如何？

二、填充

1. $\tan \theta + \cot \theta = \frac{25}{12}$, 則 $\sin \theta \cos \theta$ 之值 = _____

2. $\angle A$ 為銳角, $\cos A > \frac{1}{\csc A}$, 則 A 的範圍為 _____

3. 設 $\sin 48.11^\circ = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 則 $\cos 41.89^\circ =$ _____

4. $\sin 60^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 45^\circ - \sec^2 30^\circ =$ _____

5. $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \csc 60^\circ \sec 45^\circ =$ _____

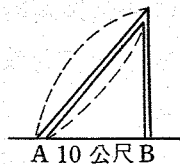
6. 若 $\sin A = \frac{1}{2}$ 則 $\cos(90^\circ - A) \csc(90^\circ - A) =$ _____

7. 設 $\sin A = x$, $0 < x < 1$ 則 $1 + \tan^2 A =$ _____, $1 - \sin^2 A =$ _____

8. 若 $\tan 20^\circ = \frac{b}{a}$, 則 $\csc 20^\circ =$ _____, $\cos 20^\circ =$ _____

三、1. 利用圖解, 求 $\tan 22.5^\circ$

2. 試證恆等式 $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = (\csc A + \cot A)^2$



3. 已知 $\overline{AB} = 10$ 公尺, $\angle A = 22^\circ$, 若 $\sin 22^\circ = 0.37$, $\cos 22^\circ =$, $\tan 22^\circ =$, $\sec 22^\circ =$, $\csc 22^\circ =$ (均有給出, 略去), 求原來樹高。

4. $\sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ + \tan^2 20^\circ - \sec^2 20^\circ + \sin 60^\circ + \csc 45^\circ$

本試題想要評量的目標, 可以分析歸納成下列幾項。

A. 關於從直角三角形定義六個三角函數。

1. 能夠寫出 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ ， $\cos A = \dots\dots$ 等，當 a, b, c 為數字時也一樣。
2. 能行逆向思考，即 $\frac{a}{c} = \sin A$ 等。
3. 能以直角三角形做應用問題。利用三角函數表做計算。
4. 能運用餘角公式，如 $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ ，不論是主動或被動。
- B. 在直角三角形之外，獨立地看六個三角函數。
5. 能分辨三角函數從 0° 到 89° 之間的遞增，遞減性。
6. 能運用平方關係及倒數關係，商數關係，以一三角函數表另一三角函數。不論是變數的或是代入值的。
7. 能記憶並運用特殊角的三角函數值，並培養含此類特殊角時的迅速運算繁複式子的能力。
8. 能證明簡易的三角恆等式，不論是變數的或是代入值的。

本試題的缺點

1. 題目太多。
2. 同種題目重複出現，如填充 4，5 和計算 4。
3. 題目的安排缺乏原則。例如選擇 4，9，10 皆考三角函數大小，應該排在一起。選擇 1，8 類似，也可以排在一起。
4. 許多選擇題的評量目標都是混合型的。不曉得學生答錯的原因，因而失去診斷學生學習狀況的效果。其實題目這麼多，而評量目標有限，如果能夠根據目標來命題就好了。
5. 有不該出的題目，如選擇 6，後半和前半沒有關係。又如計算 1。
6. $\cot, \csc$ ，出得太多。其實三角函數中，以 $\sin, \cos, \tan$ 用得最多，測驗時也應偏重前三個。
7. 沒有考查表。

試題訂正稿

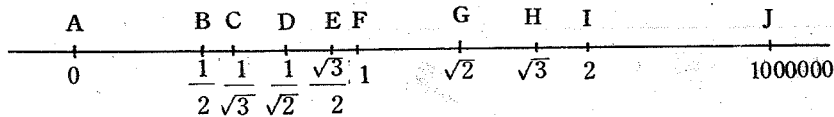
筆者冒昧提出一份訂正稿，請大家指正。

1. 填入特殊角的三角函數值， θ 為正切已知的某一特定角。

	sin	cos	tan	sec	csc	cot
30°						
45°						
60°						
θ						
$90^\circ - \theta$			$\frac{2}{3}$			

1, 2 列每列 3 分, 第 4 列 4 分, 3, 5 兩列各 2 分。每錯一格扣 1 分至該列扣完為止。共 14 分。

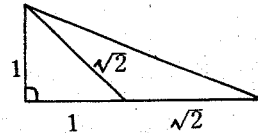
2. 三角形 ABC 中, 已知 $\sin A = \cos B$, 又 $\angle A = 29^\circ$, 則此三角形之三角各為幾度?
3. 三角形 ABC 中, 若 $\sin A = \cos A$, $\sin B = \cos B$, 則此三角形之三角各為幾度?
4. 下列直線坐標系標示如圖:



說明下列各三角函數值應該在那兩點之間。

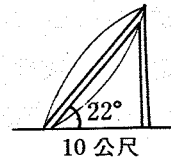
$\tan 32^\circ$; $\sin 12^\circ$; $\tan 70^\circ$; $\cos 54^\circ$; $\sec 28^\circ$

5. (a) 由右圖, 求 $\tan 22.5^\circ$
(b) 利用類似的方法求 $\tan 15^\circ$



6. 令 $x = \sin A$, 求以 x 表示 $\sqrt{1 + \sin^2 A}$, $\cos A$, $\tan A$ 及 $\csc A$ 。

7. 求證恆等式 $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = (\csc A + \cot A)^2$



8. 有一樹被風吹折, 樹尖觸地, 但斷口仍然相接。若樹與地面成 22° , 樹尖至原幹 10 公尺, 且 $\sin 22^\circ = 0.37$, $\cos 22^\circ = 0.92$, $\tan 22^\circ = 0.41$, 求樹原來高度。
9. 計算: $(\sin 12^\circ + \cos 12^\circ)^2 + (\sin 12^\circ - \cos 12^\circ)^2 + \tan 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ$
10. 計算: $(\cos 38^\circ \tan 38^\circ)^{-2} - 1 - \cot^2 38^\circ + \sin 60^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 45^\circ - \csc 60^\circ \sec 45^\circ$

命題目標

- | | |
|--------------------|-------------------|
| 1. 參考評量目標 1, 2, 4。 | 6. 目標 6。 |
| 2. 主動的, 目標 4。 | 7. 目標 8。 |
| 3. 目標 6, 7 的綜合題。 | 8. 目標 3。 |
| 4. 目標 5, 7。 | 9. 目標 7, 乘法公式綜合題。 |
| 5. 目標 1, 幾何綜合題。 | 10. 目標 6, 7 的綜合題。 |

註解

1. 第五題, 先以圖形提示, 再要求學生模仿。避免發生統一月考時, 一班有教, 一班未教之情形。因此題學生沒見過時, 會的可能性太小。
2. 第 8 題改回傳統敘述, 以期完整。
3. 第 6 題先用 $\sqrt{1 + \sin^2 A}$ 提示。
4. 9, 10 兩題原屬多餘, 係為目標 7 後半而設計。

◎ 詞語淺釋 ◎

地震震級

震級：表示地震本身的大小等級，而它的大小則依釋放的能量來決定。

地震發生以後，因觀測地區不同，震度不一；但震級却與震央距離無關，不因測站與震央的遠近而改變其值。

震級以正或負數表示，並取一位小數，係無名數。

目前世界通用的地震震級，是美國地震學家芮氏在一九三五年所創。他下的定義是標準扭力式地震儀在震央距離一百公里處，記錄以微米計的對數值。

按芮氏的公式推算，自有地震觀測以來，還沒有發生過規模大於九的地震。

地震震級的分類標準是：

顯著地震：有感距離半徑超過三百公里。

稍顯著地震：有感距離在二至三百公里之間。

小區域地震：有感距離在一至二百公里之間。

局發地震：有感距離在一百公里以下。

編輯室